Themen des Bachelorseminars zur Stochastik (N.N. , Paulsen)

Literatur:

1. G. Kersting, A. Wakolbinger; Stochastische Prozesse; Birkhäuser
2. L. Rüschendorf; Mathematische Statistik; Springer
   http://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-642-41997-3
3. L. Rüschendorf; Wahrscheinlichkeitsteorie; Springer
   http://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-662-48937-6
4. H. Luschgy; Martingale in diskreter Zeit; Springer
5. M. Mürmann; Wahrscheinlichkeitstheorie und stochastische Prozesse; Springer
6. Krengel; Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik; Vieweg
7. K. H. Waldmann, U.M. Stocker; Stochastische Modelle; Springer
8. Harten, Meyerthole, Schmitz; Prophetentheorie; Teubner

Die Literatur wird in den Seminarapparat der Bibliothek gestellt. Teilweise ist sie online abrufbar.

Übersicht der Themen

1. **Einführung in die Kodierungs-und Informationstheorie (Rüschendorf, Krengel)**
   Vortragender: Alexander Lappe
   Im Vortrag soll zunächst eine Einführung in die Codierungstheorie gegeben werden. Hauptziel ist die Herleitung der Ungleichung von Kraft und deren Anwendung in der Kodierungstheorie. Interessant ist der Zusammenhang zu Sortieralgorithmen. So liefert die Ungleichung von Kraft eine untere informationstheoretische Schranke für die Anzahl an Vergleichen, die ein Sortieralgorithmus im Mittel benötigt, um eine rein zufällig gewählte Liste von Zahlen zu ordnen. In der Bachelorarbeit können dann weitere Aspekte der Informationstheorie bearbeitet werden, wie etwa der Quellenkodierungssatz von Shannon. Als Literatur ist für die Ungleichung von Kraft das Buch von Krengel zu empfehlen. Eine sehr knappe, aber gute Darstellung des Quellenkodierungssatzes findet man z.B. im Buch von Rüschendorf (S. 88ff).

2. **Markov-Ketten I (Rüschendorf Kap. 3.2)**
   Vortragender: Daniel Hanhart
   In den beiden Vorträgen zu Markov-Ketten sollen die wesentlichen Inhalte der Kapitel 3.2 und 3.3 dargestellt werden. Die Vortragenden sollten sich hinsichtlich der Inhalte absprechen und am besten zusammenarbeiten. Folgendes könnte interessant sein: Eintrittszeiten und Absorptionsverhalten, Grenzwertsätze für Markov-Ketten, Reversible Ketten, Perron-Frobenius, 0-1 Gesetz von Orey, Rückkehrsatz von Kac, Rekurrenzsatz, Positive Rekurrenz und stationäre Verteilung, Elementarer Erneuerungssatz, Ergodensatz

3. **Markov-Ketten II (Rüschendorf Kap 3.3)**
   Vortragender: Samuel Karras
   In den beiden Vorträgen zu Markov-Ketten sollen die wesentlichen Inhalte der Kapitel 3.2 und 3.3 dargestellt werden. Die Vortragenden sollten sich hinsichtlich der Inhalte absprechen und

am besten zusammenarbeiten. Folgendes könnte interessant sein: Eintrittszeiten und Absorptionsverhalten, Grenzwertsätze für Markov-Ketten, Reversible Ketten, Perron-Frobenius, 0-1 Gesetz von Orey, Rückkehrsatz von Kac, Rekurrenzsatz, Positive Rekurrenz und stationäre Verteilung, Elementarer Erneuerungssatz, Ergodensatz

4. **Maße auf Produkträumen und stochastische Modelle (Rüschendorf 3.1)**
   Ein stochastischer Prozess ist eine in der Regel durch die Zeit parametrisierte Familie von Zufallsvariablen. Wie kann man eigentlich die Verteilung eines solchen stochastischen Prozesses definieren und umgekehrt wie kann man zu einer gegebenen Verteilung einen Wahrscheinlichkeitsraum und einen dort definierten stochastischen Prozess finden, dessen Verteilung mit der vorgegebenen übereinstimmt. Diese Fragestellungen sind eng verknüpft mit der Konstruktion von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf beliebigen Produkträumen. Drei Sätze sind hier von besonderer Bedeutung. Dies sind die Sätze von Anderssen-Jessen, Daniell-Kolmogorov und Ionescu-Tulcea. Diese Sätze werden im Abschnitt 3.1 des Buches von Rüschendorf vorgestellt. Im Vortrag bietet es sich vielleicht an, den Fokus auf die Konstruktion von abhängigen Modellen mit Hilfe des Kolmogorovschen Konsistenzsatzes zu legen mit der Konstruktion des Wiener-Prozesses als Anwendung. In der Bachelorarbeit kann dann entlang des Kapitels auf weitere Aspekte der Konstruktion von stochastischen Modellen eingegangen werden.

5. **Erneuerungsprozesse (Rüschendorf 3.4)**
   Vortragender: Milan Blunk
   Hat man eine Folge von Ereignissen, die zu zufälligen Zeitpunkten $0<T_1<T_2<T_3$… usw. eintreten, so kann man die bis zu einem Zeitpunkt t eingetretene Anzahl von Ereignissen durch eine Zählvariable N(t) notieren. Der so definierte Zählprozess heißt Erneuerungsprozess, wenn die Zwischenankunftszeiten unabhängig und identisch verteilt sind. Solche Prozesse haben Anwendungen in vielen Bereichen, etwa in der Warteschlangentheorie oder in der Versicherungsmathematik. Entlang des Abschnittes 3.4 des Buches von Rüschendorf soll eine Einführung in die Theorie gegeben werden. Hauptziel ist, eine Darstellung des Erneuerungssatzes sowie der Erneuerungsgleichung zu geben. In einer Bachelorarbeit kann dann weiter auf das Erneuerungstheorem und den Anwendungen der Erneuerungstheorie eingegangen werden.

6. **Stationäre Prozesse und Ergodensatz (Rüschendorf 3.5)**
   Das starke Gesetz der großen Zahlen für unabhängige Zufallsvariablen kann auch unter geeigneten Voraussetzungen auf den Fall von abhängigen Zufallsvariablen verallgemeinert werden. Eine wichtige Klasse von Prozessen, die dies erlauben, sind die zeitlich stationären Prozesse und das starke Gesetz der großen Zahlen findet seine Entsprechung im Ergodensatz. Der Vortrag soll das Konzept der Stationarität vorstellen und den Ergodensatz darstellen und beweisen. Als Literatur kann der Abschnitt 3.5 aus dem Buch von Rüschendirf verwendet werden. In einer Bachelorarbeit können die weiteren Anwendungen in dem Abschnitt präsentiert werden.

7. **Martingale in diskreter Zeit (Rüschendorf 5.2)**
   Vortragender: Julius Isken

Ein Martingal ist eigentlich die mathematische Präzisierung eines fairen Glücksspiels. Darüber hinaus spielen Martingale eine wichtige Rolle in der Theorie der stochastischen Prozesse, da häufig eine Asymptotik durch die Wahl eines geeigneten Martingals bewiesen werden kann. Im Vortrag sollen anhand des Abschnittes 5.2 von Rüschendorf Martingale in diskreter Zeit vorgestellt werden. Der Fokus sollte dabei auf den verschiedenen Varianten des Optional-Sampling Theorems und deren Anwendungen liegen. In der Bachelorarbeit können weitere Aspekte der Theorie, etwa gleichgradig integrierbare Martingale, Waldsche Gleichung usw. mit Anwendungen betrachtet werden.

8. **Martingalkonvergenzsätze (Rüschendorf 5.3)**
   Vortragender: Nick Berthold
   Im Vortrag sollen entlang des Abschnittes 5.3 aus Rüschendorf Martingalkonvergenzsätze und deren Anwendungen vorgestellt werden. Erstes Ziel ist dabei der Doobsche Konvergenzsatz. Danach können gleichgradig integrierbare Martingale, der Abschlusssatz sowie der Martingalkonvergenzsatz von Levy behandelt werden. In der Bachelorarbeit können die übrigen Resultate aus dem Abschnitt dargestellt werden, etwa inverse Martingale und deren Konvergenz usw.

9. **Grenzwertsätze für Martingale (Luschgy Kap. 5)**
   Für Martingale lassen sich ein starkes Gesetz der großen Zahlen und ein zentraler Grenzwertsatz formulieren. Im Vortrag sollte das starke Gesetz der großen Zahlen entlang des Kapitels 5.1 aus dem Buch von Luschgy bewiesen werden. Die übrigen Abschnitte des Kapitels 5 bieten Raum für eine Präsentation in einer Bachelorarbeit.

10. **Optimales Stoppen (Rüschendorf 5.4)**
    Vortragender: Timo Kröger
    Die Martingaltheorie ist ein Hilfsmittel zur Behandlung von optimalen Stoppproblemen. Dies sind stochastische Optimierungsprobleme, bei denen ein Beobachter in jedem Schritt bei einem Auszahlungsprozess diesen stoppen und die dann fällige Auszahlung akzeptieren kann oder aber diesen fortsetzt in der Hoffnung auf eine höhere zukünftige Auszahlung. Bedeutung haben optimale Stoppprobleme unter anderem in der Finanzmathematik bei der Bewertung von amerikanischen Optionen und in der Statistik bei der Herleitung on optimalen sequentiellen Tests. Entlang des Kapitels 5.4 von Rüschendorf soll in die Theorie eingeführt und einige konkrete Beispiele vorgestellt werden. Das übrige Kapitel 5.4 bietet auch Stoff für eine Bachelorarbeit.

11. **Prophetenungleichungen (Schmitz Kapitel 5)**
    Vortragender: Alexandros Chouliaras
    Zwei Akteure, ein Statistiker und ein Prophet, beobachten einen stochastischen Prozess $X_1,..,X_n$. Der Statistiker, der nicht in die Zukunft schauen kann, hat zu jedem Zeitpunkt die Möglichkeit entsprechend einer Stoppregel die Beobachtung zu stoppen und die Auszahlung zu akzeptieren. Der Prophet kann in die Zukunft schauen und erhält eine Auszahlung in Höhe des maximalen Wertes der Realisierungen. Durch die Wahl einer optimalen Stoppregel erhält der Statistiker im Mittel den Wert des Stoppproblems währen der Prophet den Erwartungswert des Maximums erhält. Mittels Prophetenungleichungen können Abschätzungen zwischen diesen beiden Werten durchgeführt werden. Im Vortrag soll das Problem vorgestellt und eine Analyse im Falle

von unabhängigen Beobachtungen durchgeführt werden. Als Vorlage kann das Kaputel 5 aus Schmitz verwendet werden.

12. **Sequentielle Testverfahren (Rüschendorf Statistik Kapitel 10)**
    Vortragender:
    In der Sequentialstatistik untersucht man Stichproben variabler Länge. Im Vortrag soll entsprechend des Kapitels 10 eine Einführung in sequentielle Tests gegeben werden. Dabei ist der SPRT und dessen Optimalität von zentraler Bedeutung.

13. **Gibbs Maße, Bildrekonstruktion und Simulated Annealing (Rüschendorf Statistik Kap. 3.3)**
    Für die Restauration und Rekonstruktion von gestörten Bildern haben sich Gibbs Maße und die damit verbundenen Gibbs Modelle als nützlich erwiesen. Im Vortrag sollen die Grundideen der dazugehörigen Bayesschen Rekonstruktionsmethode entlang des Kapitels 3.3 aus Rüschendorf vorgestellt werden.

14. **Ordnungsstatistiken und Anwendungen in der nichtparametrischen Statistik (Rüschendorf Statistik Kap. 4.3)**
    Im Vortrag soll zunächst die Suffizienz und Vollständigkeit der Ordnungsstatistik gezeigt werden. Dann sollen Anwendungen in der nichtparametrischen Statistik gegeben werden. Als Vorlage kann das Kap. 4.3 aus Rüschendorf verwendet werden.

15. **Subadditivität und Konzentrationsungleichungen (Rüschendorf 5.5)**
    Die Subadditivität von Folgen und Zufallsvariablen ist eine Eigenschaft, die es erlaubt, eine Reihe kombinatorischer Optimierungsprobleme zu behandeln. Beispiele sind unter anderem das Traveling Salesman Problem und der minimal aufspannende Baum. Mit Hilfe der Azuma Hoeffding Ungleichung kann man zeigen, dass sich geeignete stochastische Größen um den Erwartungswert konzentrieren, so dass eine Asymptotik durchgeführt werden kann. Der Vortrag soll entlang des Abschnittes 5.5 zeigen, wie diese Azuma Hoeffding Technik auf geeignete Beispiele, wie etwa längste gemeinsame Teilfolge oder Traveling Salesman Problem angewendet werden kann.

16. **Die Brownsche Bewegung (Rüschendorf 6.2)**
    Entlang des Abschnittes 6.2 aus Rüschendorf soll die Brownsche Bewegung vorgestellt werden. Die Konstruktion auf dem Raum der stetigen Pfade braucht dabei nicht durchgeführt werden. Das sogenannte Existenzproblem sollte erstmal nicht behandelt werden. Im Vortrag könnten zunächst Pfadeigenschaften, wie das Fehlen der Lipschitz-Stetigkeit und die quadratische Variation, behandelt werden. Danach kann ohne Beweis das Spiegelungsprinzip formuliert werden mit der Anwendung der Berechnung der Verteilung der First-Passage Time und des Running Maximum. Schließlich kann noch die Markov-Eigenschaft formuliert und angewendet werden.

17. **Stoppzeiten und starke Markov-Eigenschaft (Rüschendorf 6.3)**

Entlang des Kapitels 6.3 soll der Begriff der Stoppzeit für zeitstetige Prozesse eingeführt werden und die sogenannte starke Markov-Eigenschaft für die Brownsche Bewegung bewiesen werden. Anwendungen hiervon sollten den Vortrag abrunden.

18. **Skorohod'scher Einbettungssatz und Theorem von Donsker (Rüschendorf 6.5)**
    Die Skorohod'sche Einbettung beschriebt das Phänomen, dass jede zentrierte quadratintegrierbare reelle Zufallsvariable X in einer Brownschen Bewegung wiederzufinden ist, denn man kann eine Stoppzeit finden, so dass die Verteilung der gestoppten Brownschen Bewegung mit der der Zufallsvariablen X übereinstimmt. Durch Iteration kann man dies auf eine iid Folge von Zufallsvariablen verallgemeinern. Relativ einfach kann so das starke Gesetz der großen Zahlen und der Satz vom iterierten Logarithmus bewiesen werden. Diese Sachverhalte können entlang des Abschnittes 6.5 aus dem Buch von Rüschendorf vorgestellt werden. In einer Bachelorarbeit können dann als weitere Anwendung das Donskersche Invarianzprinzip vorgestellt werden.

19. **Diskriminanzanalyse und Klassifikation (Dümbgen Kapitel 12)**
    Das Grundproblem einer Klassifikation besteht darin, einem beobachteten zufälligen Merkmal eine Musterklasse zuzuordnen. Die automatische Erkennung einer Handschrift oder einer Sprache sind typische Anwendungsfelder. Aber auch die Entscheidung, ob ein Unternehmen in einem bestimmten Zeitraum insolvent wird, kann als Klassifikationsproblem aufgefasst werden. Entlang des Kapitels 12 aus Dümbgen sollen statistische Mehoden vorgestellt werden, die bei solchen Klassifikationsproblemen eingesetzt werden.