Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2016

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 11** **28.06.2016**

Aufgabe 1: Exchange Option 4 Punkte

In einem arbitragefreien short rate Modell betrachten wir zwei Bonds mit Fälligkeiten T_1, T_2. Die Exchange Option gibt dem Inhaber das Recht, den T_1-Bond gegen den mit Fälligkeit T_2 zu tauschen zum Zeitpunkt $T < \min\{T_1, T_2\}$. Dies entspricht also einem Claim mit der Auszahlung

$$(B(T,T_1) - B(T,T_2))^+$$

zum Zeitpunkt T.

Geben Sie einen Ansatz zur Bewertung der Exchange Option an. Was für ein Preis ergibt sich im Vasicek Modell?

Aufgabe 2: Hull White Modell 4 Punkte

In einem Hull White Modell wird für die short rate eine Dynamik der Form

$$dr(t) = b(a(t) - r(t))dt + \delta dW^*(t)$$

mit Anfangsrate $r(0) = r_0 \in \mathbb{R}$ angenommen. Dabei sind b, δ positive Konstanten und a eine stetige positive Koeffizientenfunktion.

1. Lösen Sie die obige stochastische Differentialgleichung. Welche Verteilung hat $r(t)$?

2. Bestimmen Sie die partielle Differentialgleichung, die die Preisfunktion eines T-Bonds erfüllt.

3. Reduzieren Sie die partielle Differentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen durch den Ansatz

   $$B(t,T) = \exp(-h(t,T) - g(t,T)r(t))$$

   und bestimmen Sie die Funktionen g, h.

Aufgabe 3: Das Ho Lee Modell 4 Punkte

Im Ho Lee short rate Bondmarkt Modell postuliert man für die short rate $r(t)$ eine Dynamik der Form

$$dr(t) = \theta(t)dt + \delta dW^*(t)$$

mit Anfangsrate $r(0) = r_0$ bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes. Es wird angenommen, dass $\delta > 0$ ist und dass die Koeffizientenfunktion auf jedem endlichen Intervall integrierbar ist.

1. Bestimmen Sie eine Lösung der obigen stochastischen Differentialgleichung.
2. Bestimmen Sie $\mathbb{E}r(t)$ und $\operatorname{Var} r(t)$ für alle $t \geq 0$.
3. Bestimmen Sie den Bondpreis $B(t, T)$ zur Fälligkeit T für alle $t \leq T$ und dessen Dynamik.

Abgabe: Mo 4.Juli.2016 bis spätestens 10.00 im Fach 145