Vortrag über Martingale in Aktion
19.12.2013

Gambler's Ruin

2 Spieler A und B mit Anfangskapital a bzw. b spielen so lange gegeneinander, bis einer von ihnen sein Geld verspielt hat, quasi ruiniert ist, daher der Name.

Einsatz pro Runde $\triangleq$ 1 Geldeinheit

$X_n = 1$ } bedeutet: Spieler A gewinnt die n-te Runde
$X_n = -1$ } " " verliert " "

Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine unabh. Folge identisch verteilter Zufallsgrößen mit Werten in $\{-1, 1\}$ und

- $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$ ($\triangleq$ W-keit in der 1. Runde zu gewinnen ist p)
- $\mathbb{P}(X_1 = -1) = q$ ($\triangleq$ " " " " verlieren ist q)
- $p + q = 1$

Außerdem sei $S_0 = 0$ und $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ für $n \geq 1$ und das Kapital nach n Runden

für A $\triangleq a + S_n$, für B $\triangleq b - S_n$

bis zum Zeitpunkt, zu dem einer der Spieler kein Geld mehr besitzt:

$\tau(a,b) := \inf\{n \geq 0 : S_n = -a \text{ oder } S_n = b\} = \inf\{n \geq 0 : S_n \notin (-a, b)\}$

<u>Ziel</u>: Wir wollen die Ruinwahrscheinlichkeiten der beiden Spieler berechnen:

für Spieler A: $\mathbb{P}(S_{\tau(a,b)} = -a)$, für Spieler B: $\mathbb{P}(S_{\tau(a,b)} = b)$

Nun seien $a, b \in \mathbb{N}$ fest, wir schreiben für $\tau(a,b)$ kurz τ

zz: τ $\mathcal{F}_n$-Stoppzeit $\Leftrightarrow \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$

Bew:

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\overset{=0}{S_0}, \overset{X_1}{S_1}, \ldots, S_n) = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$$

$S_0 = 0$
$X_1 = S_1$
$X_1 + X_2 = S_2$
$X_2 = (X_2 + X_1) - X_1$

$$\{\tau = n\} = \{S_n = -a \text{ oder } S_n = b\}$$
$$= \{S_n = -a\} \cup \{S_n = b\}$$
$$= \underbrace{\{X_1 + \ldots + X_n = -a\}}_{\in \mathcal{F}_n} \cup \underbrace{\{X_1 + \ldots + X_n = b\}}_{\in \mathcal{F}_n}$$

Vereinigungen von $\mathcal{F}_n$-mb. Mengen sind wieder $\mathcal{F}_n$-mb.

$$\Rightarrow S_{\tau_{a,b}} = -a \text{ oder } b$$

Schauen wir uns den einfachen Fall: $p = q = 1/2$, dann

(Beh:) ist $\mathbb{E}X_1 = 0$ und $\mathrm{Var}\, X_1 = \mathbb{E}X_1^2 = 1$

Bew:

$$\mathbb{E}X_1 = -1\, \mathbb{P}(X_1 = -1) + 1 \cdot \mathbb{P}(X_1 = 1)$$
$$= -1/2 + 1/2 = 0$$

$$\mathrm{Var}\, X_1 = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$$
$$= \mathbb{E}(X_1^2) - \underbrace{(\mathbb{E}X)^2}_{=0}$$
$$= \mathbb{E}(X_1^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2\, \mathbb{P}(X_n = n) = 1$$

Aus Rekurrenz symmetr. Irrfahrten auf $\mathbb{Z} \Rightarrow \tau$ f.s. endl.

Def. nun $c = a \vee b$ und $\sigma = \tau(c,c)$, dann gilt $\tau \le \sigma$ ← $\mathbb{P}$ f.s. Stoppzeit

[für $\tau(s,s)$ siehe "Seitentafel"-Folie 1. Abb.]

Aus: $\mathbb{P}(|S_{2c}| = 2c) = \mathbb{P}(X_1 = \ldots = X_{2c}) = \frac{1}{2^{2c-1}} := 1 - \gamma > 0$

$\hookrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2c} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2c} = \frac{1+1}{2^{2c}} = \frac{2}{2^{2c}} = \frac{1}{2^{2c-1}}$

W-keit 2 mal in dieselbe Richtung zu gehen folgt:

$$\underbrace{\mathbb{P}(\sigma > 2nc)}_{\mathbb{P}\text{-f.s. beschr.}} \overset{\text{unabh. Zuwächse}}{\leq} \mathbb{P}\left(|S_{2c}| < 2c, |S_{4c} - S_{2c}| < 2c, \ldots, |S_{2nc} - S_{(2n-2)c}| < 2c\right) < \gamma^n \xrightarrow{n \to \infty} 0 \quad \forall n \geq 0$$

und daraus $\mathbb{E}\beta^{\tau} \leq \mathbb{E}\beta^{\sigma} < \infty \quad \forall\, 0 \leq \beta < \gamma^{-1/2c}$

Bew:

$$\mathbb{E}\beta^{\sigma} = \sum_{k \geq 0} \beta^k \, \mathbb{P}(\sigma = k) \leq \sum_{k \geq 0} \beta^k \, \mathbb{P}(\sigma > k-1) = \mathbb{P}\left(\sigma > \left(\tfrac{k-1}{2c}\right) \cdot 2c\right)$$

$$\leq \sum_{k \geq 0} \beta^k \, \gamma^{\frac{k-1}{2c}}$$

$$= \gamma^{-1/2c} \sum_{k \geq 0} \beta^k \, \gamma^{k/2c}$$

$$= \gamma^{-1/2c} \sum_{k \geq 0} \left(\beta \cdot \gamma^{1/2c}\right)^k < \infty$$

Wir wissen: $\sum_{k \geq 0} p^k < \infty$ für $|p| \in [0,1)$

also: $\beta \cdot \gamma^{1/2c} \overset{!}{<} 1$

$$\beta < \gamma^{-1/2c} = \frac{1}{\gamma^{1/2c}} \qquad \square$$

Insbesondere folgt:

$$\mathbb{E}\tau^p \leq \mathbb{E}\sigma^p < \infty \quad \forall p > 0$$

$\beta^{k_0} = e^{k_0 \log \beta} > e^{p \log k_0}$

Bew: analog

$$\mathbb{E}\sigma^p = \sum_{k \geq 0} k^p \, \mathbb{P}(\sigma = k) \qquad \exists\, k_0 : \beta^{k_0} > k_0^p$$

$$= \underbrace{\sum_{0 \leq k \leq k_0} k^p \, \mathbb{P}(\sigma = k)}_{< \infty} + \sum_{k > k_0} k^p \, \mathbb{P}(\sigma = k)$$

$$\leq \ldots < \infty + \sum_{k > k_0} \beta^k \, \mathbb{P}(\sigma = k)$$

$$\leq \quad \text{''} \quad + \underbrace{\sum_{k \geq 0} \beta^k \, \mathbb{P}(\sigma = k)}_{< \infty}$$

die Summe wird nur größer da pos.

$\| \quad \mathbb{E}\beta^{\sigma} < \infty$ wie vorher gesehen

Jetzt ist die 1. Waldsche Gleichung anwendbar, da wir gezeigt haben, dass für jede $(\mathfrak{F}_n)_{n\geq 0}$-Zeit τ folgendes gilt: $\mathbb{E}\tau < \infty$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}S_\tau = \overset{=\mathbb{E}X_1}{\mu}\,\mathbb{E}\tau$$

(mit geg. unabh. Folge $(X_n)_{n\geq 1}$ id. vert. ZGen mit pos. $\mathbb{E}$ μ!)

$$\Rightarrow 0 = \mathbb{E}S_\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}(\underset{\substack{\shortparallel \\ -a \text{ od. } b}}{S_\tau = n})$$

$$= -a\,\underbrace{\mathbb{P}(S_\tau = -a)}_{A} + b\,\underbrace{\mathbb{P}(S_\tau = b)}_{B}$$

Aus $\mathbb{P}(S_\tau = -a) = 1 - \mathbb{P}(S_\tau = b)$

$A = 1 - B$

$\Rightarrow \quad a(1-B) = bB$

$\Leftrightarrow \quad a - aB = bB$

$a = (a+b)$

$B = \dfrac{a}{a+b}$

$aA = b(1-A)$

$aA = b - bA$

$aA + bA = b$

$(a+b) \cdot A = b$

$A = \dfrac{b}{b+a}$

Mit der 2. Waldschen Gleichung $\Rightarrow$ hier: $\mathbb{E}S_\tau^2 = \mathbb{E}\tau$

$\Rightarrow \mathbb{E}\tau = ab$

erwartete Spieldauer

$$\mathbb{E}S_\tau^2 = a^2 \cdot \frac{b}{a+b} + b^2\,\frac{a}{a+b}$$

$$= \frac{a^2b + b^2a}{a+b} = \frac{ab\,\cancel{(a+b)}}{\cancel{(a+b)}}$$

Exkurs:

$$\mathbb{E}X = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}(X=n)$$

$$\mathbb{E}X^2 = \sum \underset{\substack{\shortparallel \\ (-a)^2}}{n^2}\, \mathbb{P}(X = \overset{n}{-a})$$

$A: a + \overset{=-a}{S_n} = 0$ $\quad \mathbb{P}(S_{\tau(5,5)} = -a)$ W-keit, dass A verliert

Fall: $p \neq q$

<u>Wissen</u>: $(\beta^{S_n})_{n \geq 0}$ Martingal, wenn $\mathbb{E}\,\beta^{X_1} = 1$

$$\mathbb{E}\,\beta^{X_1} = \sum \beta^n\, \mathbb{P}(X_1 = n)$$

hier: $\beta^{-1} \underbrace{\mathbb{P}(X_1 = -1)}_{q} + \beta^{1} \underbrace{\mathbb{P}(X_1 = 1)}_{p} \iff 1 = \frac{q}{\beta} + \beta \cdot p$

1. Fall $\beta = 1$ trivial

2. Fall $\beta = \frac{q}{p}$ dann ist $(\beta^{S_n})_{n \geq 0}$ Martingal

Offensichtlich gilt:

$$\int_{\{\tau > n\}} \left(\frac{p}{q}\right)^{S_n} d\mathbb{P} \;\leq\; \left(\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} \vee \left(\frac{p}{q}\right)^{a+b} \right) \mathbb{P}(\tau > n)$$

reingezogen

f.s. endl. Stoppzeit

wir sind noch nicht bei $-a$ oder b angekommen, daher $\leq$

und die rechte Seite strebt gegen 0

$\Rightarrow$ Optional Sampling – Theorem anwendbar mit $\tau \equiv 0$ und $\tau_2 = \tau_3 = \ldots = \tau$

$$\Rightarrow 1 = \mathbb{E}\left(\frac{q}{p}\right)^{S_\tau} = \left(\frac{q}{p}\right)^{-a} \mathbb{P}(S_\tau = -a) + \underbrace{\left(\frac{q}{p}\right)^{b} \left(1 - \mathbb{P}(S_\tau = -a)\right)}_{+\left(\frac{q}{p}\right)^{b} - \left(\frac{q}{p}\right)^{b} \cdot \mathbb{P}(S_\tau = -a)}$$

$S_0 = 0$, $\mathbb{E}(1) = 1$; $\overset{\shortparallel}{\mathbb{E}\left(\frac{q}{p}\right)^{S_0 = 0}} = 1$

Ruinw-keit für Spieler A:

$$\mathbb{P}(S_\tau = -a) = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{b}}{\left(\frac{q}{p}\right)^{-a} - \left(\frac{q}{p}\right)^{b}} \underset{\text{erweit.}}{\overset{\text{mit} \left(\frac{q}{p}\right)^{a}}{=}} \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{a} - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}} = 1 - \mathbb{P}(S_\tau = b)$$

Bestimme nun $\mathbb{E}\tau$ mit 1. Waldschen Gleichung
$\mathbb{E}S_\tau = \mathbb{E}X_1 \cdot \mathbb{E}\tau$

hier: $\mathbb{E}X_1 = p-q \neq 0$

$$\mathbb{E}(X_1) = (-1)\cdot q + 1\cdot p = p-q \neq 0$$

$$\mathbb{E}\tau = \frac{\mathbb{E}(S_\tau)}{p-q} = \frac{-a\,\mathbb{P}(S_\tau=-a)+b\cdot\mathbb{P}(S_\tau=b)}{p-q}$$

$$= \frac{-a\,\mathbb{P}(S_\tau=-a)+b(1-\mathbb{P}(S_\tau=-a))}{p-q}$$

$$= \frac{b-(a+b)\cdot\mathbb{P}(S_\tau=-a)}{p-q}$$

für $a=b$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\tau = \left|\frac{1-2\mathbb{P}(S_\tau=-a)}{p-q}\right|\cdot a$$

Der Galton - Watson - Prozess (GWP)

ist ein spezieller stochastischer Prozess, um die Aussterbewahrscheinlichkeit einer Population zu berechnen, welche sich selbstständig reproduziert.

(Falls n ex. mit $Z_n = 0 = \{EXT\}$, Endzustand absorbierend)

Sei $\cancel{Z}Z_n$ = Populationsgröße zum Zeitpunkt n

zu Beginn 0-te Generation bestehe aus 1 Mitglied, Urahne

$M_0 = 1$

Jedes Individuum lebe eine Zeiteinheit und produziere am Lebensende eine zufällige Anzahl von Nachkommen.

Annahmen für den Reproduktionsprozess der Population

(1) Anz. der Nachkommen für jedes Individuum identisch verteilt : $(X_{n,k})_{n,k \geq 0}$ Reproduktionsverteilung

(2) Individuen reproduzieren unabh. voneinander und von der Anzahl der Mitglieder der eigenen und aller vorhergehenden Generationen

Die Mitglieder der n-ten Generation werden durchnummeriert mit $1, \dots, Z_n$.

$X_{n,k}$ bezeichnet die Anzahl der Nachkommen des k-ten Mitglieds, dann gilt

$$Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n,k} \quad , n \geq 0 \qquad Z_0 = 1$$

und $\mathbb{E}\, X_{1,1} =: \mu$

Für $\mu < 1 \longrightarrow$ Aussterben der Population

$\mu = 1 \quad \mathbb{P}(X_{1,1} = 1) < 1$

relevant $\mu > 1$

Wir zeigen, dass für einen GWP $(Z_n)_{n \geq 0}$ mit Reproduktionsmittel $\mu < \infty$ und $\mathbb{P}(X_{n,k} = 1) < 1$ der zugehörige normierte Prozess $W_n := \mu^{-n} Z_n$, $n \geq 0$ ein nichtnegatives Martingal bildet und f.s. gegen einen Limes W_∞ strebt, der im Fall $\underline{\mu \leq 1}$ f.s. 0 ist, da die Population mit W-keit 1 ausstirbt.

Betrachte im Weiteren den superkritischen Fall $\underline{\mu > 1}$

- ~~zz~~: $\mathbb{E}\,|W_n| < \infty \quad \forall n$

$$Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n,k} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} X_{n,k} \mathbb{1}\{Z_n = m\}$$

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{\mu^{n+1}} \cdot Z_{n+1}\right) \overset{\text{mon. Kgz}}{=} \frac{1}{\mu^{n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} \mathbb{E}(\underbrace{X_{n,k}}_{\mu} \overset{\text{unabh.}}{\longleftrightarrow} \underbrace{\mathbb{1}\{Z_n = m\}}_{\mathbb{P}(Z_n = m)})$$

$$= \frac{1}{\mu^n} \sum_{m=0}^{\infty} m \cdot \mathbb{P}(Z_n = m)$$

$$\frac{1}{\mu^{n+1}} \mathbb{E}\, Z_{n+1} = \frac{1}{\mu^n} \mathbb{E}\, Z_n \Longleftrightarrow \mathbb{E}\, Z_{n+1} = \mu\, \mathbb{E}\, Z_n$$

$$\overset{\text{iid.}}{=} \mu^{n+1} \underset{1}{\mathbb{E}\, Z_0} < \infty$$

- zz: W_n ist $\mathcal{F}_n$ mb. $\qquad \mathcal{F}_n = \sigma(Z_0, \dots, Z_n)$

$W_n^{-1}(A) \in \mathcal{F}_n \quad \forall A$

$(\hat{=}\ Z_n^{-1}(A)) \qquad \sigma(Z_0, \dots, Z_n) \qquad Z_0^{-1}(B), \dots, Z_n^{-1}(B) \quad \forall B$

$f(X_1, X_2, X_3) \in \sigma(X_1, X_2, X_3)$

zz: $\mathbb{E}(W_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \overset{!}{=} W_n$

$$\frac{1}{\mu^{n+1}} \mathbb{E}(Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \frac{1}{\mu^{n+1}} \mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{Z_n} X_{n,k} \mid \mathcal{F}_n\Big)$$

$$= \frac{1}{\mu^{n+1}} \mathbb{E}\Big(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} X_{n,k} \mathbb{1}_{\{Z_n = m\}} \mid \mathcal{F}_n\Big)$$

unabh.

$$\overset{\text{mon. Kgz}}{=} \frac{1}{\mu^{n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} \mathbb{E}(X_{n,k} \underbrace{\mathbb{1}_{\{Z_n = m\}}}_{\mathcal{F}_n\text{mb. rausziehen}} \mid \mathcal{F}_n)$$

$$= \frac{1}{\mu^{n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} \mathbb{1}_{Z_n = m} \, \mathbb{E}(X_{n,k} \mid \mathcal{F}_n) \leftarrow \text{unabh}$$

$$= \frac{1}{\mu^{n+1}} \sum_{k=1}^{Z_n} \mu = \frac{1}{\mu^{n+1}} Z_n \cdot \mu = \frac{1}{\mu^n} Z_n = W_n$$

$\Rightarrow W_n = \frac{1}{\mu^n} Z_n$ Martingal $\square$

Im Fall $\mu > 1$ stellen wir uns folgende Fragen:
Ist μ_n die richtige Normierung des Prozesses der Explosionsmenge $\{Z_n \to \infty\}$?

Gilt $\{W_\infty \overset{\text{zu pos.}}{>} 0\} = \{\lim_{n\to\infty} Z_n = \infty\}$ f.s. ?

Wir zeigen dies, indem wir zeigen, dass die Reproduktionsverteilung auch endl. Varianz σ^2 besitzt, d.h. $\operatorname{Var} Z_1 < \infty$.

Vorüberlegung

Sei $Z = (Z_n)_{n \geq 0}$ DMK, $\longrightarrow$ $\mathbb{P}(Z_{n+1} \in A_{n+1} \mid Z_n \in A_n, Z_{n-1} \in A_{n-1}, \ldots, Z_0 \in A_0)$
$= \mathbb{P}(Z_{n+1} \in A_{n+1} \mid Z_n \in A_n)$

d.h. $\mathbb{P}_i = \mathbb{P}(\cdot \mid Z_0 = i)$ für $i \in \mathbb{N}_0$

Ab jetzt kurz: $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}$

$$Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n,k}$$

$$S_n = \sum X_i$$

$$\mathbb{E}(S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\Big(\sum^{n} X_i + X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\Big)$$

$$\overset{\mathcal{F}_n\text{mb}}{=} S_n + \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$$

$(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ kanonische Filtration von $(Z_n)_{n\geq 0}$

Da GWP mit i Urahnen die Summe i unabh. und ident. vert. GWPe mit einem Urahnen und gleicher Reproduktionvert. bildet, d.h.

ganzer Prozess Summe aller Nachkommen $\mathbb{P}_i^Z = (\mathbb{P}^Z)^{*(i)}$ einzelne GW-Bäume aufsummieren ergibt sich für den Limes W_∞

$\mathbb{P}_i^{W_\infty} = (\mathbb{P}^{W_\infty})^{*(i)}$ und daraus $p(i) = \mathbb{P}_i(W_\infty = 0)$ W-keit bei i Urahnen auszusterben

$[p(i) = p(1)^i]$ Betrachte 1 Baum i mal

A: $\mathbb{P}(W_\infty > 0) > 0$, d.h. $P(1) \leq 1$

Beh: $\{W_\infty = 0\} = \{Z_n \to 0\}$ f.s. stirbt aus

wenn W_∞ nicht f.s. identisch 0 ist, folgt $\{W_\infty > 0\} = \{Z_n \to \infty\}$ f.s.
(Satz 4.24 von e) $\to$ a))

Bew: g.i. Martingal $Y_n := \mathbb{P}(W_\infty = 0 \mid \mathcal{F}_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$

Da $\mathbb{1}_{\{W_\infty = 0\}}$ $\mathcal{F}_\infty$-messb. folgt

$$\lim_{n\to\infty} Y_n = \mathbb{P}(W_\infty = 0 \mid \mathcal{F}_\infty) = \mathbb{1}_{\{W_\infty = 0\}} \quad \mathbb{P}_i\text{-f.s. } \forall i \in \mathbb{N}_0$$
$$= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{W_\infty = 0\}} \mid \mathcal{F}_\infty)$$

Mit Markov-Eigenschaft gilt:

hängt vom Zufall ab

$$\mathbb{P}(W_\infty = 0 \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(W_\infty = 0 \mid Z_n) = \mathbb{P}_{Z_n}(W_\infty = 0) \overset{Def}{=} p(Z_n) = p(1)^{Z_n} \quad \mathbb{P}_i\text{-f.s.}$$

$Z_n = (Z_0, .., Z_n)$

"Verschiebung": Anstatt von Anfang an zu gucken, gucke ich erst ab Z_n wann sie aussterben.

Mit $p(1) < 1$ Aussterbewahrs.keit mit 1 Urahnen

$$\Rightarrow \mathbb{1}_{\{W_\infty = 0\}} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(W_\infty = 0 \mid Z_n) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{p(1)^{Z_n}}_{\to 0} = \mathbb{1}_{\{Z_n \to 0\}} \quad \mathbb{P}_i\text{-f.s.}$$

$\Rightarrow$ Beh.

Frage nach der Normierung:

Wann ist $\mathbb{P}(W_\infty > 0) > 0$, d.h. $\mathbb{E} W_\infty > 0$?

Im Fall endl. Reproduktionsvarianz σ^2 folgt:

$$\mathbb{E} W_n^2 = \mu^{-2n} \mathbb{E} Z_n^2 \qquad \text{Was ist } \mathbb{E} Z_n^2 \text{ ?}$$

Zwischenrechnung:

$$\mathbb{E}(Z_{n+1})^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{Z_n} X_{n,k}\right)^2$$
$$= \mathbb{E}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} X_{n,k} \mathbb{1}_{Z_n = m}\right)^2$$

$\mathbb{1}_{Z_n=m_1} \cdot \mathbb{1}_{Z_n=m_2}$
$$\overset{\text{sto unabh.}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{m} X_{n,k} \mathbb{1}_{Z_n=m}\right)^2$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} \mathbb{E} X_{n,k}^2 \mathbb{1}_{Z_n=m} + \sum_{1 \le k_1 \ne k_2 \le m} \mathbb{E} X_{n,k_1} X_{n,k_2} \mathbb{1}_{Z_n=m}\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(m \cdot (\sigma^2+\mu^2)\, \mathbb{P}(Z_n=m) + (m-1)\cdot m \mu^2\, \mathbb{P}(Z_n=m)\right)$$

$$= (\sigma^2+\mu^2)\, \mathbb{E}(Z_n) + \mu^2 \mathbb{E} Z_n^2 - \mu^2 \mathbb{E} Z_n$$

$$= \sigma^2 \mathbb{E} Z_n + \mu^2 \mathbb{E} Z_n^2$$
$$= \sigma^2 \mu^n + \mu^2 \mathbb{E} Z_n^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 1/\mu^{2n}\, \mathbb{E} Z_n^2 = \frac{1}{\mu^{2n}}\left(\sigma^2 \mu^{n-1} + \mu^2 \underbrace{\mathbb{E} Z_{n-1}^2}_{\sigma^2 \mu^{n-2} + \mu^2 \mathbb{E}(Z_{n-2}^2)}\right)$$

$$= \sigma^2 \mu^n + \sigma^2 \mu^{n+1} + \sigma^2 \mu^{n+2} + \dots$$

$$= \sigma^2 \mu^n \underbrace{(1 + \mu + \dots + \mu^{n-1})}_{\text{abschätzen geom. Reihe}}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E} W_n^2 = \mu^{-2n} \mathbb{E} Z_n^2 = \frac{\sigma^2(1-\mu^{-n})}{\mu(\mu-1)} + 1 < \infty \quad \forall n \ge 0$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{L}^2$-Beschränktheit von $(W_n)_{n\geq 0}$

(Äquivalenz)
Satz 4.28 $W_n \to W_\infty$ $\mathbb{P}$-f.s., in $\mathcal{L}^2$

$$\mathbb{E}W_\infty = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}W_n = 1$$

Im Fall endl. Reproduktionsvarianz, d.h. $\mathbb{V}\mathrm{ar}\, Z_1 < \infty$ bildet somit μ^n die richtige Normierung.

$\square$

Cramér – Lundberg – Modell

Standardmodell für die Schadensversicherung

Hiermit kann man 2 wichtige Ursachen betrachten:

- häufige Schäden,
- große Schäden

- Dient zur Abschätzung der Ruinwahrscheinlichkeit

Allgemeine Beschreibung eines Risikomodells

Wir betrachten eine Gesamtheit (nach bestimmten Kriterien gebildet) von Versicherungsnehmern (= Portfolio) beginnend zum Zeitpkt $T_0 = 0$

Für $n \geq 1$ gebe T_n = Zeitpkt des Schadens an

X_n zugehörige Schadenshöhe

Schadensverlauf $(T_n, X_n)_{n \geq 1}$

Schadenszählprozess $(N(t))_{t \geq 0}$ mit

$$N(t) := \sup \{n \geq 0 : T_n \leq t\} = \sum_{k \geq 1} 1\!\!1_{\{T_k \leq t\}}$$

Zufallszahl: größtes n für zufälligen Schaden finden

Schadenszeit

d.h. $N(t) = n$ für $t \in [T_n, T_{n+1})$ und den Schadensprozess $(S(t))_{t \geq 0}$ durch $S(t) := \sum_{n=1}^{N(t)} X_n$

Beob. zeitraum

Gesamtschaden

Für $S(T_n) \mathrel{\hat{=}}$ Gesamthöhe der ersten n Schäden im Beobachtungszeitraum, schreiben wir S_n

R_0 = freie Reserve des Versicherers zum Zeitpkt $t = 0$

↳ Zu Beob.beginn zur Verfügung stehendes Kapital zur Schadensbegleichung

Wir setzen $c>0$ für lineare Prämieneinnahmen, dh.

$ct \hat{=}$ Prämieneinnahme zum Zeitpkt t

Für $R_t \hat{=}$ freie Reserve " " gilt

(*1) $R_t = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nicht} \\ \text{fest}}}{R_0} + ct - S(t) \leftarrow$ Schaden bis zum Zeitpkt t

Die Stoppzeit

$\inf \emptyset = 0$

$\Lambda := \inf\{t>0 : R_t < 0\}$ heißt Zeitpkt des Ruins

Ruinwkeit $\psi(u) := P_u(\Lambda < \infty)$, $P_u := P(\cdot \mid R_0 = u)$

in Abh. von Anfangsreserve $R_0 = u$ fest.

Ruin kann nur auf einer diskreten Menge $\{T_n, n \geq 1\}$ der Schadenszeitpkte stattfinden

$\Lambda = T_\tau \qquad \tau := \inf\{n \geq 1 : S_n > R_0 + cT_n\}$ diskr. Werte

dann gilt auch $\psi(u) := P_u(\tau < \infty)$

Eigenschaften CL-Modell sollten unter jedem P_u, $u \geq 0$ gelten: $CL(1) - CL(3)$ "Seitentafel"

Im folgenden sei $R_0 = u$ fixiert und $P = P_u$

Vereinfachung von (*1) $\tau = \inf\{n \geq 0 : S_n - cT_n > u\}$ Wann hab ich mehr Schaden als Anfangskapital

Eine Erstaustrittszeit für die Folge $(S_n - cT_n)_{n \geq 0}$ (Random Walk) mit unabh. id. vert. Zuwächsen liegt hier vor!

Falls $E(cT_1 - S_1) < 0 \Rightarrow \psi(u) = 1 \quad \forall u \geq 0$

aus $\lim_{n\to\infty} S_n - cT_n = \infty$ f.s.

da der Schaden größer als Einnahmen.

Aus $\limsup_{n\to\infty} (S_n - cT_n) = \infty$ f.s.

$$\Rightarrow \mathbb{E}(cT_1 - S_1) = 0$$

denn Zuwächse des Random Walks sind quadr. intb. (folgt aus CL1 & CL2)

<u>relevanter Fall</u>: $\mathbb{E}(cT_1 - S_1) > 0$

Der Versicherer nimmt im Mittel pro Zwischenschadensperiode mehr ein, als er für einen Schaden bezahlen muss, genannt <u>Nettorisikoprämie</u>

Unser Ziel: wir suchen eine Abschätzung für $\Psi(u)$ durch eine exponentielle Schranke e^{-ru} für ein $r>0$

(Je größe u wird, desto mehr sinkt die W-keit, dass ich Pleite gehe exponentiell schnell).

Konstruiere ein Martingal

$\mathcal{F}_n = \sigma((S_k, T_k)_{0\le k\le n})$ Dann gilt für bel $0 \le t < s^*$ (Zeitpkt) und $\forall\, n \ge 1$:

$$\mathbb{E}\big(e^{t\overbrace{(S_n - cT_n - u)}^{\text{Prozess s.o.}}} \,/\, \mathcal{F}_{n-1}\big) = e^{t(S_{n-1} - cT_{n-1} - u)}\, \mathbb{E}\, e^{t(S_1 - cT_1)} \quad P\text{-f.s.}$$

$S_{n-1} + \underline{S_n - S_{n-1}}$ Zuwächse

$n-1=n$

$S_1 - S_0$, $S_0 = 0$

wobei $g(t) := \mathbb{E}\, e^{t(S_1 - cT_1)} = h(t)\, \mathbb{E}\, e^{-ctT_1} = \dfrac{\theta\, h(t)}{\theta + ct}$

Bew

$$\mathbb{E}\, e^{t(S_1 - cT_1)} = \underbrace{\mathbb{E}\, e^{tS_1}}_{h(t)} \cdot \mathbb{E}\, e^{-tcT_1}$$

exp vert.

$$= \int e^{-tcx}\, dP^{T_1}(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-tcx}\, \theta\, e^{-\theta x}\, 1\!\!1_{(0,\infty)}(x)\, d\lambda$$

$$= \theta \int_0^\infty e^{-(tc+\theta)x}\, dx$$

$$= \theta \left[\frac{1}{-\theta + ct} e^{-(tc+\theta)x} \right]_0^\infty = \theta \cdot \frac{1}{\theta + ct}$$

Folge $M_n(t) : g(t)^{-n} e^{t(S_n - cT_n - u)}$, $n \geq 0$ definiert für $0 \leq t < s^*$ ein pos. Martingal bzgl $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ $\forall n \geq 1$ mit Optional-Sampling Theorem:

$(n=0)$

$$e^{-tu} = \mathbb{E} M_0(t) \overset{O.S.}{=} \mathbb{E} M_{\tau \wedge n}(t)$$

$$(**) = \mathbb{E}(M_{\tau\wedge n}(t) \mid \tau \leq n)\, P(\tau \leq n) + \mathbb{E}(M_{\tau \wedge n}(t) \mid \tau > n)\, P(\tau > n)$$

$$\geq \mathbb{E}(M_{\tau\wedge n}(t) \mid \tau \leq n)\, P(\tau \leq n)$$

$$= \mathbb{E}(M_\tau(t) \mid \tau \leq n)\, P(\tau \leq n)$$

Aus $S_\tau - cT_\tau - u > 0 \Rightarrow M_\tau(t) > g(t)^{-\tau}$ mit Jensenschen Ungl.

(mit $M_\tau(t) = g(t)^{-\tau} \cdot \underbrace{e^{tx}}_{\geq 1}$

$$\mathbb{E}(M_\tau(t) \mid \tau \leq n) \geq \mathbb{E}(g(t)^{-\tau} / \tau \leq n) \overset{\text{Jensen}}{\geq} g(t)^{-\mathbb{E}(\tau / \tau \leq n)}$$

$$\geq \frac{1}{\sup_{k\geq 0} g(t)^k}$$

$$\overset{\text{ing.}}{\Rightarrow} P(\tau \leq n) \leq e^{-tu} \sup_{k \geq 0} g(t)^k \quad \forall n \geq 0$$

und $P(\tau < \infty) \leq$ "

Das Supremum ist endl. $\Leftrightarrow$ $g(t) \leq 1$

Damit gelangen wir zur

Cramér – Lundberg – Ungleichung

Geg: CL(1) – CL(3) und $\mathbb{E}(cT_1 - S_1) > 0$

Sei $r := \sup\{t \geq 0 : g(t) \leq 1\} \overset{\text{Def von } g(t) \text{ über (S. 3)}}{=} \sup\{t \geq 0 : h(t) \leq \frac{ct}{\Theta} + 1$
mit $r \leq s^*$ (CL(2))

$\Rightarrow \Psi(u) = P_u(\tau < \infty) \leq e^{-ru} \quad \forall\, u \geq 0$

r hier immer pos

Es gilt: $g'(t) = \mathbb{E}(\underbrace{S_1 - cT_1}_{<0})\, e^{\overbrace{t(S_1 - cT_1)}^{>0}} < 0$

$g'(0) = \mathbb{E}(S_1 - cT_1) < 0$

$g(0) = 1 \Rightarrow g$ rechts v. d. 0 $\overset{\text{in kl. Umg.}}{<} 1 \Rightarrow r > 0$

$g''(t) = (\mathbb{E}(S_1 - cT_1))^2 e^{t(S_1 - cT_1)} > 0$

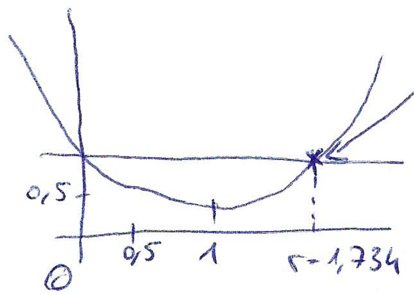
$\Rightarrow g(t)$ konvex

$\Rightarrow$ 1. es ex. kein $t > 0$ mit $g(t) = 1$
$\Rightarrow r = \max\{t : g(t) < \infty\}$ und $g(r) < 1$

oder

2. es ex. eine Lsg r mit $g(r) = 1$

genannt Lundberg – Exponent:



Zeitlänge · Geld

Fkt $g(t)$ im Fall
$T_1 \overset{d}{=} \Gamma(2,1)$, $X_1 \overset{d}{=} \mathrm{Exp}(2)$ und $c = 1$

$$(**) = \underbrace{\mathbb{E}(M_{\tau\wedge n}(t) \mid \tau \le n)\, \mathbb{P}(\tau \le n)}_{1.\text{ Teil}} + \underbrace{\mathbb{E}(M_{\tau\wedge n}(t) \mid \tau > n)\, \mathbb{P}(\tau > n)}_{2.\text{ Teil}}$$

für $t = r$

Da $S_n - cT_n$ auf $\{\tau > n\}$ nach oben beschränkt ist durch u und da $\mathbb{E}(S_1 - cT_1) < 0$ f.s. gegen $-\infty$ geht, mit majorisierter Kgz. für den 2. Teil

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} e^{ru}\, \mathbb{E}(M_{\tau\wedge n}(r) \mid \tau > n)\, \mathbb{P}(\tau > n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{\{\tau > n\}} e^{r(\overset{-\infty}{S_n - cT_n})}\, d\mathbb{P} = 0$$

mit monotoner Kgz für den 1. Teil

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(M_{\tau\wedge n}(r) \mid \tau \le n)\, \mathbb{P}(\tau \le n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{\{\tau\le n\}} \overset{e^{\cdots}}{M_\tau(r)}\, d\mathbb{P} \qquad = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \mathbb{1}_{\{\tau\le n\}} e^{\cdots}\, d\mathbb{P}$$

$$= \int_{\tau<\infty} M_\tau(r)\, d\mathbb{P} \qquad = \int_\Omega \underbrace{\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{\{\tau\le n\}}}_{\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}} e^{\cdots}\, d\mathbb{P}$$

$$= \mathbb{E}(M_\tau(r) \mid \tau < \infty)\, \mathbb{P}(\tau < \infty)$$

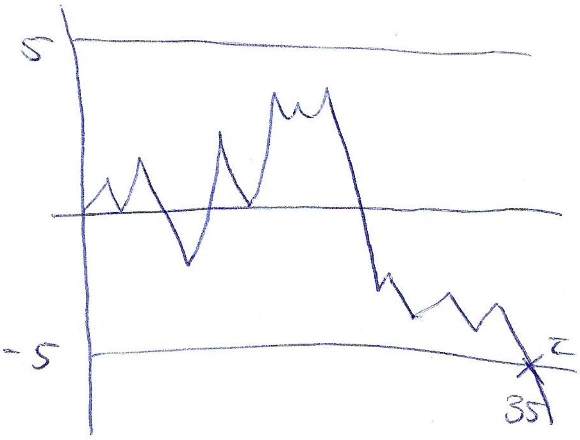
$\Rightarrow \mathbb{E} = \mathbb{E}_u$ abh. von u

$$\overset{\text{insg.}}{\Rightarrow} e^{ru} \cdot \Psi(u) = \frac{1}{\mathbb{E}_u(M_\tau(r) \mid \tau < \infty)}$$

↑ berechnen schwer
⇒ 2 Band

Seitentafel

1. Abb.



Simulierter Spielverlauf im Fall $p = q = 1/2$ mit $\tau(5,5) = 35$

1. Waldsche Gl.

Geg: unabh. Folge $(X_n)_{n\geq 1}$ id. vert. Zufallsgr. mit pos $\mathbb{E}\,\mu$,
Seien $S_0 = 0$ und $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ für $n \geq 1$
der zugeh. Random Walk, $(\mathfrak{F}_n)_{n\geq 0}$ Filtration mit

(F1) $\sigma(S_0, \dots, S_n) \subset \mathfrak{F}_n \quad \forall\, n \geq 0$

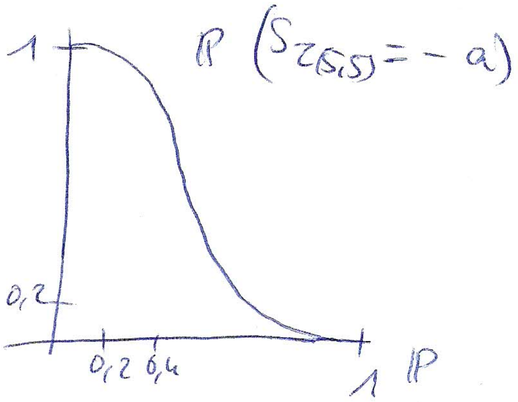
(F2) $\mathfrak{F}_n$ und $(X_k)_{k>n}$ sind unabh.

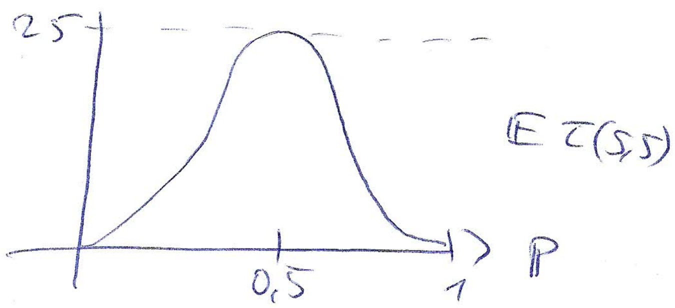
Dann: Für jede $(\mathfrak{F}_n)_{n\geq 0}$-Zeit τ mit $\mathbb{E}\,\tau < \infty$ gilt
1. Waldsche Gl.

$$\mathbb{E}\, S_\tau = \mu\, \mathbb{E}\,\tau$$

2. Waldsche Gl. $\quad \mathbb{E}(S_\tau - \mu\tau)^2 = \sigma^2\, \mathbb{E}\,\tau$

Fluten von





GWP Satz 4.28 S. 220

Geg ein Martingal $(M_n)_{n\geq 0}$ und $p>1$ sind äquiv.:

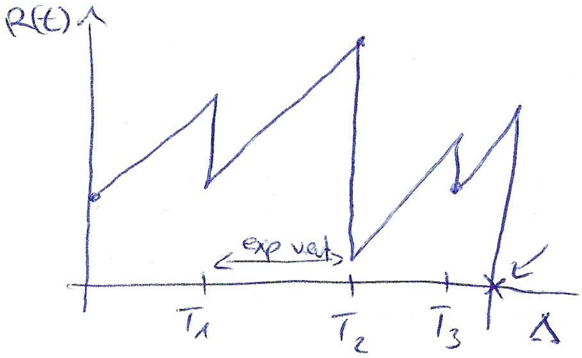
(a) $\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}|M_n|^p < \infty$

(b) $\mathbb{E}(\sup_{n\geq 0} |M_n|^p) < \infty$

(c) $(|M_n|^p)_{n\geq 0}$ ist g.i

(d) Es ex. eine ZG M_∞, so dass $M_n \to M_\infty$ $\mathbb{P}$-f.s. und in L^p.

CL Modell



wenn freie Reserve abnimmt Prämien erhöhen!

$\sigma = T_4$ Ruinzeitpkt

CL(1) – CL(3) S. 254/55