Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2016

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 05** **11.05.2016**

Aufgabe 1: **4 Punkte**

1. Geben Sie in einem Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten einen Claim C, eine zulässige Handelsstrategie H und ein Anfangskapital V_0 an, so dass

$$C^* = V_0 + \int_0^T H(t)dS^*(t)$$

gilt, aber H keine Replikationsstrategie für C ist.

2. Geben Sie einen Finanzmarkt an, in dem ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ existiert, so dass der abdiskontierte Preisprozeß $(S^*(t))$ kein gleichgradig integrierbares Martingal ist.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Wir betrachten ein Finanzmarktmodell für eine Aktie, dass durch zwei unabhängige Wiener-Prozesse getrieben wird und nehmen an, dass der Aktienpreisprozeß eine stochastische Differentialgleichung der Form

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma_1 dW_1(t) + \sigma_2 dW_2(t))$$

mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$ erfüllt. Weiter wird angenommen, dass es einen konstanten Geldmarktzins $r > 0$ gibt. Damit entwickelt sich das Geldmarktkonto also entsprechend $\beta(t) = \exp(rt)$ für alle $t \geq 0$. Weiter fixieren wir einen Handelszeitraum $[0, T)$.

1. Wieso ist das Modell arbitragefrei?
2. Wieso ist das Modell nicht vollständig?
3. Geben Sie einen replizierbaren Claim und eine Replikationsstrategie an.
4. Geben Sie einen Claim an, der nicht replizierbar ist.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Gegeben sei eine Wienerfiltration eines n-dimensionalen Wienerprozesses über einen Handelszeitraum $[0, T)$, ein Bankkontoprozeß β der Form

$$\beta(t) = \exp(\int_0^t r(s)ds)$$

und ein positiver Aktienpreisprozeß $(S(t))_{0\leq t\leq T}$ mit stetigen Pfaden, so dass die Voraussetzungen an einen Finanzmarkt der Vorlesung erfüllt sind.

Wir nehmen an, dass ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ existiert und das der abdiskontierte Preisprozeß $(S^*(t))$ ein gleichgradig integrierbares Martingal ist bezüglich $\mathbb{P}^*$.

Zeigen Sie, dass es zu $\mathbb{P}^*$ äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}_1^*, \mathbb{P}_2^*$ gibt mit

$$\mathbb{E}^* \frac{(S(T)-K)^+}{\beta(T)} = S(0)\mathbb{P}_1^*(S(T)>K) - KB(0,T)\mathbb{P}_2^*(S_T>K),$$

wobei $B(0,T) = \mathbb{E}^*\beta(T)^{-1}$.

Welche Bedeutung hat $\mathbb{P}_1^*$?

Aufgabe 4: 4 Punkte

Wir betrachten einen Finanzmarkt, der von einem eindimensionalen Wiener-Prozess W getrieben wird. Der Preisprozess des risky assets genügt der stochastischen Differentialgleichung

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \overline{\sigma} dW(t))$$

mit Anfangswert $S(0) > 0$ und der Preisprozess des Numeraire Assets der stochastischen Differentialgleichung

$$dN(t) = N(t)(r dt + \sigma_N dW(t)).$$

Die Koeffizienten des Marktes sein hierbei reelle Konstanten $\mu, r, \overline{\sigma}, \sigma_N$.

In dem Markt existiere ein eindeutiges äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{P}^*$. Damit folgt also

$$\sigma = \overline{\sigma} - \sigma_N \neq 0$$

.

Berechnen Sie den arbitragefreien Anfangspreis

1. einer Nullkouponanleihe mit Fälligkeit T,
2. einer Calloption auf die Aktie mit Basis K,
3. einer Putoption auf die Aktie mit Basis K.

Dabei entspricht eine Nullkouponanleihe dem T-Claim $C = 1$, die Calloption dem T-Claim $C = (S(T)-K)^+$ und die Putoption dem T-Claim $(K - S(T))^+$.

Abgabe: Die. 17.5.2016 bis spätestens 10.00 im Fach 145