Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2015

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 08** **02.06.2015**

Aufgabe 1: Put Call Symmetrie von Carr 4 Punkte

Wir betrachten ein Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten bezüglich einer Aktie. Bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$ erfüllt der Aktienpreis also die Dynamik

$$dS(t) = S(t)(rdt + \sigma dW^*(t)) \qquad S(0) = S_0 > 0$$

für $0 \le t \le T$, wobei $r \in \mathbb{R}$ die konstante Zinsrate und $\sigma > 0$ die konstante Volatilität bezeichnen. Den Anfangspreis eines Calls bzw. Puts mit Basis K und Laufzeit T bezeichnen wir mit $C(K,T)$ bzw. $P(K,T)$. Der sogenannten Forwardpreisprozeß M der Aktie zum Termin T ist definiert durch

$$M_t = S_t e^{r(T-t)}$$

für alle $0 \le t \le T$.

Definiere das sogenannte Aktienmartingalmaß $\mathbb{M}$ durch

$$\frac{d\mathbb{M}}{d\mathbb{P}^*}|_{\mathfrak{F}_T} = \frac{M(T)}{M(0)}.$$

Zeigen Sie:

1. Die Verteilung von $\frac{M_T}{M_0}$ unter $\mathbb{P}^*$ ist gleich der Verteilung von $\frac{M_0}{M_T}$ unter $\mathbb{M}$
2. Folgern Sie hieraus die nicht offensichtliche Symmetrie von Carr, welche lautet

$$C(K,T) = \frac{K}{M_0} P(\frac{M_0^2}{K}, T)$$

Aufgabe 2: Put Carr Symmetrie bei lokaler Volatilität 4 Punkte

Anstelle des Black-Scholes Modells in Aufgabe 1 wird eine Aktie mit lokaler Volatilität betrachtet, i.e.

$$dS(t) = S(t)(rdt + \sigma(t, S_t))dW^*(t)$$

bezüglich eines äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$.

Wir nehmen an, dass für jedes $0 \le t < T$ und jedes $x > 0$ gilt

$$\sigma(t, xS_0e^{rt}) = \sigma(t, \frac{1}{x}S_0e^{rt}).$$

Zeigen Sie, dass dann auch die Symmetrie von Carr gilt, i.e.

$$C(K,T) = \frac{K}{M_0} P(\frac{M_0^2}{K}, T)$$

Aufgabe 3: 4 Punkte

Wir betrachten einen Finanzmarkt mit Informationsverlauf gegeben durch zwei unabhängige Wiener-Prozesse W_1, W_2 und nehmen an, dass unter einem subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß P die augenblickliche Zinsrate eines Geldmarktkontos sich entwickelt entsprechend

$$dr(t) = b(a - r(t))dt + \delta dW_1(t) \quad , r(0) = r_0 > 0$$

mit $a, b, \delta > 0$.

Das Geldmarktkonto entwickelt sich also entsprechend

$$\beta(t) = \exp(\int_0^t r(s)ds)$$

für alle $t \geq 0$.

Weiter ist in diesem Finanzmarkt eine Aktie mit Preisprozeß $S(t)$ gegeben durch

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW_2(t)) \quad , S(0) = x_0 > 0$$

mit $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$.

1. Ist das Modell arbitragefrei?
2. Ist gegebenenfalls das äquivalente Martingalmaß eindeutig?
3. Führen Sie einen Maßwechsel zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^*$ durch, so dass die Dynamik der Zinsrate r erhalten bleibt und die der Aktie gegeben ist durch

   $$dS(t) = S(t)(r(t)dt + \sigma dW_2^*(t))$$

   mit Wiener-Prozeß W_2^* bezüglich $\mathbb{P}^*$.
4. Berechnen Sie für eine Call-Option mit Laufzeit T

   $$\mathbb{E}^* \frac{(S(T) - K)^+}{\beta(T)}.$$

Abgabe: Die. 09.06.2015 bis spätestens 11.00 im Fach 145