# Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

**Sommersemester 2016**

**PD Dr. V. Paulsen** **Blatt 06** **24.05.2016**

**Aufgabe 1:** **4 Punkte**

Gegeben sei ein eindimensionales Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten. Wir bezeichnen mit $(S_t)$ den Aktienpreisprozeß und betrachten eine Call-Option mit Laufzeit $T$ zur Basis $K$, die entsprechend ihrem arbitragefreien Preisprozeß

$$C(t) = e^{r(t-T)}\mathbb{E}^*((S_T - K)^+ | \mathfrak{F}_t)$$

für alle $0 \leq t \leq T$ gehandelt werden kann.

1. Welche stochastische Differentialgleichung erfüllt $(C(t))_{0 \leq t \leq T}$.
2. Wie kann durch einen Handel in Aktie und Call-Option das Geldmarktkonto repliziert werden?

**Aufgabe 2:** Exchange Option 4 Punkte

Wir betrachten einen Finanzmarkt mit zwei risky assets $S_1, S_2$, deren Preisprozesse die folgenden stochastischen Differentialgleichungen erfüllen.

$$dS_i(t) = S_i(t)\sigma_i dW_i(t)$$

bei positiven Anfangswerten $S_i(0)$ für $i = 1, 2$ und $0 \leq t < T$ mit positiven Konstanten $\sigma_1, \sigma_2$. Für die Aufgabe nehmen wir an, dass die Zinsrate $r$ des Geldmarktkontos die Bedingung $r(t) = 0$ erfüllt. Das subjektive Maß ist also schon ein äquivalentes Martingalmaß. Weiter sind die beiden Wiener-Prozesse korreliert mit Korrelationsrate $\rho \in (-1, 1)$, i.e.

$$\langle W_1, W_2 \rangle_t = \rho t$$

für alle $t \geq 0$.

Wir betrachten eine Exchange-Option, die in $T$ die Auszahlung $C = (S_1(T) - S_2(T))^+$ liefert.

1. Berechnen Sie den arbitragefreien Preisprozeß der Exchange Option, indem Sie

$$v(t, x) = \mathbb{E}(C | S_1(t) = x_1, S_2(t) = x_2)$$

für alle $0 \leq t < T$, $x = (x_1, x_2) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ bestimmen.

2. Welche partielle Differentialgleichung erfüllt $v$

3. Bestimmen Sie eine Replikationsstrategie für $C$.

**Aufgabe 3:** 6 Punkte

Seien $W$ ein Wiener-Prozeß auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_{0\leq t\leq T}, \mathbb{P})$ und $S$ eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dS(t) = S(t)(\mu(t)dt + \sigma(t)dW(t))$$

für alle $0 \leq t < T$ bei einem Anfangswert $S(0) > 0$. Sei weiter $\mathbb{P}^*$ ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß mit Dichtequotientenprozess

$$L_t = \exp(-\int_0^t \theta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(s)ds$$

für alle $0 \leq t \leq T$ für einen vorhersehbaren Prozess $\theta$, der $\int_0^T \theta^2(s)ds < \infty$ erfüllt. Schließlich sei $S^*(t) = \exp(-\int_0^t r(s)ds)S(t)$ definiert für alle $0 \leq t < T$ mit $r(t) = \mu(t) - \theta(t)\sigma(t)$.

1. Bestimmen Sie einen vorhersehbaren Prozess $H(t)_{0\leq t<T}$ und ein Anfangskapital $V_0$, so dass
$$\frac{1}{L_T} = V_0 + \int_0^T H(t)dS^*(t)$$
gilt.

2. Ist $\theta$ eine deterministische Funktion, so bestimmen Sie für $\gamma > 0$ einen vorhersehbaren Prozess $H(t)_{0\leq t<T}$ und ein Anfangskapital $V_0$, so dass
$$\frac{1}{L_T^\gamma} = V_0 + \int_0^T H(t)dS^*(t)$$
gilt.
Hinweis: Was für eine Bedeutung hat $(\frac{1}{L(t)})$ für $\mathbb{P}^*$. Was ist $\mathbb{E}^*((\frac{1}{L(t)})^\gamma|\mathfrak{F}_t)$.

**Abgabe:** Mo 30.5.2016 bis spätestens 10.00 im Fach 145