Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2016

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 07** **31.05.2016**

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Gegeben sei ein arbitragefreies Black-Scholes Modell mit deterministischer zeitabhängiger Volatilität σ und deterministischer zeitabhängiger Zinsrate r. Bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes erfüllt der Aktienpreisprozeß also die Dynamik

$$dS(t) = S(t)(r(t)dt + \sigma(t)dW^*(t))$$

mit Anfangskurs $S_0 = x > 0$.

1. Berechnen Sie den Preis eines digitalen Calls, der zum Zeitpunkt T die Auszahlung 1 liefert, wenn der Aktienpreis in T die Basis $K > 0$ überschreitet.
2. Berechnen Sie den Preis eines entsprechenden digitalen Puts, der zum Zeitpunkt T die Auszahlung 1 liefert, wenn der Aktienpreis die Basis $K > 0$ unterschreitet.
3. Berechnen Sie für beide Optionen die jeweilige Replikationsstrategie.
4. Wie kann für eine Funktion $h : (0, \infty) \to (0, \infty)$ mit $\mathbb{E}^* h(S_T) < \infty$ der Preis eines Derivates mit Auszahlung $h(S_T)$ durch die Preise von digitalen Optionen ausgedrückt werden.

Aufgabe 2: Forward Start Option 4 Punkte

Wir betrachten das Black-Scholes Modell aus Aufgabe 1. Eine forward start option gibt deren Inhaber das Recht zum Zeitpunkt $T_0 < T_1$ ohne Einsatz von Kapitel einen Call mit Fälligkeit T_1 und Basis $S(T_0)$ zu erwerben.

1. Geben Sie den arbitragfreien Preisprozeß dieser Option an.
2. Wie können Sie diese Option replizieren?

Aufgabe 3: 4 Punkte

Der Vasicek Prozess ist Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dr(t) = b(a - r(t))dt + \sigma dW(t) \quad , r(0) = r_0 > 0$$

mit $a, b, \sigma > 0$.

Bestimmen Sie für $t > 0$ die Verteilung von $\int_0^t r(s)ds$.

Hinweis: Betrachten Sie die zur obigen Differentialgleichung gehörige Integralgleichung und nutzen Sie aus, dass die Differentialgleichung explizit gelöst werden kann.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Wir betrachten ein Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten bezüglich einer Aktie. Bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$ erfüllt der Aktienpreis also die Dynamik

$$dS(t) = S(t)(rdt + \sigma dW^*(t)) \qquad S(0) = S_0 > 0$$

für $0 \leq t \leq T$, wobei $r \in \mathbb{R}$ die konstante Zinsrate und $\sigma > 0$ die konstante Volatilität bezeichnen. Den Anfangspreis eines Calls bzw. Puts mit Basis K und Laufzeit T bezeichnen wir mit $C(K,T)$ bzw. $P(K,T)$. Der sogenannten Forwardpreisprozeß M der Aktie zum Termin T ist definiert durch

$$M_t = S_t e^{r(T-t)}$$

für alle $0 \leq t \leq T$.

Definiere das sogenannte Aktienmartingalmaß $\mathbb{M}$ durch

$$\frac{d\mathbb{M}}{d\mathbb{P}^*}|_{\mathfrak{F}_T} = \frac{M(T)}{M(0)}.$$

Zeigen Sie:

1. Die Verteilung von $\frac{M_T}{M_0}$ unter $\mathbb{P}^*$ ist gleich der Verteilung von $\frac{M_0}{M_T}$ unter $\mathbb{M}$
2. Folgern Sie hieraus die nicht offensichtliche Symmetrie von Carr, welche lautet

$$C(K,T) = \frac{K}{M_0} P(\frac{M_0^2}{K}, T)$$

Abgabe: Mo 06.Juni.2016 bis spätestens 10.00 im Fach 145