

Gerold Alsmeyer

# Stochastische Prozesse

Band 1:  
Diskrete Markov-Ketten und Martingale

22. Mai 2012

Skriptum



# Inhaltsverzeichnis

## Teil I Markov-Ketten auf abzählbaren Zustandsräumen

<b>1</b>	<b>Markov-Ketten: Theoretische Grundlagen</b> .....	3
1.1	Definitionen und grundlegende Eigenschaften .....	3
1.2	Das Standardmodell .....	11
1.3	Filtrationen und Stopzeiten .....	13
1.3.1	Filtrationen .....	13
1.3.2	Stopzeiten .....	14
1.4	Die starke Markov-Eigenschaft .....	20
1.5	Stationäre Maße und Verteilungen .....	25
<b>2</b>	<b>Diskrete Markov-Ketten</b> .....	29
2.1	Beispiele diskreter Markov-Ketten .....	29
2.1.1	Markov-Ketten mit zwei Zuständen .....	29
2.1.2	Ein einfaches Bedienungssystem .....	30
2.1.3	Irrfahrten mit reflektierenden Barrieren .....	31
2.1.4	Irrfahrten mit absorbierenden Barrieren .....	31
2.1.5	Einfache Irrfahrten auf einem Graphen .....	32
2.1.6	Das Ehrenfest-Modell für Wärmeaustausch .....	32
2.1.7	Markov-Ketten in der Genetik: Die Modelle von Wright-Fisher und Moran .....	33
2.1.8	Irrfahrten auf $\mathbb{Z}^d$ .....	37
2.1.9	Eine Variante: Reflektierende Irrfahrten auf $\mathbb{Z}$ .....	39
2.1.10	Diskrete Random Walks in $\mathbb{Z}^d$ .....	40
2.1.11	Ein Bedienungssystem mit konstanten Bedienungszeiten ...	41
2.1.12	Ein Lagerhaltungsmodell .....	42
2.1.13	Der Galton-Watson-Verzweigungsprozess .....	43
2.2	Zustandseigenschaften und Irreduzibilität .....	44
2.2.1	Irreduzibilität .....	44
2.2.2	Periodizität .....	49
2.2.3	Zyklische Zerlegung einer DMK .....	51

2.2.4	Rekurrenz und Transienz	54
2.3	Rekurrenz/Transienz von Irrfahrten auf $\mathbb{Z}^d$	57
2.3.1	Der eindimensionale Fall	57
2.3.2	Der zweidimensionale Fall	60
2.3.3	Der drei- und mehrdimensionale Fall	61
2.4	Solidaritätseigenschaften	63
2.5	Stationäre Maße und Zeitmittel	67
2.5.1	Stationäre Maße via zyklischer Zerlegungen	68
2.5.2	Zeitmittel	71
2.5.3	Null-Rekurrenz unter der Lupe	82
2.5.4	Wieviele stationäre Maße hat eine DMK?	84
2.6	Kopplung und gleichmäßige Verteilungskonvergenz (Ergodizität) diskreter Markov-Ketten	87
2.6.1	Die Kopplungsmethode	88
2.6.2	Der Ergodensatz für aperiodische, positiv rekurrente DMK	89
2.6.3	Asymptotisches Verhalten im periodischen Fall	93
2.6.4	Nochmals der null-rekurrente Fall	95
2.6.5	Gleichmäßige und exponentielle Ergodizität	98
2.7	Absorptionswahrscheinlichkeiten	100
2.8	Reversibilität: Der Blick zurück	108
2.9	Und nochmals Beispiele	117
2.9.1	Markov-Ketten mit zwei Zuständen	117
2.9.2	Die Diffusionsmodelle von Ehrenfest und Bernoulli-Laplace	119
2.9.3	Markov-Ketten in der Genetik	121
2.9.4	Ein Bedienungssystem mit konstanten Bedienungszeiten	122
2.9.5	Das DM/DM/1-Bedienungssystem	125
2.9.6	Ein Lagerhaltungsmodell	130
2.9.7	Der Galton-Watson-Verzweigungsprozess	133
<b>3</b>	<b>Ergodische Markov-Ketten unter der Lupe: Konvergenzraten</b>	<b>139</b>
3.1	Nichtnegative Matrizen und der Satz von Perron-Frobenius	139
3.2	Spektraltheorie für reversible Übergangsmatrizen	147
3.2.1	Spektraldarstellung reversibler Übergangsmatrizen	147
3.2.2	Spektralabschätzungen für den Variationsabstand	151
3.2.3	Der nicht-reversible Fall	160
3.3	Schranken für den betragsmäßig zweitgrößten Eigenwert	163
3.3.1	Dirichlet-Formen und variationelle Charakterisierung von Eigenwerten	164
3.3.2	Geometrische Schranken durch gewichtete Pfade	166
3.3.3	Leitfähigkeit und die Cheeger-Ungleichung	172
3.4	Probabilistische Abschätzungen	176
3.4.1	Der ergodische Koeffizient und die Dobrushin-Ungleichung	177
3.4.2	Separation und stark stationäre Zeiten	180
3.4.3	Die Distanzmethode	187

**Teil II Martingale in diskreter Zeit**

<b>4</b>	<b>Martingale in diskreter Zeit: Allgemeine Theorie</b> . . . . .	193
4.1	Definitionen, elementare Eigenschaften und Beispiele . . . . .	193
4.2	Das Optional-Sampling-Theorem . . . . .	199
4.2.1	Martingale-Transformationen und gestoppte Martingale . . . . .	200
4.2.2	Optional Sampling für unbeschränkte Stopzeiten . . . . .	201
4.3	Der Martingale-Konvergenzsatz . . . . .	204
4.4	Gleichgradige Integrierbarkeit . . . . .	208
4.4.1	... und Martingale-Konvergenz . . . . .	208
4.4.2	Inverse Martingale . . . . .	213
4.4.3	... und Optional Sampling . . . . .	216
4.5	Quadratisch integrierbare Martingale . . . . .	219
4.5.1	$L^2$ -Beschränktheit und orthogonale Zerlegung . . . . .	219
4.5.2	Die Doob-Zerlegung . . . . .	220
4.5.3	Die quadratische Variation eines $L^2$ -Martingals . . . . .	222
4.5.4	Ein starkes Gesetz der großen Zahlen für $L^2$ -Martingale . . . . .	224
4.6	Nochmals der Martingale-Konvergenzsatz: Garsias Beweis . . . . .	225
<b>5</b>	<b>Martingale in Aktion</b> . . . . .	229
5.1	Gambler's ruin . . . . .	229
5.2	Der Galton-Watson-Verzweigungsprozess . . . . .	232
5.3	Das Wright-Fisher-Modell bei variierender Populationsgröße . . . . .	233
5.4	Das Cramér-Lundberg-Modell der Risikotheorie . . . . .	235
5.5	Die Black-Scholes-Formel der Finanzmathematik: eine diskrete Version . . . . .	239
5.6	Kakutanis Satz über Produktmartingale . . . . .	245
5.7	Null-Eins-Gesetze, Austauschbarkeit und der Satz von de Finetti . . . . .	249
5.8	Der Kalman-Bucy-Filter . . . . .	254
5.9	Harmonische Funktionen und Rekurrenzkriterien für DMK . . . . .	257
5.10	Optimales Stoppen und das Problem der besten Wahl . . . . .	262
	Literaturverzeichnis . . . . .	271
	<b>Sachverzeichnis</b> . . . . .	273



## Abkürzungsverzeichnis

DMK	Diskrete Markov-Kette
DS-Argument	Dynkin-System-Argument
EMK	Endliche Markov-Kette
FE-Argument	Funktions-Erweiterungsargument
f.s.	fast sicher
FT	Fourier-Transformierte
g.i.	gleichgradig integrierbar
L-Maß	Lebesgue-Maß
L-integrierbar	Lebesgue-integrierbar
LT	Laplace-Transformierte
MK	Markov-Kette
p.d.	paarweise disjunkt
R-integrierbar	Riemann-integrierbar
d.R.i.	direkt Riemann-integrierbar
u.o.	unendlich oft
VFkt.	Verteilungsfunktion
W-Maß	Wahrscheinlichkeitsmaß
W-Raum	Wahrscheinlichkeitsraum
W-Verteilung	Wahrscheinlichkeitsverteilung
ZG	Zufallsgröße



# Symbole

$Bern(\theta)$	Bernoulli-Verteilung mit Parameter $\theta \in (0, 1)$
$\beta(a, b)$	Betaverteilung mit Parametern $a, b \in \mathbb{R}_{>}$
$\beta^*(a, b)$	Betaverteilung der 2. Art mit Parametern $a, b \in \mathbb{R}_{>}$
$Bin(n, \theta)$	Binomialverteilung mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ and $\theta \in (0, 1)$
$\delta_a$	Dirac-Verteilung in $a$
$Exp(\theta)$	Exponentialverteilung mit Parameter $\theta \in \mathbb{R}_{>}$
$\Gamma(\alpha, \beta)$	Gammaverteilung mit Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>}$
$Geom(\theta)$	Geometrische Verteilung mit mit Parameter $\theta \in (0, 1)$
$HGeom(N, n, m)$	Hypergeometrische Verteilung mit Parametern $N, n, m \in \mathbb{N}$
$NBin(n, \theta)$	Negative Binomialverteilung mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ and $\theta \in \mathbb{R}_{>}$
$Poisson(\theta)$	Poisson-Verteilung mit Parameter $\theta \in \mathbb{R}_{>}$
$Unif\{x_1, \dots, x_n\}$	Diskrete Gleichverteilung auf der Menge $\{x_1, \dots, x_n\}$
$Normal(\mu, \sigma^2)$	Normalverteilung mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ and $\sigma^2 \in \mathbb{R}_{>}$
$Cauchy(a, b)$	Cauchy-Verteilung mit Parametern $a \in \mathbb{R}$ and $b \in \mathbb{R}_{>}$
$\mathcal{S}(\alpha, b)$	Symmetrische stabile Verteilung mit Index $\alpha \in (0, 2]$ und Skalierungsparameter $b \in \mathbb{R}_{>}$
$\mathcal{S}_+(\alpha, b)$	Einseitige stabile Verteilung mit Index $\alpha \in (0, 1]$ und Skalierungsparameter $b \in \mathbb{R}_{>}$
$Unif(a, b)$	Gleichverteilung auf $[a, b]$ , $a < b$