

Gerold Alsmeyer

# Stochastische Prozesse

Band 1:  
Diskrete Markov-Ketten und Martingale

22. Mai 2012

Skriptum



# Inhaltsverzeichnis

## Teil I Markov-Ketten auf abzählbaren Zustandsräumen

<b>1</b>	<b>Markov-Ketten: Theoretische Grundlagen</b> .....	3
1.1	Definitionen und grundlegende Eigenschaften .....	3
1.2	Das Standardmodell .....	11
1.3	Filtrationen und Stopzeiten .....	13
1.3.1	Filtrationen .....	13
1.3.2	Stopzeiten .....	14
1.4	Die starke Markov-Eigenschaft .....	20
1.5	Stationäre Maße und Verteilungen .....	25
<b>2</b>	<b>Diskrete Markov-Ketten</b> .....	29
2.1	Beispiele diskreter Markov-Ketten .....	29
2.1.1	Markov-Ketten mit zwei Zuständen .....	29
2.1.2	Ein einfaches Bedienungssystem .....	30
2.1.3	Irrfahrten mit reflektierenden Barrieren .....	31
2.1.4	Irrfahrten mit absorbierenden Barrieren .....	31
2.1.5	Einfache Irrfahrten auf einem Graphen .....	32
2.1.6	Das Ehrenfest-Modell für Wärmeaustausch .....	32
2.1.7	Markov-Ketten in der Genetik: Die Modelle von Wright-Fisher und Moran .....	33
2.1.8	Irrfahrten auf $\mathbb{Z}^d$ .....	37
2.1.9	Eine Variante: Reflektierende Irrfahrten auf $\mathbb{Z}$ .....	39
2.1.10	Diskrete Random Walks in $\mathbb{Z}^d$ .....	40
2.1.11	Ein Bedienungssystem mit konstanten Bedienungszeiten ...	41
2.1.12	Ein Lagerhaltungsmodell .....	42
2.1.13	Der Galton-Watson-Verzweigungsprozess .....	43
2.2	Zustandseigenschaften und Irreduzibilität .....	44
2.2.1	Irreduzibilität .....	44
2.2.2	Periodizität .....	49
2.2.3	Zyklische Zerlegung einer DMK .....	51

2.2.4	Rekurrenz und Transienz . . . . .	54
2.3	Rekurrenz/Transienz von Irrfahrten auf $\mathbb{Z}^d$ . . . . .	57
2.3.1	Der eindimensionale Fall . . . . .	57
2.3.2	Der zweidimensionale Fall . . . . .	60
2.3.3	Der drei- und mehrdimensionale Fall . . . . .	61
2.4	Solidaritätseigenschaften . . . . .	63
2.5	Stationäre Maße und Zeitmittel . . . . .	67
2.5.1	Stationäre Maße via zyklischer Zerlegungen . . . . .	68
2.5.2	Zeitmittel . . . . .	71
2.5.3	Null-Rekurrenz unter der Lupe . . . . .	82
2.5.4	Wieviele stationäre Maße hat eine DMK? . . . . .	84
2.6	Kopplung und gleichmäßige Verteilungskonvergenz (Ergodizität) diskreter Markov-Ketten . . . . .	87
2.6.1	Die Kopplungsmethode . . . . .	88
2.6.2	Der Ergodensatz für aperiodische, positiv rekurrente DMK . . . . .	89
2.6.3	Asymptotisches Verhalten im periodischen Fall . . . . .	93
2.6.4	Nochmals der null-rekurrente Fall . . . . .	95
2.6.5	Gleichmäßige und exponentielle Ergodizität . . . . .	98
2.7	Absorptionswahrscheinlichkeiten . . . . .	100
2.8	Reversibilität: Der Blick zurück . . . . .	108
2.9	Und nochmals Beispiele . . . . .	117
2.9.1	Markov-Ketten mit zwei Zuständen . . . . .	117
2.9.2	Die Diffusionsmodelle von Ehrenfest und Bernoulli-Laplace . . . . .	119
2.9.3	Markov-Ketten in der Genetik . . . . .	121
2.9.4	Ein Bedienungssystem mit konstanten Bedienungszeiten . . . . .	122
2.9.5	Das DM/DM/1-Bedienungssystem . . . . .	125
2.9.6	Ein Lagerhaltungsmodell . . . . .	130
2.9.7	Der Galton-Watson-Verzweigungsprozess . . . . .	133
<b>3</b>	<b>Ergodische Markov-Ketten unter der Lupe: Konvergenzraten . . . . .</b>	<b>139</b>
3.1	Nichtnegative Matrizen und der Satz von Perron-Frobenius . . . . .	139
3.2	Spektraltheorie für reversible Übergangsmatrizen . . . . .	147
3.2.1	Spektraldarstellung reversibler Übergangsmatrizen . . . . .	147
3.2.2	Spektralabschätzungen für den Variationsabstand . . . . .	151
3.2.3	Der nicht-reversible Fall . . . . .	160
3.3	Schranken für den betragsmäßig zweitgrößten Eigenwert . . . . .	163
3.3.1	Dirichlet-Formen und variationelle Charakterisierung von Eigenwerten . . . . .	164
3.3.2	Geometrische Schranken durch gewichtete Pfade . . . . .	166
3.3.3	Leitfähigkeit und die Cheeger-Ungleichung . . . . .	172
3.4	Probabilistische Abschätzungen . . . . .	176
3.4.1	Der ergodische Koeffizient und die Dobrushin-Ungleichung . . . . .	177
3.4.2	Separation und stark stationäre Zeiten . . . . .	180
3.4.3	Die Distanzmethode . . . . .	187

**Teil II Martingale in diskreter Zeit**

<b>4</b>	<b>Martingale in diskreter Zeit: Allgemeine Theorie</b>	193
4.1	Definitionen, elementare Eigenschaften und Beispiele	193
4.2	Das Optional-Sampling-Theorem	199
4.2.1	Martingale-Transformationen und gestoppte Martingale	200
4.2.2	Optional Sampling für unbeschränkte Stopzeiten	201
4.3	Der Martingale-Konvergenzsatz	204
4.4	Gleichgradige Integrierbarkeit	208
4.4.1	... und Martingale-Konvergenz	208
4.4.2	Inverse Martingale	213
4.4.3	... und Optional Sampling	216
4.5	Quadratisch integrierbare Martingale	219
4.5.1	$L^2$ -Beschränktheit und orthogonale Zerlegung	219
4.5.2	Die Doob-Zerlegung	220
4.5.3	Die quadratische Variation eines $L^2$ -Martingals	222
4.5.4	Ein starkes Gesetz der großen Zahlen für $L^2$ -Martingale	224
4.6	Nochmals der Martingale-Konvergenzsatz: Garsias Beweis	225
<b>5</b>	<b>Martingale in Aktion</b>	229
5.1	Gambler's ruin	229
5.2	Der Galton-Watson-Verzweigungsprozess	232
5.3	Das Wright-Fisher-Modell bei variierender Populationsgröße	233
5.4	Das Cramér-Lundberg-Modell der Risikotheorie	235
5.5	Die Black-Scholes-Formel der Finanzmathematik: eine diskrete Version	239
5.6	Kakutanis Satz über Produktmartingale	245
5.7	Null-Eins-Gesetze, Austauschbarkeit und der Satz von de Finetti	249
5.8	Der Kalman-Bucy-Filter	254
5.9	Harmonische Funktionen und Rekurrenzkriterien für DMK	257
5.10	Optimales Stoppen und das Problem der besten Wahl	262
	Literaturverzeichnis	271
	<b>Sachverzeichnis</b>	273



## Abkürzungsverzeichnis

DMK	Diskrete Markov-Kette
DS-Argument	Dynkin-System-Argument
EMK	Endliche Markov-Kette
FE-Argument	Funktions-Erweiterungsargument
f.s.	fast sicher
FT	Fourier-Transformierte
g.i.	gleichgradig integrierbar
L-Maß	Lebesgue-Maß
L-integrierbar	Lebesgue-integrierbar
LT	Laplace-Transformierte
MK	Markov-Kette
p.d.	paarweise disjunkt
R-integrierbar	Riemann-integrierbar
d.R.i.	direkt Riemann-integrierbar
u.o.	unendlich oft
VFkt.	Verteilungsfunktion
W-Maß	Wahrscheinlichkeitsmaß
W-Raum	Wahrscheinlichkeitsraum
W-Verteilung	Wahrscheinlichkeitsverteilung
ZG	Zufallsgröße





# Symbole

$Bern(\theta)$	Bernoulli-Verteilung mit Parameter $\theta \in (0, 1)$
$\beta(a, b)$	Betaverteilung mit Parametern $a, b \in \mathbb{R}_{>}$
$\beta^*(a, b)$	Betaverteilung der 2. Art mit Parametern $a, b \in \mathbb{R}_{>}$
$Bin(n, \theta)$	Binomialverteilung mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ and $\theta \in (0, 1)$
$\delta_a$	Dirac-Verteilung in $a$
$Exp(\theta)$	Exponentialverteilung mit Parameter $\theta \in \mathbb{R}_{>}$
$\Gamma(\alpha, \beta)$	Gammaverteilung mit Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>}$
$Geom(\theta)$	Geometrische Verteilung mit mit Parameter $\theta \in (0, 1)$
$HGeom(N, n, m)$	Hypergeometrische Verteilung mit Parametern $N, n, m \in \mathbb{N}$
$NBin(n, \theta)$	Negative Binomialverteilung mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ and $\theta \in \mathbb{R}_{>}$
$Poisson(\theta)$	Poisson-Verteilung mit Parameter $\theta \in \mathbb{R}_{>}$
$Unif\{x_1, \dots, x_n\}$	Diskrete Gleichverteilung auf der Menge $\{x_1, \dots, x_n\}$
$Normal(\mu, \sigma^2)$	Normalverteilung mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ and $\sigma^2 \in \mathbb{R}_{>}$
$Cauchy(a, b)$	Cauchy-Verteilung mit Parametern $a \in \mathbb{R}$ and $b \in \mathbb{R}_{>}$
$\mathcal{S}(\alpha, b)$	Symmetrische stabile Verteilung mit Index $\alpha \in (0, 2]$ und Skalierungsparameter $b \in \mathbb{R}_{>}$
$\mathcal{S}_+(\alpha, b)$	Einseitige stabile Verteilung mit Index $\alpha \in (0, 1]$ und Skalierungsparameter $b \in \mathbb{R}_{>}$
$Unif(a, b)$	Gleichverteilung auf $[a, b]$ , $a < b$