Übungen

Abgabetermin: Dienstag 05.06. um 12 Uhr, Briefkasten 56

Aufgabe 27 (5 Punkte)
Es sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine positiv rekurrente Markov-Kette auf $\mathcal{S}$ mit stationärer Verteilung π. Für eine Teilmenge $A \subseteq \mathcal{S}$ und $n \geq 1$ sei

$$\sigma_n(A) \;=\; \inf\{k > \sigma_{n-1}(A) : M_k \in A\}$$

wobei $\sigma_0(A) = 0$. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n(A)}{n} \;=\; \frac{1}{\sum_{i\in A}\pi_i} \quad \mathbb{P}_\lambda\text{-f.s.}$$

für jede Anfangsverteilung λ.

Aufgabe 28 (5 Punkte)
Für die symmetrische Irrfahrt $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf $\mathbb{Z}$ sei $N_n(i)$ die Anzahl der Besuche des Zustands i bis zum Zeitpunkt n, d.h. $N_n(i) = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{M_k=i\}}$.

(a) Zeigen Sie

$$\mathbb{E}_i\, N_{2n}(i) \;=\; (2n+1)\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Folgern Sie mit Hilfe der Stirling'schen Formel $\mathbb{E}_i\, N_n(i) \simeq c\sqrt{n}$ für $n \to \infty$ und ein geeignetes $c > 0$.

Aufgabe 29 (5 Punkte)
Bei einem wiederholten Würfelwurf mit einem fairen Würfel bezeichne S_n die Gesamtanzahl der Augen bis zum n-ten Wurf.

(a) Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n$ ist durch 13 teilbar).

(b) Ändert sich der Limes aus (a), wenn man mit zwei statt einem Würfel würfelt?

Bitte wenden!

Aufgabe 30 (5 Punkte)
Es sei P eine endliche Übergangsmatrix auf $\mathcal{S}$. Zeigen Sie:

(a) Eine Verteilung π auf $\mathcal{S}$ ist genau dann stationär für P wenn

$$\pi \cdot (I - P + A) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}^t$$

gilt, wobei I die Einheitsmatrix und $A = (a_{ij})_{i,j \in \mathcal{S}}$ mit $a_{ij} = 1$ für alle $i, j \in \mathcal{S}$ sei.

(b) Es sei nun P irreduzibel und π die eindeutige stationäre Verteilung für P.

(i) Zeigen Sie

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} P^k \; = \; Q$$

wobei die Zeilen der Matrix $Q = (q_{ij})_{i,j \in \mathcal{S}}$ gegeben sind durch π, d.h. $q_{ij} = \pi_j$ für alle $i, j \in \mathcal{S}$.

(ii) Bestimmen Sie den Rang, die rechten Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von Q.

(iii) Zeigen Sie, dass $I - P + A$ invertierbar ist.