Übungen

Abgabetermin: Dienstag 12.06. um 12 Uhr, Briefkasten 56

Aufgabe 31 (Korollar 2.39.) (5 Punkte)
Zeigen Sie: Ein Zustand $i \in \mathcal{S}$ ist genau dann null-rekurrent, wenn

$$\sum_{n\geq 0} p_{ii}^{(n)} \;=\; \infty \quad \text{und} \quad \text{C-}\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} \;=\; 0$$

gilt. In diesem Fall gilt weiter $\text{C-}\lim_{n\to\infty} p_{ji}^{(n)} = 0$ für alle $j \in \mathcal{S}$.

Aufgabe 32 (Satz 2.44.) (5 Punkte)
Es sei $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine DMK mit Zustandsraum $\mathcal{S}$, der in eine Menge (nicht notwendig Klasse) $\mathscr{T}$ transienter und eine Klasse $\mathscr{R}$ rekurrenter Zustände zerfällt, wobei ferner $\mathbb{P}_i(\tau(\mathscr{R}) < \infty) = 1$ für alle $i \in \mathscr{T}$. Zeigen Sie:

(a) $(M_{\tau(\mathscr{R})+n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine irreduzible, rekurrente MK mit Zustandsraum $\mathscr{R}$.

(b) M besitzt ein bis auf skalares Vielfaches eindeutig bestimmtes stationäres Maß π mit $0 < \pi_i < \infty$ für alle $i \in \mathscr{R}$ und $\pi_i = 0$ für alle $i \in \mathscr{T}$.

(c) π ist genau dann endlich, wenn $\mathscr{R}$ positiv rekurrent ist.

Aufgabe 33 (5 Punkte)
Es sei π eine Verteilung auf einem endlichen Zustandsraum $\mathcal{S}$ und $P = (p_{ij})_{i,j\in\mathcal{S}}$ eine irreduzible Übergangsmatrix auf $\mathcal{S}$. Zeigen Sie, dass $\widetilde{P} = (\widetilde{p}_{ij})_{i,j\in\mathcal{S}}$, gegeben durch

$$\widetilde{p}_{ij} = \begin{cases} p_{ij}\min\{1, (\pi_j p_{ji})/(\pi_i p_{ij})\} & \text{falls } j \neq i \\ 1 - \sum_{k\neq i} p_{ik}\min\{1, (\pi_k p_{ki})/(\pi_i p_{ik})\} & \text{falls } j = i, \end{cases}$$

eine Übergangsmatrix auf $\mathcal{S}$ mit stationärer Verteilung π ist.

Tipp: Zeigen Sie zunächst $\pi_i\widetilde{p}_{ij} = \pi_j\widetilde{p}_{ji}$ für alle $i, j \in \mathcal{S}$ und dann die Stationärität von π.

Bitte wenden!

Aufgabe 34 (5+4* Punkte)
Wir betrachten eine Markov-Kette auf $\mathcal{S} = \mathbb{Z}_{\geq 2} = \{2, 3, 4, \ldots\}$, gegeben durch den folgenden Übergangsmechanismus: Schreibe $m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ im Dezimalsystem als $m = \sum_{i=0}^{k} a_i 10^i$ und bewege die Kette (ausgehend von $M_n = m$) gemäß

$$m \mapsto \begin{cases} \max\{2, \sum_{i=0}^{k} a_i^2\} & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ 2 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1-p \end{cases}$$

wobei $p \in (0, 1)$ fixiert ist.

(a) Zeigen Sie $\mathscr{C}_2 := \{j \in \mathcal{S} : 2 \leftrightarrow j\} = \{2, 4, 16, 20, 37, 42, 58, 89, 145\}$ und bestimmen Sie die Periode jedes Zustandes aus $\mathscr{C}_2$.

(b) Bestimmen Sie die Menge der transienten bzw. rekurrenten Zustände. Gibt es nullrekurrente Zustände?

(c) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung π und das Langzeitverhalten der Kette.

(d*) Simulieren Sie $n = 10000$ Schritte der Kette für $p = 0.75$ und $M_0 = 2$. Erstellen Sie ein Säulendiagramm, das die Häufigkeiten $h_i = |\{0 \leq k \leq n : M_k = i\}|$, $i \in \mathscr{C}_2$, darstellt. Berechnen Sie auch die stationäre Verteilung aus (c) und vergleichen Sie π_i mit $h_i/(n+1)$.