Übungen

Abgabetermin: 12.12.2012 nach der Vorlesung

Aufgabe 6 (Kopplung) Seien $Y_1, ..., Y_n, Z_1, ..., Z_n$ stochastisch unabhängige Zufallsgrößen mit $Y_i \stackrel{d}{=} Poisson(s/n)$ und $Z_i \stackrel{d}{=} Bern(\alpha)$, wobei

$$1 - \alpha := (1 - s/n)\ \exp(s/n).$$

Setze

$$\tau_{n,s} \ := \ \sum_{i=1}^{N} Y_i \quad \text{und} \quad \beta_{n,s} \ := \ \sum_{i=1}^{n} Z_i,$$

wobei

$$X_i \ := \ \mathbf{1}_{\mathbb{N}}(Y_i) + \mathbf{1}_{\{0\}}(Y_i)\mathbf{1}_{\{1\}}(Z_i).$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\tau_{n,s} \stackrel{d}{=} Poisson(s)$.

(b) $\beta_{n,s} \stackrel{d}{=} Bin(n, s/n)$.

(c) $\mathbb{E}(\tau_{n,s} - \beta_{n,s})^2 = s^2/n$.

Aufgabe 7 (Summen unabhängiger Poissonprozesse) Zeigen Sie: Die Summe $N_0 + N_1$ von zwei unabhängigen Poisson-Prozessen N_0 und N_1 mit den Intensitätsmaßen ν_0 und ν_1 ist ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß $\nu_0 + \nu_1$.

Aufgabe 8 Zeigen Sie, dass die im Beweis von Satz 2.1.1 gegebenen Zufallsgrößen

$$N_i(B_j \cap \mathcal{S}_i), \quad i \in \mathbb{N},\ j = 1, ..., m$$

stochastisch unabhängig sind. Hierbei bezeichnen die N_i unabhängige Poisson-Prozesse mit Intensitätsmaßen $\nu(\cdot \cap \mathcal{S}_i)$ für $i \geq 1$, $(\mathcal{S}_i)_{i\geq 1}$ eine Partition von $\mathcal{S}$ in ν-endliche Mengen sowie $B_1, ..., B_m$ eine beliebige Wahl p.d. Elemente von $\mathfrak{S}$.

Aufgabe 9 (Kullback-Leibler-Abstand) Der *Kullaback-Leibler-Abstand* zwischen zwei W-Maßen Q_0 und Q_1 ist durch

$$K(Q_0, Q_1) \ = \ -\int \log(f_1/f_0)\ dQ_0$$

definiert, wobei f_i eine ν-Dichte von Q_i bezeichnet und ν ein beliebiges dominierendes Maß von Q_0, Q_1 (z.B. $\nu = Q_0 + Q_1$). Zeigen Sie, dass

(a) $K(Q_0, Q_1)$ nicht von der Wahl von ν abhängt und stets nichtnegativ ist.

(b) $H^2(Q_0, Q_1) \leq K(Q_0, Q_1)$ gilt.