Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2016

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 08** **07.06.2016**

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Sei X ein quadrierter Besselprozess mit Dimension $\delta = 0$ und Startpunkt $x_0 > 0$, also eine Lösung der Gleichung

$$dX_t = 2\sqrt{X_t}dW(t), X_0 = x_0.$$

Zeigen Sie, dass für die Stoppzeit $\tau = \inf\{t \geq 0 : X_t = 0\}$ gilt

$$\mathbb{P}(\tau \leq T) = \exp(-\frac{x_0}{2T}).$$

Hinweis: Nutzen Sie die Kenntnis über die Laplacetransformierte von X_T aus.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Seien X_1 und X_2 stochastisch unabhängige, quadrierte Besselprozesse der Dimensionen δ_1 bzw. δ_2 zu den Startwerten x_1 bzw. x_2. Zeigen Sie, dass $X_1 + X_2$ ein quadrierter Besselprozess der Dimension $\delta = \delta_1 + \delta_2$ zum Startwert $x_1 + x_2$ ist.

Hinweis: Satz von Levy

Aufgabe 3: 4 Punkte

Sei Y ein CIR Prozess der Form

$$dY_t = q(m - Y_t)dt + \sigma\sqrt{Y_t}dW(t)$$

zum Anfangswert $y_0 > 0$ mit $q > 0, m > 0, \sigma > 0$.

Die Laplacetransformierte von Y_T ist gegeben durch

$$L(T, \lambda) = \big(\frac{q}{\frac{1}{2}\sigma^2\lambda(1 - e^{-qT}) + q}\big)^{\frac{2mq}{\sigma^2}} \exp(-x\frac{\lambda q e^{-qT}}{\frac{1}{2}\sigma^2\lambda(1 - e^{-qT}) + q})$$

Zeigen Sie, dass die Verteilung von Y_T für $T \to \infty$ gegen eine $\Gamma(\frac{2mq}{\sigma^2}, \frac{\sigma^2}{2q})$ Verteilung konvergiert.

Hinweis: Es genügt, die punktweise Konvergenz der Laplacetransformierten nachzuweisen.

Aufgabe 4: 4 Punkte

In einem CEV Modell genügt die Aktienpreisentwicklung der stochastischen Differentialgleichung

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma S(t)^\beta dW(t))$$

zu einem Anfangswert $S(0) = s_0 > 0$. Hierbei sind $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0, \beta > 0$ Parameter des Modells. Zeigen Sie, dass die Verteilung von $S(t)$ durch die Verteilung einer zeittransformierten Potenz des Besselprozesses angegeben werden kann. Genauer: Ist X ein quadrierter Besselprozeß der Dimension $\delta = 2 + \frac{1}{\beta}$ zum Startwert s_0 und ist $\eta(t) = \frac{\beta\sigma^2}{2\mu}(e^{2\mu\beta t} - 1)$, so gilt, dass die Verteilung von $S(t)$ mit der von $e^{\mu t} X(\eta(t))^{-\frac{1}{2\beta}}$ übereinstimmt.

Abgabe: Mo 13.Juni.2016 bis spätestens 10.00 im Fach 145