Institut für
Mathematische Statistik

Alsmeyer: Markov-Ketten
SS 2012, Blatt 4

Übungen

Abgabetermin: Dienstag 08.05. um 12 Uhr, Briefkasten 56

Aufgabe 13 (5 Punkte)
Gegeben sei die Übergangsmatrix auf $\mathcal{S} = \{1, \ldots, 8\}$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Zeichnen Sie den zugehörigen Übergangsgraphen und bestimmen Sie die Kommunikationsklassen, die Periode jedes Zustandes und die Menge der stationären Verteilungen.

Aufgabe 14 (5 Punkte)
Gegeben sei eine diskrete Markov-Kette $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf $\mathcal{S}$ mit Übergangsmatrix P. Für $A \subseteq \mathcal{S}$ sei $\tau := \inf\{n \geq 0 : M_n \in A\}$. Angenommen, es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $\alpha \in (0,1)$ mit $P^N(j, A) \geq \alpha$ für alle $j \in A^c$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $k \in \mathbb{N}$ und $i \in \mathcal{S}$ gilt $\mathbb{P}_i(\tau > kN) \leq (1-\alpha)^k$. Folgern Sie $\mathbb{E}_i\,\tau \leq \frac{N}{\alpha}$ für alle $i \in \mathcal{S}$. Insbesondere ist $\tau < \infty$ $\mathbb{P}_i$-f.s.

(b) Für alle $u > 0$ und $i \in \mathcal{S}$ gilt $\mathbb{P}_i(\tau > u) \leq (1-\alpha)^{-1}(1-\alpha)^{u/N}$. Folgern Sie $\mathbb{E}_i\, e^{t\tau} < \infty$ für jedes $t < -\frac{1}{N}\log(1-\alpha)$ und $i \in \mathcal{S}$.

Aufgabe 15 (5 Punkte)
Es sei M_n die Anzahl von sich bewegenden Teilchen in einem festen Volumen. Wir nehmen an, dass im Zeitschritt $n \mapsto n+1$ jedes Teilchen mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ das Volumen verlässt und eine Poi(λ)-verteilte Anzahl neuer Teilchen von außen hinzukommt. Alle auftretenden Teilchenbewegungen seien dabei unabhängig voneinander. Zeigen Sie: $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine irreduzible Markov-Kette auf $\mathbb{N}_0$ mit Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{ij} \;=\; e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{i\wedge j} \binom{i}{k} (1-p)^k p^{i-k} \frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!}$$

und stationärer Verteilung $\pi = \text{Poi}\left(\frac{\lambda}{p}\right)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 16 (5 Punkte)
Gegeben sei eine zufällige Anzahl $N \in \mathbb{N}$ stochastisch unabhängiger Markov-Ketten $(M^{(m)})_{1\leq m\leq N}$ auf einem endlichen Zustandsraum $\mathcal{S}$ und mit Übergangsmatrix P. Für $j \in \mathcal{S}$ sei $A_n(j)$ die Anzahl der Ketten, die sich zum Zeitpunkt n im Zustand $j \in \mathcal{S}$ befinden. Zeigen Sie für $A_n := (A_n(j))_{j\in\mathcal{S}}$

(a) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Markov-Kette auf $(\mathbb{N}_0)^{\mathcal{S}}$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind die Zufallsgrößen $A_n(i)$, $i \in \mathcal{S}$, stochastisch unabhängig.

(c) Ist π stationär für P, so ist $\lambda = \bigotimes_{i\in\mathcal{S}} \mathrm{Poi}(\pi_i)$ stationär für $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Hinweis: Betrachten Sie die Anzahl $A_n(i,j)$ der Ketten, die zum Zeitpunkt n von i nach j springen. Untersuchen Sie $(A_1(i,j))_{j\in\mathcal{S}}$ bei festem i auf Unabhängigkeit und zeigen Sie $\mathbb{P}_\lambda^{A_1(i,j)} = \mathrm{Poi}(\lambda_{ij})$ für geeignete λ_{ij}.