Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2015

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 01** **13.04.2015**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Seien $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozeß bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ und $\sigma : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion mit $\int_0^t \sigma^2(s)ds < \infty$ für alle $t \geq 0$. Zeigen Sie:

1. Durch
$$M(t) = \exp(\int_0^t \sigma(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s))ds$$
für alle $t \geq 0$ wird ein Martingal definiert. Hinweis: Welche stochastische Differentialgleichung erfüllt M

2. Es gilt
$$\mathbb{E}(\exp(\lambda \int_t^{t+h} \sigma(s)dW(s))|\mathfrak{F}_t) = \exp(\frac{1}{2}\lambda^2 \int_t^{t+h} \sigma^2(s)ds)$$
für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $t, h \geq 0$.

3. Folgern Sie aus dem obigen, dass $\int_t^{t+h} \sigma(s)dW(s)$ eine von $\mathfrak{F}_t$ normalverteilte Zufallsvariable ist mit Mittelwert 0 und Varianz $\int_t^{t+h} \sigma^2(s)ds$.

Damit hat man gezeigt, dass $\int_0^t \sigma(s)dW(s)$, $t \geq 0$ ein stochastischer Prozess mit unabhängigen normalverteilten Zuwächsen ist. Der obige Beweis stellt eine elegante Alternative zum Vorgehen in der Vorlesung Stochastische Analysis dar.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Lösen Sie explizit für einen Wiener-Prozess W die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = (\sqrt{1 + X_t^2} + \frac{1}{2}X_t)dt + \sqrt{1 + X_t^2}dW_t$$

zu einer beliebigen Anfangsbedingung ζ.

Hinweis: Explizite Lösungen von nichtlinearen stochastischen Differentialgleichungen sind selten. Da es keine wirklichen Lösungsverfahren gibt, wie etwa bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen, kann man eigentlich nur durch Probieren zum Erfolg kommen. Der einfachste Weg, eventuell zum Ziel zu kommen, besteht darin, einen Ansatz der Form $X_t = f(t, W_t)$ zu wählen und dann die Ito-Formel anzuwenden. Die Funktion f ist dann natürlich zu bestimmen. Man erkennt sehr leicht eine gewöhnliche Differentialgleichung, die $f(t, x)$ als Funktion von x erfüllen muss. Durch eine Separation der Variablen kann diese gewöhnliche Differentialgleichung gelöst werden. Schaut man sich nochmals die Terme in der Ito-Formel an, so erkennt man, wie die von t abhängigen Konstanten in der Lösung zu wählen sind.

Abgabe: Die. 19.04.2016 bis spätestens 10.00 im Fach 145