Übungen

Abgabetermin: Dienstag 19.06. um 12 Uhr, Briefkasten 56

Aufgabe 35 (5 Punkte)
Für einen Übergangskern $P = (p_{ij})_{i,j\in\mathcal{S}}$ auf $\mathcal{S}$ mit stationärer Verteilung π sei $M\otimes M' := (M_n, M_n')_{n\geq 0}$ eine DMK mit Zustandsraum $\mathcal{S}^2$ und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{(i_1,i_2),(j_1,j_2)} \;=\; p_{i_1j_1}p_{i_2j_2}$$

für die wir ein Standardmodell $(\Omega, \mathcal{A}, M\otimes M', (\mathbb{P}_\nu)_{\nu\in\mathscr{P}(\mathcal{S}^2)})$ zugrunde legen. Zeigen Sie:

(a) $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $M' = (M_n')_{n\in\mathbb{N}_0}$ sind jeweils DMK mit Übergangskern P.

(b) M und M' sind stochastisch unabhängig unter jedem $\mathbb{P}_\nu$ mit $\nu = \lambda\otimes\mu$.

(c) $\pi\otimes\pi$ ist stationär für $M\otimes M'$.

Aufgabe 36 (Satz 2.57.) (5 Punkte)
Gegeben eine d-periodische ($d\geq 2$), positiv rekurrente DMK M mit stationärer Verteilung π und zyklischer Zerlegung $\mathcal{S}_0,\ldots,\mathcal{S}_{d-1}$ des Zustandsraums gilt: Das d-Skelett $(M_{nd})_{n\geq 0}$ bildet auf jeder zyklischen Klasse $\mathcal{S}_r$, $0\leq r<d$, eine ergodische DMK mit stationärer Verteilung $\pi^{(r)} := d\,\pi(\cdot\cap\mathcal{S}_r)$. Insbesondere folgt $\mathbb{P}_\pi(M_n\in\mathcal{S}_r) = 1/d$ für alle $0\leq r<d$ und $n\geq 0$.

Aufgabe 37 (5 Punkte)
Es sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine ergodische DMK mit Zustandsraum $\mathcal{S}$ und stationärer Verteilung π. Zeigen Sie

$$\sup_{\lambda\in\mathscr{P}(\mathcal{S})} \|\, \mathbb{P}_\lambda^{M_n} - \pi \,\| \leq \left(1-\sum_{j\in\mathcal{S}}\alpha_j^2\right)^{(n-n_0+1)/n_0}$$

für alle $n\geq 0$ und $n_0\geq 1$, wobei $\alpha_j = \alpha(j,n_0) = \inf_{i\in\mathcal{S}} p_{ii_0}^{(n_0)}$.

Aufgabe 38 (5 Punkte)
Es sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette auf $\mathbb{N}_0$ mit Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{00} \;=\; 1, \quad p_{i,i+1} \;=\; \left(\frac{i+1}{i}\right)^2 p_{i,i-1}, \quad p_{i,i+1} \;+\; p_{i,i-1} \;=\; 1,$$

für $i\geq 1$. Zeigen Sie $\mathbb{P}_1(M_n\geq 1 \text{ für alle } n\geq 1) = 6/\pi^2$.