Übungen

Abgabetermin: Dienstag 15.05. um 12 Uhr, Briefkasten 56

Aufgabe 17 (5 Punkte)
Beweisen Sie Satz 2.18. aus der Vorlesung.

Aufgabe 18 (3 Punkte)
k rote und k schwarze Kugeln werden auf zwei Urnen mit jeweils k Kugeln aufgeteilt. Es sei M_n die Anzahl roter Kugeln in der ersten Urne. Im Schritt $n \mapsto n+1$ ziehen wir gleichverteilt jeweils eine Kugel aus beiden Urnen und legen sie vertauscht zurück.

(a) Zeigen Sie, dass $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible, aperiodische Markov-Kette ist und bestimmen Sie die Übergangsmatrix P.

(b) Berechnen Sie eine stationäre Verteilung für P.

Aufgabe 19 (3 Punkte)
Es sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette auf $\mathbb{N}_0$ mit Übergangsmatrix P, gegeben durch $p_{00} = 1$ und $p_{ij} = e^{-i} \cdot \frac{i^j}{j!}$ für $i \geq 1$, $j \geq 0$.

(a) Bestimmen Sie die Kommunikationsklassen, die Periode jedes Zustandes und entscheiden Sie, welche Zustände rekurrent bzw. transient sind.

(b) Zeigen Sie, dass $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ unter jeder Anfangsverteilung λ ein Martingal ist.

(c) Bestimmen Sie den $\mathbb{P}_\lambda$-fast sicheren Limes von $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Aufgabe 20 (4 Punkte)
Für eine Verteilung $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf $\mathbb{N}_0$ sei die Übergangsmatrix P auf $\mathbb{N}_0$ gegeben durch

$$p_{0j} = p_j \quad \text{und} \quad p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i} & \text{für } j = 0, \dots, i-1 \\ 0 & \text{für } j \geq i \end{cases}$$

für alle $i \geq 1, j \geq 0$.

(a) Unter welchen Bedingungen an $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist P irreduzibel und rekurrent?

(b) Zeigen Sie: Ist π ein stationäres Maß für P, so gilt $\sum_{n\geq 1} \frac{\pi_n}{n} < \infty$.

(c) Bestimmen Sie im Fall $p_0 = 0$, $p_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $n \geq 1$, ein stationäres Maß π für P. Ist die Kette positiv rekurrent?

Aufgabe 21 (5 Punkte)
Beweisen Sie Satz 2.23. aus der Vorlesung.