Prof. Dr. Z. Kabluchko
Hendrik Flasche

Sommersemester 2016
18. April 2016

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 1

Abgabe: 25. April 2016

Aufgabe 1 (4+1 Punkte)

Das Wetter sei entweder sonnig (Zustand 0) oder regnerisch (Zustand 1). Ist das Wetter sonnig, so bleibt es stets auch am nächsten Tag sonnig mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ oder es wird am nächsten Tag regnerisch mit Wahrscheinlichkeit p. Ist das Wetter regnerisch, so bleibt es stets am nächsten Tag regnerisch mit Wahrscheinlichkeit $1-q$ oder es wird am nächsten Tag sonnig mit Wahrscheinlichkeit q, wobei $p, q \in [0,1]$, $p+q \neq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass die n-Schritt-Übergangsmatrix der dazugehörigen Markow-Kette gegeben ist durch

$$P^n = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix} + \frac{(1-p-q)^n}{p+q}\begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Induktion über n.

(b) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} P^n = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Ein Haus besteht aus 5 Räumen, A, B, C, D, E. Raum C ist direkt mit allen übrigen Räumen des Hauses verbunden. Die Räume A und B sind ebenfalls direkt miteinander verbunden, ebenso wie die Räume D und E. Darüber hinaus gibt es keine direkten Verbindungen. Eine Katze bewegt sich nun folgendermaßen durch das Haus:
Nach einem als konstant angenommenen Aufenthalt in einem Raum läuft sie zufällig in einen angrenzenden Raum, wobei alle Räume, die mit ihrem aktuellen Aufenthaltsort direkt verbunden sind, für die Katze mit gleicher Wahrscheinlichkeit in Frage kommen. Befindet sich die Katze beispielsweise in B, so läuft sie nach A oder C jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$.
Berechnen Sie die eindeutige invariante Verteilung der dazugehörigen Markow-Kette.

Aufgabe 3 (1+2+2 Punkte)

Drei Mädchen A, B and C spielen Tischtennis. In jedem Spiel spielen zwei der Mädchen gegeneinander, während ein Mädchen jeweils aussetzt. Im $(n+1)$-ten Spiel tritt die Gewinnerin von Spiel n gegen diejenige an, die im Spiel n ausgesetzt hat. Die Wahrscheinlichkeit, dass Spielerin x Spielerin y schlägt sei für jedes Spiel identisch und gegeben durch

$$\frac{s_x}{s_x+s_y}, \quad \text{wobei } x, y \in \{A, B, C\},\ x \neq y.$$

$s_A, s_B, s_C > 0$ stehen hierbei für die „Spielstärken“ der Spielerinnen. Sei X_n das Mädchen, welches *nicht* am n-ten Spiel teilnimmt.

(a) Konstruieren Sie die Übergangsmatrix der zugehörigen Markow-Kette.

(b) Angenommen, die Spielerinnen A und B beginnen das erste Spiel. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die gleichen Spielerinnen im vierten Spiel ebenfalls gegeneinander antreten. Zeigen Sie, dass diese Wahrscheinlichkeit unabhängig davon ist, wer am ersten Spiel teilnimmt.

(c) Berechnen Sie die eindeutige invariante Verteilung dieser Markow-Kette.

Aufgabe 4 (2+1+3 Punkte)

Seien P und Q zwei stochastische $n \times n$ Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass auch PQ eine stochastische Matrix ist.

(b) Zeigen Sie, dass für $\alpha \in [0, 1]$ auch die konvexe Kombination $\alpha P + (1 - \alpha)Q$ eine stochastische Matrix ist.

(c) Die Menge S aller stochastischen Matrizen ist somit eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^{n^2}$. Eine Matrix $P \in S$ heißt Eckpunkt von S, wenn es keine Darstellung der Form $P = (P_1 + P_2)/2$ mit $P_1, P_2 \in S$ und $P_1 \neq P$, $P_2 \neq P$ gibt. Beschreiben Sie alle Eckpunkte von S.