Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2016

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 04** **02.05.2016**

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Beweisen Sie die Rückrichtung in Satz 1.5 für $n = 1 = d$. Zeigen Sie also, dass der Wertprozess einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie, notiert in Anteilen des Numeraire Assets, eine Entwicklung der Form

$$V^*(t) = V^*(0) + \int_0^t H(u) dS^*(u)$$

für alle $0 \leq t < T$ hat.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Sei $T > 0$ und W ein Wiener-Prozess bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{0 \leq t < T}$. Sei $f : [0, T) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\int_0^t f^2(u) du < \infty$ für alle $0 \leq t < T$. Definiere das Martingal M durch

$$M(t) = \int_0^t f(u) dW(u)$$

für alle $0 \leq t < T$.

Zeigen Sie, dass mit Wahrscheinlichkeit 1 das Martingal M jedes $a \in \mathbb{R}$ vor T erreicht. Was passiert, wenn $\int_0^T f^2(u) du < \infty$ gilt.

Hinweis: Es gibt mindestens zwei Möglichkeiten zu argumentieren. Mittels einer Zeittransformation kann mit Hilfe von M ein Wiener-Prozess auf $[0, \infty)$ konstruiert werden. Da der Wiener-Prozess jeden Punkt in endlicher Zeit erreicht, muss auch M jeden Punkt vor T erreichen. Als zweite Möglichkeit kann man den Beweis der Aussage für den Wiener-Prozess auch für M imitieren.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Gegeben sei ein eindimensionales Black-Scholes Modell mit Koeffizienten $\mu, r \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$. Es gilt also

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW(t))$$

und $\beta(t) = e^{rt}$ für alle $0 \leq t < T$.

Zeigen Sie, dass es Arbitragemöglichkeiten in diesem Modell gibt.

Hinweis: In der Vorlesung ist dies für $\mu = r$ gezeigt worden. Durch ein einfaches Argument kann man obige Aussage auf diesen Fall zurückführen.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Wir betrachten einen Finanzmarkt, der von einem eindimensionalen Wiener-Prozess W getrieben wird. Der Preisprozess des risky assets genügt der stochastischen Differentialgleichung

$$dS(t) = S(t)(\mu(t)dt + \sigma(t)dW(t))$$

mit Anfangswert $S(0) > 0$ und der Preisprozess des Numeraire Assets der stochastischen Differentialgleichung

$$dN(t) = N(t)(r(t)dt + \sigma_N(t)dW(t)).$$

Die Koeffizienten des Marktes sein hierbei deterministische Funktionen μ, r, σ, σ_N.

Wann existiert in diesem Markt ein äquivalentes Martingalmaß und wann ist dies eindeutig?

Abgabe: Mon. 09.5.2016 bis spätestens 14.00 im Fach 145