Übungen

Abgabetermin: Freitag, 19.6.2015, 10 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sie möchten den Anteil der Raucher p einer sehr großen Bevölkerung schätzen. Dazu befragen Sie eine Stichprobe von n Bürgern, wobei die Auswahl der Bürger der Einfachheit halber als Ziehen *mit* Zurücklegen angesehen werden kann. Sie schätzen p durch das Stichprobenmittel

$$\hat{p} = \frac{S_n}{n},$$

wobei S_n die Anzahl der Raucher in der Stichprobe angebe. Sie möchten, dass $\hat{p}$ von p nur mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5 % um mehr als 0.01 abweicht.
Wie groß muss die Stichprobe mindestens sein, damit dies für jeden Wert von p der Fall ist?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Eine Gruppe von n Personen hat sich zu einer Fahrradtour verabredet; man trifft sich am Sonntagmorgen zwischen 9 und 10 Uhr und fährt dann gemeinsam los. Die Personen treffen unabhängig voneinander ein und zwar jeweils zu einem in der verabredeten Stunde gleichverteilten Zeitpunkt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fährt die Gruppe vor 9:45 Uhr los? Bestimmen Sie die Verteilung des Zeitpunkts der Abfahrt der Gruppe.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Man kann den Erwartungswert und die Varianz einer hypergeometrischen Verteilung mit den Parametern r,s und n auch mithilfe von Indikatorvariablen ausrechnen. Wir ziehen also ohne Zurücklegen n Kugeln aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln und die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der roten Kugeln in der Stichprobe.

(i) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X_i)$ und $\mathbb{E}(X_i X_j)$ für $1 \leq i \neq j \leq r$, wobei X_i die Indikatorvariable für das Ereignis ist, dass sich die i-te rote Kugel in der Stichprobe befindet.

(ii) Berechnen Sie mithilfe der $X_1, \ldots, X_r$ nun $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{V}(X)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Die Zufallsvariablen $X_1, \dots$ seien unabhängig und identisch Bernoulli-verteilt mit Parameter $p \in (0,1)$. Wir definieren die Zufallsvariablen Z_n, $n \in \mathbb{N}$, durch

$$Z_n := X_n \cdot X_{n+1}.$$

Zeigen Sie, dass $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einem schwachen Gesetz der großen Zahlen genügt, d.h., dass ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$\overline{Z}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i$$

in Wahrscheinlichkeit gegen a konvergiert (d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|\overline{Z}_n - a| > \varepsilon\right) = 0$$

für alle $\varepsilon > 0$.)