Musterlösung zur ersten Klausur
Stochastik für Lehramtskandidaten SS2012

Aufgabe 1

In einer Urne befinden sich $2n$ Kugeln, $n \in \mathbb{N}$, die von 1 bis $2n$ durchnummeriert sind. Die Kugeln mit den Nummern 1 bis n sind dabei rot gefärbt, die restlichen Kugeln schwarz. Es werden k Kugeln zufällig und ohne Zurücklegen gezogen, $1 \leq k \leq n$.

(a) Modellieren Sie die Situation zunächst unter Angabe eines geeigneten endlichen Wahrscheinlichkeitsraums (Ω, P).

(b) Charakterisieren Sie die folgenden Ereignisse als Teilmengen von Ω, und bestimmen Sie deren Wahrscheinlichkeiten:

A: Die gezogenen Kugeln sind alle von einer Farbe;

B: die k gezogenen Kugeln haben fortlaufende Nummern, wenn sie nach dem Ziehen aufsteigend sortiert werden;

C: die gezogenen Kugeln haben fortlaufende Nummern (wie in B) und sind von einer Farbe.

(c) Betrachten Sie den Fall $n = 3$ und $k = 2$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Ereignisse A und B abhängig sind.

(d) *Geben Sie eine Kombination von n und k an, bei der die Ereignisse A und B unabhängig sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: (1) Eine richtige Lösung der letzten Teilaufgabe gibt einen Zusatzpunkt. (2) Mit fortlaufenden Nummern ist eine Folge der Art: $i, i+1, i+2, \ldots$ für $i \in \mathbb{N}$ gemeint.

Lösung zu Aufgabe 1

Ziehen mit Reihenfolge

(a) Wir ziehen die Kugeln ohne Zurücklegen aber mit beachten der Reichenfolge. Daher ist

$$\Omega = \{(\omega_1, \ldots, \omega_k) \in \{1, \ldots, 2n\}^k \mid \omega_i \neq \omega_j \forall\ i \neq j, i, j \in \{1, \ldots, k\}\}.$$

Damit ist $|\Omega| = 2n \cdot (2n-1) \ldots (2n-k+1) = \frac{2n!}{(2n-k)!}$, da man für die erste Kugel $2n$ Möglichkeiten, für die zweite Kugel nur noch $2n-1$ viele Möglichkeiten usw. hat. P ist die Laplaceverteilung auf Ω, sprich

$$P(\{\omega\}) = \frac{(2n-k)!}{2n!}$$

für alle $\omega \in \Omega$.

(b) Sei $M(\omega) = \max\{\omega_i : 1 \leq i \leq k\}$ und $m(\omega) = \min\{\omega_i : 1 \leq i \leq k\}$. Da die ersten n Kugeln rot und die restliche Kugeln schwarz sind, ist

$$A = \{\omega \in \Omega \mid M(\omega) \leq n \quad \text{oder} \quad m(\omega) > n\}$$
$$B = \{\omega \in \Omega \mid M(\omega) - m(\omega) = k-1\}$$
$$C = A \cap B.$$

Kommen wir zu den Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse. Die erste Kugel in A legt die Farbe der anderen Kugeln fest. Wir ziehen danach also $k-1$ Kugeln ohne Zurücklegen aus einer Menge von $n-1$ Kugeln. Damit ergibt sich für die Mächtigkeit von A,

$$|A| = 2n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-k+1) = 2\frac{n!}{(n-k)!}$$

und damit

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2\frac{n!}{(n-k)!}}{\frac{2n!}{(2n-k)!}} = 2\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n}{k}}.$$

Für B nehmen wir zuerst an, dass wir die k Kugeln der Größe nach ziehen, d.h. die kleinste zuerst, dann die zweitkleinste usw. Die erste Kugel legt damit die anderen schon fest. Es gibt genau $2n-k+1$ viele Möglichkeiten die erste Kugel zu ziehen. Ziehen wir jetzt nicht in der richtigen Reihenfolge, sondern die nächsten Kugeln beliebig, gibt es für jede Kombination aufsteigender Kugeln $k!$ viele Möglichkeiten diese zu ziehen. Daher ist

$$|B| = (2n-k+1) \cdot k!$$

und damit

$$P(B) = \frac{(2n-k+1) \cdot k!}{\frac{2n!}{(2n-k)!}} = \frac{2n-k+1}{\binom{2n}{k}}.$$

Für C gelten genau die gleichen Überlegungen wie in B mit der Ausnahme, dass wir nur eine Farbe der Kugeln ziehen. Es gibt somit $(n-k+1) \cdot k!$ viele Möglichkeiten aufsteigende Zahlen (nach Sortieren) aus roten Kugeln zu ziehen und die gleiche Anzahl für schwarze Kugeln. Daher ist

$$P(C) = \frac{2(n-k+1) \cdot k!}{\frac{2n!}{(2n-k)!}} = \frac{2(n-k+1)}{\binom{2n}{k}}.$$

(c) Sei $n = 3$ und $k = 2$. Dann ist

$$P(A) = 2\frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{2}{5} \quad \text{und} \quad P(B) = \frac{5}{\binom{6}{2}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

sowie

$$P(A \cap B) = P(C) = \frac{4}{\binom{6}{2}} = \frac{4}{15}.$$

Es ist somit

$$P(A)P(B) = \frac{2}{15} \neq \frac{4}{15} = P(A \cap B)$$

und die Ereignisse A und B sind nicht unabhängig.

(d) Setze $n = 1$ und $k = 1$. Dann ist $P(A) = 1$, da wir hier nur eine Kugel ziehen und damit nur eine Farbe. Damit ist aber auch $P(B) = 1$, da eine Kugel immer fortlaufend nummeriert ist. Damit ist aber auch $P(A \cap B) = 1$ und somit

$$P(A)P(B) = 1 = P(A \cap B)$$

und die Ereignisse sind unabhängig. Die gleiche Überlegung kann man im Fall $k = 1$ für beliebiges n anstellen.

Ziehen ohne Reihenfolge

(a) Wir ziehen ohne Zurücklegen und ohne Reihenfolge. Wir wählen also eine k-elementige Teilmenge von $\{1, \dots, 2n\}$. Also ist

$$\Omega = \{\{\omega_1, \dots, \omega_k\} \subseteq \{1, \dots, 2n\} \mid \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j\} = \{A \subseteq \{1, \dots, 2n\} \mid |A| = k\}.$$

Damit ist $|\Omega| = \binom{2n}{k}$. P ist die Laplaceverteilung, also ist für alle $\omega \in \Omega$

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{\binom{2n}{k}}.$$

(b) Die Ereignisse sind die gleichen wie im Fall mit Reihenfolge

$$\begin{aligned} A &= \{\omega \in \Omega \mid M(\Omega) \leq n \quad \text{oder} \quad m(\omega) > n\} \\ B &= \{\omega \in \Omega \mid M(\omega) - m(\omega) = k - 1\} \\ C &= A \cap B. \end{aligned}$$

Ist $M(\omega) \leq n$, so ist ω eine k-elementige Teilmenge von $\{1, \dots, n\}$. Es gibt dafür $\binom{n}{k}$ viele Möglichkeiten. Andersherum, falls $m(\omega) > n$, so ist ω wieder eine k-elementige Teilmenge von $\{n+1, \dots, 2n\}$. Auch hierfür gibt es $\binom{n}{k}$ viele Möglichkeiten. Somit ist

$$P(A) = \frac{\binom{n}{k} + \binom{n}{k}}{\binom{2n}{k}} = 2\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n}{k}}.$$

Da wir ohne Reihenfolge ziehen, können wir uns auf die kleinste Kugel beschränken, da so auch alle anderen Kugeln festgelegt werden. Man hat $2n-k+1$ viele Möglichkeiten, die kleinste Kugel zu wählen. Damit ist $|B| = 2n - k + 1$, und somit

$$P(B) = \frac{2n - k + 1}{\binom{2n}{k}}.$$

Für C schauen wir wieder auf die kleinste Kugel. Es gibt $n-k+1$ viele Möglichkeiten, diese zu wählen, so dass die restlichen Kugeln immer noch rot sind. Die gleiche Anzahl an Möglichkeiten erhält man für die schwarzen Kugeln. Somit ist $|C| = 2(n - k + 1)$ und damit

$$P(C) = \frac{2(n - k + 1)}{\binom{2n}{k}}.$$

(c) Wie beim Ziehen mit Reihenfolge.

(d) Wie beim Ziehen mit Reihenfolge.

Aufgabe 2

Seien $N, n \in \mathbb{N}$, $p \in]0,1[$ und $q := 1-p$, und es gelte $n \leq N$. Gegeben sei eine Urne mit N Kugeln, schwarzen und roten. Der Anteil der roten Kugel an allen Kugeln sei p. Es werden zufällig n Kugeln gezogen; die Zufallsvariable X gebe die Anzahl der roten Kugeln unter den gezogenen Kugeln an.

	wahr	falsch
• Ziehen wir ohne Zurücklegen, ist X geometrisch verteilt.	☐	☒
• Mit Zurücklegen ist die Varianz von X größer, als sie ohne Zurücklegen wäre.	☐	☒
• Ist $p = 1/2$ und $n = 10$, so konvergiert die Verteilung von X für wachsendes N gegen die Standardnormalverteilung, egal ob wir zurücklegen oder nicht.	☐	☒
• Legen wir zurück, so ist die Wahrscheinlichkeit, genau k rote Kugeln zu ziehen, gleich $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.	☒	☐

Lösung zu Aufgabe 2

...

Aufgabe 3

(a) Definieren Sie: Was ist ein *endlicher, diskreter Wahrscheinlichkeitsraum*?

(b) Beweisen Sie anhand der Axiome für einen endlichen, diskreten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P), dass für alle Teilmengen $A, B \subseteq \Omega$ die folgenden beiden Regeln gelten:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus A)$$

und

$$A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad P(A) \leq P(B).$$

Lösung zu Aufgabe 3(a) Sei Ω eine nicht leere, endliche Menge und $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ eine Funktion mit

- $P(\Omega) = 1$
- für disjunkte Teilmengen $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Dann heißt (Ω, P) endlicher, diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

(b) Seien $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$. Es ist $B \setminus A = B \cap A^c$. Damit sind die Ereignisse $B \setminus A$ und $A \cap B$ disjunkt, und es folgt mit der zweiten Eigenschaft von P die erste Behauptung, da $(A \cap B) \cup (A^c \cap B) = B$.

Für die zweite Eigenschaft schreiben wir $B = A \cup (B \cap A^c)$. Da A und $B \cap A^c$ disjunkt sind, folgt wieder mit der zweiten Eigenschaft von P

$$P(B) = P(A \cup (B \cap A^c)) = P(A) + P(B \cap A^c) \overset{P(B \cap A^c) \geq 0}{\geq} P(A).$$

Aufgabe 4

Sei (Ω, P) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und A, B und C Teilmengen von Ω mit A und B sind unabhängig und B und C sind unabhängig.

	wahr	falsch
• A und C sind unabhängig	☐	☒
• $P(A \mid A^c) = P(B \mid B^c)$, falls $P(A), P(B) < 1$	☒	☐
• A^c und B^c sind unabhängig	☒	☐
• Ist $P(A) = 1$, so ist A zu sich selber unabhängig	☒	☐

Lösung zu Aufgabe 4

...

Aufgabe 5
Für $k > 2$ sei $f(x) := k\left(\frac{1}{x}\right)^{k+1} \mathbf{1}_{[1,\infty)}(x)$.

(a) Zeigen Sie, dass f eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf $\mathbb{R}$ ist.

(b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion, den Erwartungswert und die Varianz einer gemäß f verteilten Zufallsvariablen X.

Lösung zu Aufgabe 5(a) Zuerst sei angemerkt, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Weiter ist

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} k\left(\frac{1}{x}\right)^{k+1} \mathbf{1}_{[1,\infty)}(x)dx = \int_{1}^{\infty} kx^{-k-1}dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(-x^{-k}\right|_1^n = -\lim_{n\to\infty} n^{-k} + 1 = 1.\end{aligned}$$

Damit ist f eine Wahrscheinlichkeitsdichte. Dies gilt sogar für alle $k \geq 1$.

(b) Die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von X ist definiert als $F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$. Damit ist also $F(t) = 0$, falls $t < 1$. Für $t \geq 1$ gilt dann

$$F(t) = \int_1^t k\left(\frac{1}{x}\right)^{k+1} dx = \left(-x^{-k}\right|_1^t = 1 - t^{-k}.$$

Da $X \geq 0$ ist $\mathrm{E}\,|X| = \mathrm{E}\,X$ und mit Errechnen von $\mathrm{E}\,X$ ist auch gleichzeitig die Existenz desgleichen gezeigt. Es ist

$$\mathrm{E}\,X = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_1^{\infty} xk\left(\frac{1}{x}\right)^{k+1} dx = \frac{k}{k-1}\int_1^{\infty}(k-1)\left(\frac{1}{x}\right)^{k} dx = \frac{k}{k-1},$$

da $(k-1)\left(\frac{1}{x}\right)^k \mathbf{1}_{[1,\infty)}(x)$ für $k > 2$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist (siehe (a)).

Für die Varianz errechnen wir zuerst durch analoge Rechnung wie beim Erwartungswert

$$\mathrm{E}\,X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2f(x)dx = \int_1^{\infty} x^2k\left(\frac{1}{x}\right)^{k+1} dx = \frac{k}{k-2}\int_1^{\infty}(k-2)\left(\frac{1}{x}\right)^{k-1} dx = \frac{k}{k-2},$$

da $(k-2)\left(\frac{1}{x}\right)^{k-1} \mathbf{1}_{[1,\infty)}(x)$ für $k > 2$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist (siehe (a)). Damit folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(x) = \mathrm{E}\,X^2 - (\mathrm{E}\,X)^2 &= \frac{k}{k-2} - \left(\frac{k}{k-1}\right)^2 \\ &= \frac{k(k-1)^2 - k^2(k-2)}{(k-2)(k-1)^2} = \frac{k}{(k-2)(k-1)^2}.\end{aligned}$$

Aufgabe 6
Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit

$$P(X_1 = -1) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

Desweiteren sei $Y_i = \max\{X_i, X_{i+1}\}$ für $1 \le i \le n-1$.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung für Y_i, $1 \le i \le n-1$.
(b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y_i, $1 \le i \le n-1$.
(c) Berechnen Sie $\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j)$ für alle $1 \le i, j \le n-1$.

Lösung zu Aufgabe 6(a) Da $X_i \in \{-1, 1\}$ für alle $1 \le i \le n$, folgt auch $Y_i \in \{-1, 1\}$ für alle $1 \le i \le n-1$. Es ist für $1 \le i \le n-1$

$$P(Y_i = -1) = P(X_i = -1, X_{i+1} = -1) \overset{st.u.}{=} P(X_i = -1)P(X_{i+1} = -1) = \frac{1}{4}.$$

Da Y_i nur -1 oder 1 sein kann, folgt

$$P(Y_i = 1) = 1 - P(Y_i = -1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

(b) Da $Y_i \in \{-1, 1\}$, existieren sowohl Erwartungswert als auch Varianz von Y_i. Es ist nach (a) für alle $i = 1, \dots, n-1$

$$\operatorname{E} Y_i = -1 \cdot P(Y_i = -1) + 1 \cdot P(Y_i = 1) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}.$$

Weiter ist $P(Y_i^2 = 1) = 1$ und damit $\operatorname{E} Y_i^2 = 1$. Somit ist

$$\operatorname{Var} Y_i = \operatorname{E} Y_i^2 - (\operatorname{E} Y_i)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

(c) Für $i = j$ ist $\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) = \operatorname{Var} Y_i = \frac{3}{4}$ nach Teil (b).Gilt dagegen $|i - j| > 1$, so sind Y_i und Y_j unabhängig und damit ist $\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$. Sei also $|i - j| = 1$ und wegen der Symmetrie der Kovarianz ohne Einschränkung $i + 1 = j$. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
P(Y_iY_j = 1) &= P(Y_i = Y_j = 1) + P(Y_i = Y_j = -1) \\
&= P(X_i = 1, X_{i+1} = -1, X_{i+2} = 1) + P(X_{i+1} = 1) \\
&\qquad + P(X_i = X_{i+1} = X_{i+2} = -1) \\
&\overset{st.u.}{=} P(X_i = 1)P(X_{i+1} = -1)P(X_{i+2} = 1) + P(X_{i+1} = 1) \\
&\qquad + P(X_i = -1)P(X_{i+1} = -1)P(X_{i+2} = -1) \\
&\overset{id.vert.}{=} P(X_1 = 1)^2 P(X_1 = -1) + P(X_1 = 1) + P(X_1 = -1)^3 \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \\
&= \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Da Y_iY_j nur Werte in $\{-1, 1\}$ annehmen kann folgt damit $P(Y_iY_j = -1) = 1 - P(Y_iY_j = 1) = \frac{1}{4}$ und wir erhalten

$$\operatorname{E}(Y_iY_j) = 1 \cdot P(Y_iY_j = 1) - 1 \cdot P(Y_iY_j = -1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Somit ist die Kovarianz im Fall $|i-j|=1$

$$\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) = \operatorname{E}(Y_i Y_j) - \operatorname{E}(Y_i)\operatorname{E}(Y_j) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Aufgabe 7

(a) Formulieren Sie das *Schwache Gesetz der großen Zahlen.*

(b) Ein Flugzeug eines Linienfluges hat 150 Sitzplätze. Da die Fluggesellschaft aus Erfahrung weiß, dass ein für diesen Flug gekauftes Ticket mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% nicht in Anspruch genommen werden, verkauft diese mehr Tickets als Plätze im Flugzeug vorhanden sind. Die Fluggesellschaft möchte aber, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Überbelegung des Fluges höchstens 1% beträgt. Bestimmen Sie approximativ die Anzahl der Tickets, die maximal zum Verkauft angeboten werden dürfen. Tabellierte Werte der Standardnormalverteilung finden Sie am Ende der Klausur.

Lösung zu Aufgabe 7(a) Seien $X_1, \ldots, X_n$ für $n \geq 1$ paarweise unkorrelierte, quadratisch integrierbare Zufallsvariablen mit dem selben Erwartungswert $\mu = \operatorname{E} X_i$ und der selben Varianz $\sigma^2 = \operatorname{Var}(X_i)$ für alle $1 \leq i \leq n$. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

(b) Sei n die Anzahl der Verkauften Tickets und sei X_i, $i = 1, ..., n$, die Zufallsgröße, die angibt, ob das i-te Ticket wahrgenommen wird, d.h.

$$X_i = \mathbb{1}_{\{\text{Das } i\text{-te Ticket wird wahrgenommen}\}}.$$

Die X_i, $i = 1, ..., n$ sind ferner als stochastisch unabhängig und identisch $B(1, 0.9)$-verteilt angenommen, da ein Ticket nur in 10% aller Fälle wahrgenommem wird. Damit erhalten wir

$$\operatorname{E} X_1 = 0.9 \quad \text{und} \quad \operatorname{Var}(X_1) = 0.9 * 0.1 = 0.09.$$

Setzen wir $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, so beschreibt S_n die tatsächliche Anzahl der im Flugzeug belegten Plätze, und wir erhalten wegen der Unabhängigkeit und der identischen Verteilung der X_i, $i = 1, ..., n$

$$\operatorname{E} S_n = n \operatorname{E} X_1 = n = 0.9 \quad \text{und} \quad \operatorname{Var}(S_n) = n \operatorname{Var}(X_1) = n * 0.9 * 0.1.$$

Der Flug darf nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 1% überbelegt sein, also müssen wir ein maximales $n \in \mathbb{N}$ finden, so dass

$$P(S_n > 150) \leq 0.01$$

gilt. Für das Gegenereignis muss dann gelten

$$0.99 \leq P(S_n \leq 150) = P\left(\frac{S_n - \operatorname{E} S_n}{\sqrt{\operatorname{Var}(S_n)}} \leq \frac{150 - \operatorname{E} S_n}{\sqrt{\operatorname{Var}(S_n)}}\right) \overset{ZGWS}{\approx} \Phi\left(\frac{150 - \operatorname{E} S_n}{\sqrt{\operatorname{Var}(S_n)}}\right)$$

für große n nach dem Zentralen Grenzwertsatz, wobei $\Phi(t)$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist. Mit Hilfe der Normalverteilungstabelle muss also ein maximales $n \in \mathbb{N}$ gefunden werden, welches die Ungleichung

$$h(n) := \frac{150 - \operatorname{E} S_n}{\sqrt{\operatorname{Var}(S_n)}} \geq 2.33$$

erfüllt. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{150-\mathrm{E}\,S_n}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}}\right)^2 = 2.33^2\\
\Leftrightarrow&(150-\mathrm{E}\,S_n)^2 = 2.33^2 * \mathrm{Var}(S_n)\\
\Leftrightarrow&(150-n*0.9)^2 = 2.33^2 * 0.09n\\
\Leftrightarrow&n^2 0.9^2 - 300*0.9n + 150^2 - 2.33^2 * 0.09n = 0\\
\Leftrightarrow&n^2 - n\frac{300+2.33^2*0.1}{0.9} + \left(\frac{150}{0.9}\right)^2 = 0\\
\Leftrightarrow&n^2 - n\frac{300+2.33^2*0.1}{0.9} + \left(\frac{150}{0.9}\right)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der p-q-Formel ergibt sich so als Lösung der quadratischen Gleichung

$$n_{1,2} = -\frac{300+2.33^2*0.1}{2*0.9} \pm \sqrt{\left(\frac{300+2.33^2*0.1}{2*0.9}\right)^2 - \left(\frac{150}{0.9}\right)^2}$$

und damit

$$n_1 = 176.9995 \quad \text{und} \quad n_2 = 156.937.$$

Setzen man n_1 in $h(n)$ ein so erhält man

$$h(n_1) = \frac{150 - n_1 * 0.9}{\sqrt{n_1 * 0.9 * 0.1}} = -2.33 < 0$$

womit n_2 die positive Lösung der quadratischen Gleichung $h(n)^2 = 2.33^2$ ist. Damit ist $n = 156$ die maximale Anzahl an Tickets, die für den Flug verkauft werden dürfen.

Aufgabe 8
Ein Polizist überprüft einen Tag lang auf der Promenade die Verkehrstauglichkeit der Fahrräder. Er kontrolliert immer so lange, bis er ein untaugliches Rad findet und wechselt dann seine Position. Die folgenden Zahlen geben an, wieviele Räder er bei 10 solcher Überprüfungen kontrolliert hatte, bis er auf ein untaugliches Rad stieß.

42 50 40 64 30 36 68 42 46 48

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Überprüfung das n-te kontrollierte Rad untauglich ist, sei $(1-\theta)^{n-1}\theta$, wobei $\theta \in [0,1]$ der Anteil untauglicher Fahrräder auf Münsters Straßen sei.

(a) Erläutern Sie das *Prinzip der Maximum-Likelihood-Schätzung*. Sie dürfen dabei annehmen, dass die zugrunde liegende Verteilung der Stichprobe diskret ist.
(b) Bestimmen Sie für θ einen Maximum-Likelihood-Schätzer auf Basis der Stichprobe.

Lösung zu Aufgabe 8(a) Bei der Maximum-Likelihood-Schätzung betrachtet man unter jedem Parameter θ des Parameterraumes die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen der erhobenen Stichprobe. Man entscheidet sich dann für dasjenige θ, welches diese Wahrscheinlichkeit maximiert. Man entscheidet sich also für den Parameter, unter welchem die Stichprobe die größte Wahrscheinlichkeit hat.

(b) Es ist $\mathfrak{X} = \mathbb{N}^{10}, \mathcal{A} = \mathfrak{P}(\mathfrak{X}), \Theta = [0,1]$ und $P_\theta(X = x) = \prod_{i=1}^{10}(1-\theta)^{x_i-1}\theta$ für alle $x = (x_1, \ldots, x_{10}) \in \mathfrak{X}$. Die Likelihood-Funktion hat damit die folgende Gestalt:

$$\mathbb{L}(\theta|x) = \prod_{i=1}^{10}(1-\theta)^{x_i-1}\theta = \theta^{10}(1-\theta)^{\sum_{i=1}^{10}(x_i-1)}$$

[Anmerkung von Walther: In der Vorlesung habe ich auch $\mathfrak{X} = \mathbb{N}$ und $P_\theta(\{x\}) = (1-\theta)^{x-1}\theta$ geschrieben und die Sigma-Algera weggelassen. Die Likelihoodfunktion sollte dann aber trotzdem die selbe sein.]

Wir bestimmen die Extremstelle durch einfaches Ableiten der Log-Likelihood-Funktion

$$l(\theta|x) = 10\ln\theta + \Big(\sum_{i=1}^{10} x_i - 10\Big)\ln(1-\theta).$$

Es ist

$$\begin{aligned}
l'(\theta|x) &= \frac{10}{\theta} - \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i - 10}{1-\theta} = 0 \\
\Leftrightarrow \frac{10}{\theta} &= \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i - 10}{1-\theta} \\
\Leftrightarrow 10(1-\theta) &= \Big(\sum_{i=1}^{10} x_i - 10\Big)\theta \\
\Leftrightarrow 10 - 10\theta &= \theta\sum_{i=1}^{10} x_i - 10\theta \\
\Leftrightarrow \theta &= \frac{10}{\sum_{i=1}^{10} x_i} =: \hat{\theta}.
\end{aligned}$$

Weiter ist $l'(\theta|x) > 0$ für $\theta < \hat{\theta}$ und $l'(\theta|x) < 0$ für $\theta > \hat{\theta}$. Es liegt also tatsächlich ein Maximum vor und deshalb ist $\hat{\theta} = \frac{10}{\sum_{i=1}^{10} x_i} = 0{,}0215$ der MLS für θ.

Aufgabe 9

Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

	wahr	falsch
• Bei der Gestaltung eines Hypothesentest im parametrischen Modell kann man (bei nichtleerer Hypothese) durch Wahl eines geeigneten Testdesigns immer ausgeschließen, einen Fehler erster Art zu begehen.	☒	☐
• Jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist ein Element der Borelschen Sigma-Algebra von $\mathbb{R}$.	☒	☐
• Der Satz von de Moivre-Laplace kann als ein Vorläufer des Zentralen Grenzwertsatzes gelten.	☒	☐
• Die Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitstheorie wurde im wesentlichen von Pierre de Fermat und Blaise Pascal geleistet.	☐	☒

Lösung zu Aufgabe 9

...

Aufgabe 10 (Für diese Aufgabe gibt es keine Punkte!)

Mit welchem Lied nahmen Pearl Carr und Teddy Johnson am Finale des Eurovision Song Contest 1959 teil?

	wahr	falsch
• That's It, That's Love	☐	☒
• Pickin' Petals	☐	☒
• When The Tide Turns	☐	☒
• Sing Little Birdie	☒	☐

Lösung zu Aufgabe 10

...