Institut für
Mathematische Statistik

Alsmeyer: Markov-Ketten
SS 2012, Blatt 6

Übungen

Abgabetermin: Dienstag 22.05. um 12 Uhr, Briefkasten 56

Aufgabe 22 (5 Punkte)
N durchnumerierte Kugeln werden auf zwei Urnen A und B verteilt, und es bezeichne M_n die Anzahl der Kugeln in Urne A nach n Ziehungen. In jeder Ziehung wird gleichverteilt eine Kugel gewählt und mit Wkeit $1/2$ in Urne A bzw. B gelegt. Alle auftretenden Ziehungen seien dabei unabhängig voneinander.

(a) Zeigen Sie, dass $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible, positiv rekurrente und aperiodische Markov-Kette auf $\mathcal{S} = \{0, \ldots, N\}$ ist und bestimmen Sie ihre Übergangsmatrix P.

(b) Zeigen Sie, dass es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{j\in\mathcal{S}} jp_{ij} = ai + b$ für alle $i \in \mathcal{S}$ gibt. Bestimmen Sie induktiv $\mathbb{E}_i\, M_n$, $n \in \mathbb{N}$, und damit $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_i\, M_n$.

(c) Berechnen Sie die stationäre Verteilung für P und μ_{ii} für alle $i \in \mathcal{S}$.

Aufgabe 23 (4 Punkte)
Es seien $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine diskrete Markov-Kette auf $\mathcal{S}$ mit Übergangsmatrix P und $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ eine surjektive Abbildung mit

$$P(i, f^{-1}(\{k'\})) \;=\; P(j, f^{-1}(\{k'\}))$$

für alle $k' \in \mathcal{S}'$ und alle $i, j \in \mathcal{S}$ mit $f(i) = f(j)$.

(a) Zeigen Sie, dass $(f(M_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine diskrete Markov-Kette auf $\mathcal{S}'$ ist und bestimmen Sie die Übergangsmatrix P'.

(b) Zeigen Sie: Ist P irreduzibel, so auch P'.

(c) Es sei π ein endliches, stationäres Maß für P. Bestimmen Sie mit Hilfe von π ein endliches, stationäres Maß für P'.

Aufgabe 24 (4 Punkte)
Es sei $P = (p_{ij})_{i,j\in\mathcal{S}}$ eine Übergangsmatrix und $\mathscr{T} \neq \emptyset$ die Menge ihrer transienten Zustände. Zeigen Sie: Für einen rekurrenten Zustand $j \in \mathcal{S}$ gilt

$$f_{ij}^* \;=\; \sum_{k\in\mathscr{T}} p_{ik} f_{kj}^* \;+\; \sum_{k\in\mathscr{C}_j} p_{ik}$$

für alle $i \in \mathscr{T}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 25 (3+3* Punkte)

(a) Es seien $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette auf $\mathcal{S}$ und λ, π zwei Verteilungen auf $\mathcal{S}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}_\lambda^{M_k} - \pi\| \;=\; 0.$$

Zeigen Sie, dass π eine stationäre Verteilung für $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist.

(b*) Programmieren Sie eine Funktion $\mathrm{TV}(n,\lambda)$, die den Totalvariationsabstand zwischen $B(n,\frac{\lambda}{n})$ und $\mathrm{Poi}(\lambda)$ berechnet. Stellen Sie für $\lambda = 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ jeweils den Verlauf von $\mathrm{TV}(n,\lambda)$ für $n = 100, 101, \ldots, 1000$ graphisch dar und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 26 (4 Punkte)
Es sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine diskrete Markov-Kette auf $\mathcal{S}$ mit Übergangsmatrix P. Für $n \in \mathbb{N}$ und $i, j, k \in \mathcal{S}$ mit $j \neq k$ definiere

$$p_{ij/k}^{(n)} \;:=\; \mathbb{P}_i(M_n = j, M_l \neq k \text{ für alle } l = 1, \ldots, n-1).$$

Beschreiben Sie die Wahrscheinlichkeit $p_{ij/k}^{(n)}$ in Worten und zeigen Sie

$$p_{ij}^{(n)} \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} p_{ii}^{(k)} p_{ij/i}^{(n-k)}$$

für alle $i \neq j$.