Übungen

Abgabetermin: 14.11.2012 nach der Vorlesung

Aufgabe 1 N_0 und N_1 seien Punktprozesse auf $(\mathcal{S}, \mathfrak{S})$. Zeigen sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) $N_0 \stackrel{d}{=} N_1$.

(ii) Für alle $k \in \mathbb{N}$ und paarweise disjunkten $B_1, ..., B_k \in \mathfrak{S}$ gilt

$$(N_0(B_1), ..., N_0(B_k)) \ \stackrel{d}{=} \ (N_1(B_1), ..., N_1(B_k)).$$

(Dies ist Kriterium 1.1.2 der Vorlesung und die Verschärfung von Satz 1.1.1.)

Aufgabe 2 X_i und Y_i seien Zufallsgrößen auf $(\mathcal{S}, \mathfrak{S})$ mit Verteilung Q bzw. $Q(\cdot \cap D)/Q(D)$ für ein $D \in \mathfrak{S}$ mit $Q(D) > 0$. Zeigen Sie: Falls $Q(D) = m/n$, so besitzen die Punktprozesse

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}(\cdot \cap D) \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{m} \delta_{Y_i}$$

dasselbe Intensitätsmaß, jedoch verschiedene Verteilungen.

Aufgabe 3 Seien η_1, η_2 zwei unabhängige Poisson-Variablen und (τ_1, τ_2) ein Zufallsvektor derart, dass

$$\mathbb{P}((\tau_1, \tau_2) = (i, j)) \ = \ \mathbb{P}((\eta_1, \eta_2) = (i, j)) + \varepsilon_{i,j},$$

wobei $\varepsilon_{0,1} = -\varepsilon_{1,0} = \varepsilon_{2,0} = -\varepsilon_{0,2} = \varepsilon = \varepsilon_{1,2} = -\varepsilon_{2,1} = \varepsilon$ und $\varepsilon_{i,j} = 0$ sonst. Zeigen Sie: Falls $\varepsilon > 0$, so sind τ_1, τ_2 abhängige Zufallsgrößen, die

$$\tau_1 \stackrel{d}{=} \eta_1, \quad \tau_2 \stackrel{d}{=} \eta_2 \quad \text{und} \quad \tau_1 + \tau_2 \stackrel{d}{=} \eta_1 + \eta_2$$

erfüllen.

Aufgabe 4 Sei N ein Poisson-Prozess auf $\mathcal{S} = \{x_1, x_2\}$ mit Intensitätsmaß $\nu = c_1\delta_{x_1} + c_2\delta_{x_2}$. Zeigen Sie: Dann existiert ein Punktprozess N' auf $\mathcal{S}$ derart, dass

$$N(B) \stackrel{d}{=} N'(B) \quad \text{für alle } B \subset \mathcal{S},$$

aber $N \stackrel{d}{\neq} N'$ gilt. [Hinweis: Aufgabe 3].

Aufgabe 5 Sei N ein Punktprozess auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Die *obere* und *untere Leer-* oder *Vermeidungsfunkton* u bzw. l von N wird durch

$$u(x) := \mathbb{P}(N((x, \infty)) = 0) \quad \text{bzw.} \quad l(x) := \mathbb{P}(N((-\infty, x] = 0)$$

definiert. Zeigen Sie:

(a) Ist N ein Punktprozess, der von n u.i.v. Zufallsgrößen mit Verteilungsfunkton F erzeugt wird (also ein empirischer Prozess), so gilt

$$u = F^n \quad \text{und} \quad l = (1 - F)^n.$$

(b) Empirische Prozesse mit identischer Leerfunktion besitzen nicht notwendig dieselbe Verteilung.