Institut für
Mathematische Statistik

Alsmeyer: Markov-Ketten
SS 2012, Blatt 11

Übungen

Abgabetermin: Dienstag 03.07. um 12 Uhr, Briefkasten 56

Aufgabe 43 (5 Punkte)
Es sei P eine Übergangsmatrix auf $\mathcal{S}$, I die Einheitsmatrix auf $\mathcal{S}$ und $Q = \mathrm{diag}(q_s : s \in \mathcal{S})$ die Diagonalmatrix mit den Einträgen q_s an der Stelle (s, s). Setze dann $P' = (I - Q)P + Q$.

(a) Welchen Übergangsmechanismus beschreibt P' bezogen auf eine MK $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit Übergangsmatrix P?

(b) Zeigen Sie: π' ist stationär für P' gdw. $\pi = (\pi'_s(1 - p_s))_{s \in \mathcal{S}}$ stationär für P ist.

(c) Zeigen Sie: P' ist reversibel gdw. P reversibel ist.

Aufgabe 44 (5 Punkte)
Ein Teilchen bewegt sich auf N in einem Kreis angeordneten Punkten $1, \ldots, N$. In jedem Zeitschritt springt es mit Wahrscheinlichkeit p bzw. $1 - p$ im Uhrzeigersinn bzw. gegen den Uhrzeigersinn weiter.

(a) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung der Kette. Für welche p ist die Kette reversibel?

(b) Angenommen das Teilchen startet in 1. Bestimmen Sie für $i = 2, \ldots, N$ die Wahrscheinlichkeit, dass alle anderen Zustände vor dem Zustand i besucht werden.
Hinweis: Gambler's ruin problem.

Aufgabe 45 (5 Punkte)
Gegeben sei eine Markov-Kette auf einem Graphen G mit gewichteten Kanten, d.h. die Übergangswahrscheinlichkeiten sind durch

$$p_{ij} \;=\; \frac{w_{ij}}{\sum_{k \in G} w_{ik}}$$

gegeben. Es gelte dabei $w_{ij} = w_{ji} \geq 0$ und $w_{ii} = 0$ für alle $i, j \in G$. Bestimmen Sie die stationäre Verteilung von P. Ist die Kette reversibel?

Bitte wenden!

Die folgenden Aufgaben dienen der Wiederholung und müssen nicht abgegeben werden. Es sei stets $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine DMK auf $\mathcal{S}$ mit Übergangsmatrix P.

Aufgabe 46 (Markov-Eigenschaft)
Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Für alle $i, j \in \mathcal{S}$, $A_0, \dots A_{n-1} \subseteq \mathcal{S}$ gilt

$$\mathbb{P}(M_{n+1} = j \mid M_n = i, M_{n-1} \in A_{n-1}, \dots, M_0 \in A_0) = \mathbb{P}(M_{n+1} = j \mid M_n = i).$$

(b) Für alle $j \in \mathcal{S}$, $A_0, \dots A_n \subseteq \mathcal{S}$ gilt

$$\mathbb{P}(M_{n+1} = j \mid M_n \in A_n, \dots, M_0 \in A_0) = \mathbb{P}(M_{n+1} = j \mid M_n \in A_n).$$

(c) Für alle $(i_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathcal{S}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\mathbb{P}(M_n = i_n \mid M_k = i_k \text{ für alle } k \neq n) = \mathbb{P}(M_n = i_n \mid M_{n+1} = i_{n+1}, M_{n-1} = i_{n-1}).$$

Aufgabe 47 (a) Sind $M'_0, X_0, X_1, \dots$ unabhängig, so ist $M'_{n+1} = f(M'_n, X_n)$, $n \geq 0$, eine MK für jede messbare Funktion f.

(b) Zeige Sie: 1 ist ein (rechter) Eigenwert von P und sämtliche Eigenwerte von P haben einen Betrag kleiner oder gleich 1

(c) Zeigen Sie: Ist $\mathcal{S}$ endlich mit $|\,\mathcal{S}\,| = m$ und $i \to j$, so gilt $p_{ij}^{(n)} > 0$ für ein $n \leq m$.

Aufgabe 48 (Stationäre Maße)

(a) Wieviele stationäre Maße kann M besitzen? Geben Sie für jeden Fall ein Beispiel.

(b) Zeigen Sie: Die Menge der stationären Verteilungen einer MK ist konvex.

(c) Zeigen Sie: Ist π stationär und $A \subseteq \mathcal{S}$ so gilt $\sum_{j\in A^c} \sum_{i\in A} \pi_i p_{ij} = \sum_{j\in A^c} \sum_{i\in A} \pi_j p_{ji}$.

Aufgabe 49 (Rekurrenz & Transienz)

(a) Geben Sie ein Beispiel für eine Kette mit transientem Zustand i, für den $p_{ii}^{(n)} > 0$ für alle $n \geq 1$ gilt.

(b) Zeigen Sie: Ist i rekurrent und $i \to j$, so ist j auch rekurrent.

(c) Zeigen Sie: Ist $\mathcal{S}$ endlich, so existiert mindestens eine abgeschlossene Kommunikationsklasse. Geben Sie ein Beispiel für eine Kette mit unendlich großem Zustandsraum, für die dies nicht gilt.