Seminarvortrag

Diskrete Markov-Ketten: Kopplung und gleichmäßige Verteilungskonvergenz

von Thomas Elsken

Bachelorseminar zur Wahrscheinlichkeitstheorie
Dozent: Prof. Dr. Gerold Alsmeyer
Institut für Mathematische Statistik
Fachbereich Mathematik und Informatik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

14. November 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Im Rahmen dieses Vortrags werden wir uns mit der gleichmäßigen Verteilungskonvergenz (Konvergenz in Totalvariation) von positiv rekurrenten diskreten Markovketten (DMK) beschäftigen. Zur Erinnerung: Eine DMK M konvergiert in Totalvariation g.d.w.:

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbb{P}_\lambda^{M_n} - \pi\| = \lim_{n\to\infty} \sup_{A\subset\mathscr{S}} |\mathbb{P}_\lambda(M_n \in A) - \pi(A)| = 0$$

für alle $\lambda \in \mathscr{P}(\mathscr{S})$, wobei π die eindeutig bestimmte stationäre Verteilung von M bezeichnet ($\rightarrow$ Satz 2.33) und $\mathscr{P}(\mathscr{S})$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathscr{S}$ ist.
Der zentrale Satz wird dabei der Ergodensatz für DMK sein, welchen wir mit Hilfe einer neuen Beweistechnik, der sogenannten Kopplungsmethode, zeigen werden. Davon ausgehend werden wir uns noch mit spezielleren Konvergenzaussagen beschäftigen.

Bemerkung: Dieser Vortrag basiert auf *ALSMEYER, GEROLD (2005). Stochastische Prozesse. Teil 1: Diskrete Markov-Ketten und Martingale (4. erweiterte Auflage). Skripten zur Mathematischen Statistik 33, Universität Münster*, welches teilweise auch online verfügbar ist. Die hier verwendeten Bezeichnungen entsprechen daher dem des Scripts. Im Anhang werden einige Aussagen zitiert, die im Laufe des Vortrags benötigt werden.

Zurück zum Thema: Wie man sich überlegt, ist die gleichmäßige Konvergenz nur für aperiodische (i.e. Zustände haben Periode 1) positiv rekurrente DMK möglich. Denn hat M die Periode d ≥ 2, so ergibt sich (beachte $\pi_i > 0\,\forall i \in \mathscr{S}$ nach Satz 2.33)

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_i(M_{nd+r} = i) = \lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd+r)} = 0 \neq \pi_i$$

für alle $0 < r < d$. Daher beschäftigen wir uns mit aperiodische, positiv rekurrente DMK.

2 Die Kopplungsmethode

Definition 2.1 (Kopplung)**.** *Seien Q und Q' zwei W-Maße auf einem messbaren Raum $(\mathscr{S}, \mathfrak{S})$. Ein Paar (X, X') von Zufallsvariablen auf demselben W-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ mit Werten in $(\mathscr{S}, \mathfrak{S})$ heißt Kopplung von (Q, Q'), wenn*

$$\mathbb{P}^X = Q \quad \textit{und} \quad \mathbb{P}^{X'} = Q'.$$

Die Idee der Kopplung stammt von Wolfgang Doeblin und wurde 1938 publiziert, blieb allerdings für einige Zeit unbeachtet. Erst in den 70er Jahren erlangte sie Aufmerksamkeit und gehört seitdem zu einem wichtigen Werkzeug beim Beweisen von Grenzwertsätzen für stochastische Prozesse.

Die für uns interessante Situation ist folgende: $X = (X_n)_{n\geq 0}$ und $X' = (X'_n)_{n\geq 0}$ sind DMK mit derselben Übergangsmatrix P. $Q = (Q_n)_{n\geq 0}$ und $Q' = (Q'_n)_{n\geq 0}$ sind dann die Verteilungen von X bzw. X' mit unterschiedlichen Anfangsverteilungen, also $\mathbb{P}^X_\lambda = Q$, $\mathbb{P}^{X_n}_\lambda = Q_n$ und $\mathbb{P}^{X'}_\mu = Q'$, $\mathbb{P}^{X'_n}_\mu = Q'_n$ Sei dazu:

Definition 2.2 (Kopplungszeit)**.**

$$T := \inf\{n \geq 0 : X_k = X'_k \ \forall k \geq n\}$$

ist die zu $(X = (X_n)_{n\geq 0}, X' = (X'_n)_{n\geq 0})$ *gehörende Kopplungszeit.*

Wo liegt nun der Nutzen der Kopplung? Angenommen, wir möchten etwa $\|Q_n - Q'_n\| \to 0$ nachweisen. Dann hilft uns dabei das folgende Lemma:

Lemma 2.3 (Kopplungsungleichung)**.** *Sei* (X, X') *eine Kopplung von* (Q, Q') *mit Kopplungszeit T.* X=$(X_n)_{n\geq 0}$, X'=$(X'_n)_{n\geq 0}$, Q=$(Q_n)_{n\geq 0}$, $Q' = (Q'_n)_{n\geq 0}$ *wie oben beschrieben. Dann gilt:*

$$\|Q_n - Q'_n\| \leq \mathbb{P}(X_n \neq X'_n) \leq \mathbb{P}(T > n)$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\|Q_n - Q'_n\| &\overset{Def.}{=} \sup_{A\in\mathfrak{S}} |\mathbb{P}(X_n \in A) - \mathbb{P}(X'_n \in A)| \\
&= \sup_{A\in\mathfrak{S}} |\mathbb{P}(X_n \in A, X_n = X'_n) + \mathbb{P}(X_n \in A, X_n \neq X'_n) \\
&\quad - \mathbb{P}(X'_n \in A, X_n = X'_n) - \mathbb{P}(X'_n \in A, X_n \neq X'_n)| \\
&= \sup_{A\in\mathfrak{S}} |\mathbb{P}(X_n \in A, X_n \neq X'_n) - \mathbb{P}(X'_n \in A, X_n \neq X'_n)| \\
&\leq \mathbb{P}(X_n \neq X'_n) \leq \mathbb{P}(T > n)
\end{aligned}$$

□

Aus $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ folgt dann $\|Q_n - Q'_n\| \overset{n\to\infty}{\to} 0$, also gleichmäßige Verteilungskonvergenz. Unser Ziel wird es daher später sein, X und X' so zu konstruieren, dass sie sich fast sicher treffen und dann übereinstimmen.

3 Der Ergodensatz für aperiodische, positiv rekurrente DMK

Satz 3.1 (Ergodensatz für DMK)**.** *Sei* M=$(M_n)_{n\geq 0}$ *eine aperiodische, positiv rekurrente DMK mit Übergangsmatrix* $P = (p_{ij})_{i,j\in\mathscr{S}}$ *und stationärer Verteilung* $\pi = (\mu_{ii}^{-1})_{i\in\mathscr{S}}$*. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbb{P}^{M_n}_\lambda - \pi\| = 0$$

für jede Anfangsverteilung λ sowie insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j = \frac{1}{\mu_{jj}}$$

für alle $i, j \in \mathscr{S}$ (gleichmäßig in j).

Beweisidee: Ausgehend von M, welche eine beliebige Anfangsverteilung λ besitzt, konstruieren wir eine weitere DMK $\widehat{M}$ (mit der gleichen Übergangsmatrix P), die stationär unter π ist und irgendwann f.s. mit M übereinstimmt. Mit der Kopplungsungleichung folgt dann die Behauptung.

Beweis.

1. Vorbereitung

Sei zunächst $M \otimes M' := (M_n, M_n')_{n\geq 0}$ eine DMK mit Zustandsraum $\mathscr{S}^2$, kanonischer Filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$, Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{(i_1,i_2),(j_1,j_2)} = p_{i_1 j_1} p_{i_2 j_2}$$

und einem zu Grunde gelegtem Standardmodell $(\Omega, \mathfrak{A}, M \otimes M', (\mathbb{P}_\nu)_{\nu\in\mathscr{P}(\mathscr{S}^2)})$.
Für $\nu = \lambda \otimes \mu$ schreiben wir einfach $\mathbb{P}_{\lambda,\mu}$ anstatt $\mathbb{P}_{\lambda\otimes\mu}$.
Wir halten an dieser Stelle fest:

- $M = (M_n)_{n\geq 0}$ und $M' = (M_n')_{n\geq 0}$ sind *jeweils DMK* bezüglich $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ *mit Übergangsmatrix P*, welche *unter jedem $\mathbb{P}_{\lambda,\mu}$ stochastisch unabhängig* sind, wie man sofort nachrechnet. Wir benutzen die Notationen $\mathbb{P}_{\lambda,\bullet}$ bzw. $\mathbb{P}_{\bullet,\mu}$ anstatt $\mathbb{P}_{\lambda,\mu}$ für Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen, welche nur von M bzw. nur von M' abhängen. Damit folgt unter Beachtung der zeitlichen Homogenität insbesondere direkt

  $p_{(i_1,i_2),(j_1,j_2)}^{(n)} = \mathbb{P}_{i_1,i_2}(M_n = j_1, M_n' = j_2) = \mathbb{P}_{i_1,\bullet}(M_n = j_1)\mathbb{P}_{\bullet,i_2}(M_n' = j_2) = p_{(i_1,j_1)}^{(n)} p_{(i_2,j_2)}^{(n)}$.

- Es gilt $\mathbb{P}_{\lambda,\bullet}^{M} = \mathbb{P}_{\bullet,\lambda}^{M'}$ für alle $\lambda, \mu \in \mathscr{P}(\mathscr{S})$ (denn die Verteilungen von M und M' unterscheiden sich ja lediglich in der Anfangsverteilung).

- $M \otimes M'$ *ist irreduzibel und aperiodisch*, denn wegen der Aperiodizität von M folgt mit Lemma 2.14 $p_{jj}^{(n)} > 0$ für alle $j \in \mathscr{S}$ und $n \geq n_0(j)$, $n_0(j)$ geeignet. Die Irreduzibilität von M impliziert außerdem $p_{ij}^{(m)} > 0$ für ein $m \geq 1$, so dass auch

  $$p_{ij}^{(n)} \overset{Chapman-Kolmogorov}{\geq} p_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n-m)} > 0$$

für alle hinreichend großen n gilt. ist. Es folgt

$$p^{(n)}_{(i_1,i_2),(j_1,j_2)} = p^{(n)}_{i_1 j_1} p^{(n)}_{i_2 j_2} > 0$$

für beliebige $i_1, i_2, j_1, j_2 \in \mathscr{S}$ und n hinreichend groß.

- Man verifiziert leicht, dass $\pi \otimes \pi = (\pi_i \pi_j)_{(i,j) \in \mathscr{S}^2}$ eine stationäre Verteilung der bivariaten Kette ist. Somit liefern Satz 2.45 und die Irreduzibilität von $M \otimes M'$ die *positive Rekurrenz von* $M \otimes M'$. (Mit Satz Satz 2.33(a) folgt außerdem die Eindeutigkeit der stationären Verteilung $\pi \otimes \pi$.)

2. Der Kopplungsprozess.
Sei

$$T = \inf\{n \geq 0 : M_n = M'_n\} = \inf\{n \geq 0 : (M_n, M'_n) \in \{(i,i) : i \in \mathscr{S}\}\}.$$

Aus der Rekurrenz aller (i,i) von $M \otimes M'$ folgt damit

$$\mathbb{P}_\nu(T < \infty) = 1$$

für alle $\nu \in \mathscr{P}(\mathscr{S}^2)$.
Nun definieren wir den eigentlichen Kopplungsprozess $\widehat{M} = (\widehat{M}_n)_{n \geq 0}$ durch:

$$\widehat{M}_n := \begin{cases} M'_n & falls\ n \leq T \\ M_n & falls\ n \geq T \end{cases}$$

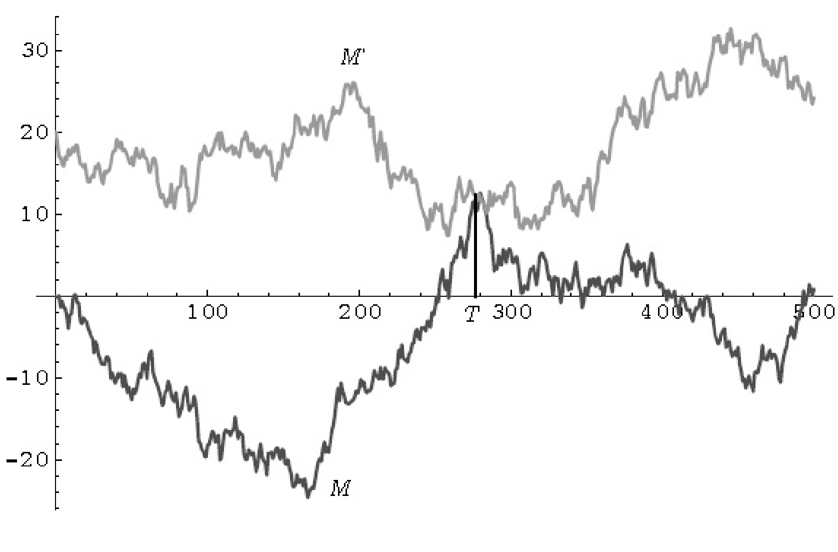

Abbildung 1: Realisierung von M und M' mit Kopplungszeit T für (M,M').

$\widehat{M}$ und M' haben dann unter jedem $\mathbb{P}_\nu$ dieselbe Verteilung. Denn die Post-T-Folgen $M^{(T)} = (M_n)_{n\geq T}$ und $M'^{(T)} = (M'_n)_{n\geq T}$ hängen von der Vergangenheit wegen der starken Markov-Eigenschaft (beachte: T ist eine $M \otimes M'$ Stopzeit) nur von M_T bzw. M'_T ab.
Formale Rechnung: Für alle $\nu \in \mathscr{P}(\mathscr{S}^2)$ und $A_0, A_1, \dots \subset \mathscr{S}$ gilt unter Berücksichtigung von $\mathbb{P}^M_{\lambda,\bullet} = \mathbb{P}^{M'}_{\bullet,\lambda}$

$$\mathbb{P}_\nu(\widehat{M}_k \in A_k, k \geq 0) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}_\nu(T = n, M'_0 \in A_0, \dots, M'_n \in A_n, M_{n+1} \in A_{n+1}, \dots)$$

$$= \sum_{n\geq 0} \sum_{i\in A_n} \int_{T=n, M'_0\in A_0,\dots,M'_{n-1}\in A_{n-1}, M_n=M'_n=i} \mathbb{P}(M_{n+1} \in A_{n+1}, \dots | \mathscr{F}_n) d\mathbb{P}_\nu$$

$$= \sum_{n\geq 0} \sum_{i\in A_n} \mathbb{P}_\nu(T = n, M'_0 \in A_0, \dots, M'_{n-1} \in A_{n-1}, M_n = M'_n = i)\mathbb{P}_{i,\bullet}(M_1 \in A_{n+1}, \dots)$$

$$= \sum_{n\geq 0} \sum_{i\in A_n} \mathbb{P}_\nu(T = n, M'_0 \in A_0, \dots, M'_{n-1} \in A_{n-1}, M'_n = i)\mathbb{P}_{\bullet,i}(M'_1 \in A_{n+1}, \dots)$$

$$= \sum_{n\geq 0} \sum_{i\in A_n} \int_{T=n, M'_0\in A_0,\dots,M'_{n-1}\in A_{n-1}, M'_n=i} \mathbb{P}(M'_{n+1} \in A_{n+1}, \dots | \mathscr{F}_n) d\mathbb{P}_\nu$$

$$= \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}_\nu(T = n, M'_0 \in A_0, \dots, M'_n \in A_n, M'_{n+1} \in A_{n+1}, \dots)$$

$$= \mathbb{P}_\nu(M'_k \in A_k, k \geq 0).$$

Resnick illustriert dies in *Adventures in stochastic processes. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA (1992)* wie folgt:

> Stellen wir uns vor, zwei Frösche, Sam und Suzie, hüpfen von Stein zu Stein, wobei M die Sprünge von Sam und M' zunächst die Sprünge von Suzie beschreibt. Allerdings gibt es einen Haken. Wenn beide auf demselben Stein landen, so hüpft Suzie auf Sams Rücken und von diesem Zeitpunkt an (der Kopplungszeit) mit ihm gemeinsam von Stein zu Stein. Da jedoch beide gemäß derselben Übergangsmatrix springen, ändert es nichts an der Verteilung von Suzies Wanderung, ob sie sich nun auf Sams Rücken weiter bewegt oder davon unabhängig gemäß der Kette M' mit gelegentlichen Treffen auf demselben Stein.

3. Die Kopplung.:
Wir fassen zusammen:

- $M_n = \widehat{M}_n$ für alle $n \geq T$, wobei T als Kopplungszeit für M und $\widehat{M}$ dient
- $\widehat{M} \sim M'$ unter jedem $\mathbb{P}_{\lambda,\mu}$.
- $\mathbb{P}_\nu(T < \infty) = 1$

Wähle nun $\mu = \pi$. Dann ist $\widehat{M}$ unter jedem $\mathbb{P}_{\lambda,\pi}$ stationär, also $\mathbb{P}_{\lambda,\pi}^{\widehat{M}_n} = \pi$ für alle $n \geq 0$, und es folgt mit der Kopplungsungleichung

$$\|\mathbb{P}_{\lambda,\bullet}^{M_n} - \pi\| = \|\mathbb{P}_{\lambda,\pi}^{M_n} - \mathbb{P}_{\lambda,\pi}^{\widehat{M}_n}\| \leq \mathbb{P}_{\lambda,\pi}(T > n) \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

also die Behauptung. q.e.d.

Wegen der Übereinstimmung der Post-n-Prozesse $M^{(n)}$ und $\widehat{M}^{(n)}$ für alle $n \geq T$ und $\mathbb{P}_\pi^{M^{(n)}} = \mathbb{P}_\pi^M$ für alle $n \geq 0$ ergibt sich direkt:

Korollar 3.2. *In der Situation von Satz 3.1 gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbb{P}_\lambda^{M^{(n)}} - \mathbb{P}_\pi^M\| = 0$$

für jede Anfangsverteilung λ.

Beweis. Wegen $\mathbb{P}_{\pi,\bullet}^M = \mathbb{P}_{\lambda,\pi}^{M'} = \mathbb{P}_{\lambda,\pi}^{\widehat{M}}$ gilt auch

$$\|\mathbb{P}_\lambda^{M^{(n)}} - \mathbb{P}_\pi^M\| = \|\mathbb{P}_{\lambda,\bullet}^{M^{(n)}} - \mathbb{P}_{\lambda,\pi}^{\widehat{M}}\| = \|\mathbb{P}_{\lambda,\pi}^{M^{(n)}} - \mathbb{P}_{\lambda,\pi}^{\widehat{M}^{(n)}})\| \leq \mathbb{P}_{\lambda,\pi}(T > n)$$

für alle $n \geq 0$. □

Ferner ergibt sich für die Funktionale $\mathbb{E}_\lambda f(M_n)$ bzw. $\mathbb{E}_\lambda f(M_n, M_{n+1}, \dots)$ der DMK:

Korollar 3.3. *Sei $b\mathfrak{S}$ der Raum aller beschränkten Funktionen und $f : (\mathscr{S}, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ und $\|\cdot\|_\infty$ die Supremumsnorm. Dann gilt in der Situation von Satz 3.1*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{f\in b\mathfrak{S}, \|f\|\leq 1} |\mathbb{E}_\lambda f(M_n) - \int_{\mathscr{S}} f(s)\pi(ds)| = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{f\in b\mathfrak{S}, \|f\|\leq 1} |\mathbb{E}_\lambda f(M^{(n)}) - \mathbb{E}_\lambda f(M)| = 0$$

für jede Anfangsverteilung λ.

Beweis. Per Funktions-Erweiterungsargument.

Darüber hinaus können wir ohne Abschwächung obiger Sätze/Korollare auch DMK mit einem Zustandsraum zulassen, der transiente Zustände enthält, welcher aber irgendwann f.s. verlassen werden:

Satz 3.4. *Sei $M = (M_n)_{n\geq 0}$ eine DMK mit Zustandsraum $\mathscr{S}$, der in eine Menge (nicht notwendig Klasse) $\mathscr{T}$ transienter und eine Klasse $\mathscr{R}$ aperiodischer, positiv rekurrenter Zustände zerfällt, wobei $\mathbb{P}_i(\tau(\mathscr{R}) < \infty) = 1$ für alle $i \in \mathscr{T}$. Dann gelten weiterhin die Aussagen von Satz 3.1, Korollar 3.2 und Korollar 3.3.*

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $\mathbb{P}_i(\tau(\mathscr{R}) < \infty) = 1$ für alle $i \in \mathscr{T}$. Nun ist $\mathscr{R}$ abgeschlossen und $(M_{\tau(\mathscr{R})+n})_{n\geq 0}$ eine aperiodische, positiv rekurrente DMK mit Zustandsraum $\mathscr{R}$. $\square$

Anmerkung: Wegen der vorherigen Ergebnisse nennt man eine aperiodische, positiv rekurrente DMK auch einfach *ergodisch*. Die Konvergenz in Totalvariation der $\mathbb{P}_\lambda^{M_n}$ gegen die stationäre Verteilung bezeichnet man als *starke Ergodizität*, die Konvergenz im Zeitmittel als *schwache Ergodizität*.

4 Gleichmäßige und exponentielle Ergodizität

Wir bleiben in der Situation von Kapitel 3 und wollen uns noch genauer mit der *Überlebensfunktion* $\mathbb{P}_{\lambda,\pi}(T > n)$ der Kopplungszeit T bzgl. M und $\widehat{M}$ beschäftigen, um diese - mit zusätzlichen Voraussetzungen - genauer abschätzen zu können. Vorstellbar wären dabei folgende Denkrichtungen:

1. Eine Abschätzung von $\mathbb{P}_{\lambda,\pi}(T > n)$, die nicht mehr von der Anfangsverteilung λ abhängt, um
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\lambda\in\mathscr{P}(\mathscr{S})} \|\mathbb{P}_\lambda^{M_n} - \pi\| = 0 \tag{1}$$
zu zeigen. Wir bezeichnen M dann als *gleichmäßig ergodisch*.

2. Eine Abschätzung von $\mathbb{P}_{\lambda,\pi}(T > n)$ durch $C(\lambda)f(n)$ für alle $\lambda \in \mathscr{P}_0(\mathscr{S}) \subset \mathscr{P}(\mathscr{S})$, $n \geq 0$ mit einer geeigneten Konstante $C(\lambda) > 0$, und $f : \mathbb{N}_0 \to [0,\infty)$ eine für $n \to \infty$ gegen 0 konvergente Funktion , in der Regel $f(n) = n^{-\beta}$ oder $f(n) = e^{-\beta n}$ für ein $\beta > 0$. $\mathscr{P}_0(\mathscr{S})$ ist dabei die *Klasse der Anfangsverteilungen*, meist $\mathscr{P}_0(\mathscr{S}) = \{\delta_i : i \in \mathscr{S}\}$. Dadurch erhalten wir eine Abschätzung der Konvergenzrate:
$$\|\mathbb{P}_\lambda^{M_n} - \pi\| \leq C(\lambda)f(n) \tag{2}$$
für alle $\lambda \in \mathscr{P}_0(\mathscr{S})$ und $n \geq 0$. Mit der oben genannten Klasse der Anfangsverteilungen und $f(n) = e^{-\beta n}$ bezeichnen wir M dann als *exponentiell* oder *geometrisch ergodisch*, da
$$\lim_{n\to\infty} e^{\gamma n}\|\mathbb{P}_i^{M_n} - \pi\| = 0$$
für alle $i \in \mathscr{S}$ und $\gamma < \beta$.

3. Verknüpft man (1) und (2) mit $f(n) = e^{-\beta n}$ und $\mathscr{P}_0(\mathscr{S}) = \mathscr{P}(\mathscr{S})$, so sprechen wir von *gleichmäßig exponentieller Ergodizität*:
$$\sup_{\lambda\in\mathscr{P}(\mathscr{S})} \|\mathbb{P}_\lambda^{M_n} - \pi\| \leq Ce^{-\beta n} \tag{3}$$
für alle $n \geq 0$ und damit
$$\lim_{n\to\infty} e^{\gamma n} \sup_{\lambda\in\mathscr{P}(\mathscr{S})} \|\mathbb{P}_\lambda^{M_n} - \pi\| = 0$$
für alle $\gamma < \beta$.

Jene Ergodizität wollen wir für DMK nachweisen, welche die

Doeblin-Bedingung: $\exists\, i_0 \in \mathscr{S}, n_0 \geq 1 : \alpha(i_0, n_0) := \inf_{i \in \mathscr{S}} p_{ii_0}^{(n_0)} > 0$

erfüllen. Zu diesem Zweck benötigen wir noch ein Hilfslemma:

Lemma 4.1. *Gegeben eine DMK $M = (M_n)_{n \geq 0}$, welche die Doeblin-Bedingung für ein $i_0 \in \mathscr{S}$ und $n_0 \geq 1$ erfüllt. Dann gilt mit $\alpha = \alpha(i_0, n_0)$*

$$\mathbb{P}_\lambda(\tau(i_0) > kn_0) \leq (1 - \alpha)^k$$

für alle $k \geq 0$ und $\lambda \in \mathscr{P}(\mathscr{S})$, wobei $\tau(A) = \inf\{n \geq 1 : M_n \in A\}$ die sogenannte Rekurrenzzeit bezeichnet.

Beweis. O.E. sei $\lambda = \delta_i, i \in \mathscr{S}$. Mit Hilfe der Markov-Eigenschaft ergibt sich für alle $k \geq 1$ die rekursive Abschätzung

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_i(\tau(i_0) > kn_0) &\leq \mathbb{P}_i(\tau(i_0) > (k-1)n_0, M_{kn_0} \neq i_0) \\
&= \sum_{j \neq i_0} \mathbb{P}_i(\tau(i_0) > (k-1)n_0, M_{(k-1)n_0} = j, M_{kn_0} \neq i_0) \\
&= \sum_{j \neq i_0} \mathbb{P}_i(\tau(i_0) > (k-1)n_0, M_{(k-1)n_0} = j) \mathbb{P}_i(M_{kn_0} \neq i_0 | \tau(i_0) > (k-1)n_0, M_{(k-1)n_0} = j) \\
&= \sum_{j \neq i_0} \mathbb{P}_i(\tau(i_0) > (k-1)n_0, M_{(k-1)n_0} = j)(1 - p_{ji_0}^{(n_0)}) \\
&\leq \mathbb{P}_i(\tau(i_0) > (k-1)n_0)(1 - \alpha).
\end{aligned}$$

Durch Induktion folgt dann die Behauptung. □

Satz 4.2. *Sei M eine ergodische DMK, welche die Doeblin-Bedingung für ein $i_0 \in \mathscr{S}$ und $n_0 \geq 1$ erfüllt mit $\alpha = \alpha(i_0, n_0)$. Dann ist M gleichmäßig exponentiell ergodisch, und zwar mit $C = (1 - \alpha^2)^{-(n_0 - 1)/n_0}$ und $\beta = -\log(1 - \alpha^2)^{1/n_0}$ in (3), also*

$$\sup_{\lambda \in \mathscr{P}(\mathscr{S})} \|\mathbb{P}_\lambda^{M_n} - \pi\| \leq (1 - \alpha^2)^{(n - n_0 + 1)/n_0}$$

für alle $n \geq 0$.

Beweis. Wir benutzen wieder das Kopplungsmodell $(\Omega, \mathfrak{A}, M \otimes M', (\mathbb{P}_\nu)_{\nu \in \mathscr{P}(\mathscr{S}^2)})$ aus dem Beweis von Satz 3.1. Man beachte, dass neben M dann auch die bivariate Kette $M \otimes M'$ die Doeblin-Bedingung erfüllt, und zwar mit demselben n_0 und (i_0, i_0) anstatt i_0, denn

$$\inf_{i,j \in \mathscr{S}} p_{(i,j),(i_0,i_0)}^{(n_0)} = \inf_{i,j \in \mathscr{S}} p_{ii_0}^{(n_0)} p_{ji_0}^{(n_0)} \geq \alpha^2 \tag{4}$$

Außerdem gilt offensichtlich

$T = \inf\{n \geq 1 : M_n = M'_n\} \leq \tau^{M\otimes M'}(i_0, i_0) = \inf\{n \geq 1 : (M_n, M'_n) = (i_0, i_0)\}$.

Schreiben wir nun $n = kn_0 + r$ mit $k \geq 0$ und $0 \leq r < n_0$, so folgt dann mit (4) und dem vorherigen Lemma für alle $\lambda \in \mathscr{P}(\mathscr{S})$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\lambda,\pi}(T > n) &\leq \mathbb{P}_{\lambda,\pi}(\tau^{M\otimes M'}(i_0, i_0) > n)\\ &\leq \mathbb{P}_{\lambda,\pi}(\tau^{M\otimes M'}(i_0, i_0) > kn_0)\\ &\leq (1-\alpha^2)^k \overset{(*)}{\leq} (1-\alpha^2)^{(n-n_0+1)/n_0}\end{aligned}$$

(*) $(1-\alpha^2) \in [0,1]$ und $n - n_0 + 1 = kn_0 - n_0 + \underbrace{r+1}_{\leq n_0} \leq kn_0$, also $\frac{n-n_0+1}{n_0} \leq k$.

Mit der Kopplungsungleichung folgt dann die Behauptung. q.e.d.

Ist die Doeblin-Bedingung bei festem n_0 für mehrere Zustände erfüllt, so ergibt sich als Verschärfung von Lemma 4.1:

Lemma 4.3. *Gegen eine DMK $M = (M_n)_{n\geq 0}$ und eine Menge $A \subset \mathscr{S}$, für dessen Elemente alle die Doeblin-Bedingung bei festem n_0 erfüllt ist. Dann gilt mit $\alpha_j = \alpha(j, n_0)$ für $j \in A$:*

$$\mathbb{P}_\lambda(\tau(A) > kn_0) \leq (1 - \sum_{j\in A}\alpha_j)^k$$

für alle $k \geq 0$ und $\lambda \in \mathscr{P}(\mathscr{S})$.

Beweis. O.E. sei wieder $\lambda = \delta_i$. Für $k \geq 1$ gilt dann:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_i(\tau(A) > kn_0) &\leq \mathbb{P}_i(\tau(A) > (k-1)n_0, M_{kn_0} \notin A)\\ &= \sum_{l\notin A}\mathbb{P}_i(\tau(A) > (k-1)n_0, M_{(k-1)n_0} = l, M_{kn_0} \notin A)\\ &= \sum_{l\notin A}\mathbb{P}_i(\tau(A) > (k-1)n_0, M_{(k-1)n_0} = l)(1 - \sum_{j\in A} p_{lj}^{(n_0)})\\ &\leq \mathbb{P}_i(\tau(A) > (k-1)n_0)(1 - \sum_{j\in A}\alpha_j)\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt wieder per Induktion über k. □

Und damit das Pendant zu Satz 4.2:

Korollar 4.4. *In der Situation von Satz 4.2 gilt sogar*

$$\sup_{\lambda\in\mathscr{P}(\mathscr{S})}\|\mathbb{P}_\lambda^{M_n} - \pi\| \leq (1 - \sum_{j\in\mathscr{S}}\alpha_j^2)^{(n-n_0+1)/n_0}$$

für alle $n \geq 0$, wobei $\alpha_j = \alpha(j, n_0)$ und $\alpha_j = 0$, falls die Doeblin-Bedingung mit j und n_0 nicht gilt.

Beweis. Analog zum Beweis von Satz 4.2 mit Hilfe von Lemma 4.3 anstatt Lemma 4.1. $\square$.

Es sei noch erwähnt, dass die obigen Abschätzungen auch wieder für die Post-n-Folgen $M^{(n)}$ gültig bleiben, i.e. für $\|\mathbb{P}_\lambda^{M^{(n)}} - \mathbb{P}_\pi^M\|$, vgl. Korollar 3.2.

5 Schlussbemerkung

Abschließend möchte ich noch kurz die Resultate des letzten Vortrags (Stationäre Maße und Zeitmittel) und dieses Vortrags zusammenfassen:

> **Positiv rekurrente DMK** sind stets **schwach ergodisch** ($\rightarrow$ Satz 2.33) und **ergodische DMK** sogar **stark ergodisch** ($\rightarrow$ Satz 3.1). Erfüllt eine DMK darüber hinaus noch die **Doeblin-Bedingung**, so können wir sogar eine **Aussage über die Konvergenzrate** machen, welche unabhängig von der Anfangsverteilung ist ($\rightarrow$ Korollar 4.4).

6 Anhang

Im folgenden werden einige Aussagen aus *ALSMEYER, GEROLD (2005). Stochastische Prozesse. Teil 1: Diskrete Markov-Ketten und Martingale (4. erweiterte Auflage). Skripten zur Mathematischen Statistik 33, Universität Münster* zitiert, die bereits in früheren Vorträgen dieses Seminars hergeleitet wurden. Die Nummerierung der Aussagen ist der des oben genannten Scripts nachempfunden.

Korollar 1.7: Chapman-Kolmogorov-Gleichung

Gegeben eine DMK mit Zustandsraum $(\mathscr{S},\mathfrak{S})$ und Übergangsmatrix $P^{(k)} = (p_{ij}^{(k)})_{i,j\in\mathscr{S}} = P^k$, $k \geq 0$, so gilt

$$P^{(m+n)} = P^{(m)}P^{(n)}, \quad \text{d.h.} \quad p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k\in\mathscr{S}} p_{ik}^{(m)}p_{kj}^{(n)}$$

für alle $m, n \geq 0$ und $i, j \in \mathscr{S}$.

Satz 1.27: Starke Markov-Eigenschaft für zeitliche homogene DMK

Sei $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ eine Filtration des W-Raums $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ und $M = (M_n)_{n\geq 0}$ eine zeitlich homogene DMK bzgl. $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ mit Übergangskern P. Dann besitzt $(M_n, \mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ die starke Markov-Eigenschaft: Für jede $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$-Zeit τ gilt $\mathbb{P}$-f.s.

$$\mathbb{P}^{M^{(\tau)}|\mathscr{F}_\tau} = \mathbb{P}^{M^{(\tau)}|M_\tau}.$$

Lemma 2.14

Ein Zustand $i \in \mathscr{S}$ ist genau dann d-periodisch, wenn $p_{ii}^{(n)} = 0$ für alle $n \notin d\mathbb{N}$ und $p_{ii}^{(md)} > 0$ für alle hinreichend großen $m \geq m_0$ gilt.

Satz 2.33

Für eine rekurrente DMK M $= (M_n)_{n\geq 0}$ gelten folgende Aussagen:
(a) M besitzt ein bis auf skalares Vielfaches eindeutig bestimmtes stationäres Maß $\pi = (\pi_i)_{i\in\mathscr{S}}, 0 < \pi_i < \infty \ \forall i \in \mathscr{S}$, das genau dann endlich ist, wenn M positiv rekurrent ist. In diesem Fall bezeichnet $\pi^* := \pi/\pi(\mathscr{S})$ die eindeutig bestimmte stationäre Verteilung von M.
(b) Für $\pi^* = (\pi_i^*)_{i\in\mathscr{S}}$ gilt außerdem: $\pi_i^* = \frac{1}{\mu_{ii}}, \quad i \in \mathscr{S}$, sofern die rechte Seite im null-rekurrenten Fall ($\mu_{ii} = \infty$ für alle $i \in \mathscr{S}$) als 0 interpretiert wird, d.h. $\pi^* \equiv 0$.

(c) Die empirischen Verteilungen $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\delta_{M_k}$ konvergieren auf $\mathfrak{S}_\pi := \{A : \pi(A) < \infty$ $\mathbb{P}_\lambda$-f.s. punktweise gegen π^*, d.h.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\delta_{M_k}(A) = \pi^*(A)\ \mathbb{P}_\lambda\text{-f.s.}$$

für jedes $A \in \mathfrak{S}_\pi$ und jede Anfangsverteilung λ.
(d) Die Cèsaro-Mittel $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}_\lambda^{M_k}$ konvergieren auf $\mathfrak{S}$ ebenfalls punktweise gegen π^*, also

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}_\lambda^{M_k}(A) = \pi^*(A) \tag{5}$$

für jedes $A \in \mathfrak{S}_\pi$ und jede Anfangsverteilung λ, wobei im positiv rekurrenten Fall ($\Rightarrow \mathfrak{S}_\pi = \mathfrak{P}(\mathscr{S})$) sogar

$$\lim_{n\to\infty}\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}_\lambda^{M_k} - \pi^*\| = 0,$$

d.h. in (5) gleichmäßige Konvergenz in $A \in \mathscr{S}$ vorliegt.

Satz 2.45

Sei M $= (M_n)_{n\geq 0}$ eine DMK, die eine stationäre Verteilung π besitzt. Dann zerfällt $\mathscr{S}$ in eine (möglicherweise leere) Menge $\mathscr{N}$ null-rekurrenter oder transienter sowie eine Menge $\mathscr{R} \neq \emptyset$ lauter positiv rekurrenter Zustände, wobei $\pi_i = 0$ für alle $i \in \mathscr{N}$ gilt.