Übungen

Abgabetermin: Dienstag 26.06. um 12 Uhr, Briefkasten 56

Aufgabe 39 (5 Punkte)
Für eine Verteilung G auf $[0,\infty)$ und $\lambda > 0$ seien

$$a_j \;:=\; \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!}\, G(dx), \quad j \geq 0,$$

und $\rho := \sum_{j\geq 0} j a_j$. Es sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum $\mathbb{N}_0$ und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{0j} = a_j, \quad p_{ij} = a_{j-i+1} \text{ für } j \geq i-1 > 1, \quad p_{ij} = 0 \text{ für } j < i-1,$$

für die angenommen wird, dass eine stationäre Verteilung π existiert. Ferner seien $\pi(s) = \sum_{j=0}^\infty \pi_j s^j$ und $A(s) = \sum_{j=0}^\infty a_j s^j$ die erzeugenden Fkt. von π und $(a_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$. Zeigen Sie

$$\pi(s) \;=\; \pi_0\, A(s)\, \frac{s-1}{s-A(s)}$$

für alle $s \in [0,1)$ und folgern Sie $\lim_{s\uparrow 1} \pi(s) = \frac{\pi_0}{1-\rho}$ sowie $\rho < 1$.

Aufgabe 40 (5 Punkte)
Es sei $P = (p_{ij})_{i,j\in\mathcal{S}}$ eine positiv rekurrente Übergangsmatrix auf $\mathcal{S} = \mathbb{N}_0$ oder $\mathcal{S} = \{0,\ldots,N\}$ mit $p_{0j} > 0$ und $p_{j0} > 0$ für alle $j > 0$, $j \in \mathcal{S}$. Zeigen Sie: P ist genau dann reversibel, wenn

$$p_{ij}\, p_{jk}\, p_{ki} \;=\; p_{ik}\, p_{kj}\, p_{ji}$$

für alle $i,j,k \in \mathcal{S}$ gilt, d.h. der Pfad $i \to j \to k \to i$ wird mit gleicher Wahrscheinlichkeit vorwärts wie rückwärts durchlaufen.

Bitte wenden!

Aufgabe 41 (5 Punkte)
Es sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine reversible Markov-Kette mit Übergangsmatrix $P = (p_{ij})_{i,j\in\mathcal{S}}$ und stationärer Verteilung π. Ferner sei A eine nichtleere Teilmenge von $\mathcal{S}$.

(a) Definiere $\widetilde{P}_A = (\widetilde{p}_{ij})_{i,j\in A}$ durch

$$\widetilde{p}_{ij} \;=\; \begin{cases} p_{ij} & \text{falls } i \neq j \\ p_{ii} + \sum_{k\in A^c} p_{ik} & \text{falls } i = j. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\widetilde{P}_A$ reversibel ist und bestimmen Sie die stationäre Verteilung $\widetilde{\pi}$. Welchen Übergangsmechanismus beschreibt $\widetilde{P}_A$ bezogen auf die Ausgangskette $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$?

(b) Definiere $P'_A = (p'_{ij})_{i,j\in A}$ durch

$$p'_{ij} \;=\; \frac{p_{ij}}{\sum_{k\in A} p_{ik}}.$$

Zeigen Sie, dass P'_A reversibel ist und bestimmen Sie die stationäre Verteilung π'. Welchen Übergangsmechanismus beschreibt P'_A bezogen auf die Ausgangskette $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$?

Aufgabe 42 (5 Punkte)
N Kugeln werden auf K Urnen verteilt. In jedem Zeitschritt wird gleichverteilt eine Kugel ausgewählt und mit Wahrscheinlichkeit

$$q_{ij} \;=\; \frac{1}{Z}\exp(-\beta W_j)$$

in Urne j gelegt, wobei i die Urne bezeichnet, aus der die Kugel stammte. Es sei dabei $Z := \sum_{k=1}^{K}\exp(-\beta W_k)$ mit $W_1, \ldots, W_K \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$. Beschreiben Sie die Situation durch eine Markov-Kette und zeigen Sie, dass diese reversibel ist. Bestimmen Sie auch die stationäre Verteilung π.

Tipp: Wählen Sie als Zustandsraum $\mathcal{S} = \{(z_1, \ldots, z_K) \in (\mathbb{N}_0)^K : \sum_{i=1}^{K} z_i = N\}$. Dann gibt z_i die Anzahl der Kugeln in Urne i an.