Übungen

Abgabetermin: 23.01.2013 nach der Vorlesung

Aufgabe 10 Zeigen Sie:

(a) Die Einschränkung eines Poisson-Prozesses N mit Intensitätsmaß ν auf die Menge $D \in \mathfrak{S}$ ist ein Poisson-Prozess mit Intensitätsmaß $\nu(\cdot \cap D)$. Falls

$$N = \sum_{i=1}^{\zeta} \delta_{X_i}$$

mit einer Poisson-Variablen ζ und $X_i \stackrel{d}{=} Q$, so gilt insbesondere

$$N(\cdot \cap D) \ \stackrel{d}{=} \ \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{Y_i},$$

wobei $\tau, Y_1, Y_2, ...$ stochastisch unabhängig sind, τ eine Poisson-Variable mit Parameter $(\mathbb{E}\zeta)Q(D)$ und $Y_i \stackrel{d}{=} Q(\cdot \cap D)/Q(D),\ i \in \mathbb{N}$.

(b) Die Mischung von Binomialprozessen $N_k = \sum_{i=1}^{\beta_{k,\alpha}} \delta_{Y_i}$, wobei $\beta_{k,\alpha} \stackrel{d}{=} Bin(k, \alpha)$ und $Poisson(t)$ die Mischungsverteilung ist, bildet einen Poisson-Prozess $\sum_{i=1}^{\tau_{\alpha,t}} \delta_{Y_i}$ mit $\tau_{\alpha,t} \stackrel{d}{=} Poisson(\alpha t)$.

Aufgabe 11 Sei $(N(t))_{t\geq 0}$ ein Zählprozess, für den eine stetige Ratenfunktion $\lambda : \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}_{\geq}$ existiert, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(1) $N(0) = 0$.

(2) Der Prozess hat unabängige Zuwächse..

(3) $\mathbb{P}(N(t + h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$ für $h \downarrow 0$.

(4) $\mathbb{P}(N(t + h) - N(t) \geq 2) = o(h)$ für $h \downarrow 0$.

Zeigen Sie, dass $(N(t))_{t\geq 0}$ einen inhomogenen Poisson-Prozess bildet, und bestimmen Sie dessen Mittelwertfunktion $m(t) := \mathbb{E}N(t)$.

Aufgabe 12 Sei $(N(t))_{t\geq 0}$ ein inhomogener Poisson-Prozess mit stetiger Mittelwertfunktion $\Psi : \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}_{\geq}$, die $\Psi(0) = 0$ und $\lim_{t\to\infty} \Psi(t) = \infty$ erfülle. Sei ferner $\Psi^{-1}(y) := \inf\{t \geq 0 : \Psi(t) \geq y\}$ die Pseudo-Inverse von Ψ. Zeigen Sie, dass $(N(\Psi^{-1}(t)))_{t\geq 0}$ einen homogenen Poisson-Prozess mit Intensität 1 (Standard-Poisson-Prozess) bildet.
[Hinweis: Beachten Sie, dass $\Psi^{-1}(x) \leq t$ genau dann gilt, wenn $x \leq \Psi(t)$, und dass $\Psi(\Psi^{-1}(x)) = x$.]

Aufgabe 13 Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) N ist ein gemischter empirischer Prozess, also $N \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{X_i}$ für u.i.v. Zufallsvariablen $X_1, X_2, ...$ und eine von diesen unabhängige $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsgröße τ.

(b) $\mathbb{N}(\mathcal{S}) \overset{d}{=} \tau$ und $\mathbb{P}(N \in \cdot | N(\mathcal{S}) = k) = \mathbb{P}(N_k \in \cdot)$, wobei $N_k = \sum_{i=1}^{k} \delta_{X_i}$ den empirischen Prozess bei Stichprobenumfang k bezeichnet.

(c) N ist eine Mischung der N_k bezüglich $\mathbb{P}(\tau \in \cdot)$.

Aufgabe 14 Sei $(N(t))_{t \geq 0}$ ein Zählprozess, für den eine stetige Ratenfunktion $\lambda : \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}_{\geq}$ existiert, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(1) $N(0) = 0$.

(2) Der Prozess hat unabängige Zuwächse..

(3) $\mathbb{P}(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$.

(4) $\mathbb{P}(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$.

Zeigen Sie, dass $(N(t))_{t \geq 0}$ einen inhomogenen Poisson-Prozess bildet, und bestimmen Sie dessen Mittelwertfunktion $m(t) := \mathbb{E}N(t)$.