Übungen

Abgabetermin: **Mittwoch 02.05. um 10 Uhr**, Briefkasten 56

Aufgabe 9 (5 Punkte)
Gegeben sei eine diskrete Markov-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf $\mathcal{S}$ mit Übergangsmatrix P, die keine absorbierenden Zustände besitzt (d.h. $p_{ii} < 1$ für alle $i \in \mathcal{S}$). Für $\tau_0 = 0$ und

$$\tau_{n+1} := \inf\{k > \tau_n : X_k \neq X_{\tau_n}\}$$

definiere $Y_n := X_{\tau_n}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Zeigen Sie, dass $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette ist und bestimmen Sie die Übergangsmatrix P'. Wie lässt sich die neue Kette informell beschreiben?

(b) Es sei π ein stationäres Maß für P. Bestimmen Sie ein stationäres Maß für P'.

Aufgabe 10 (5 Punkte)
Betrachten Sie die Markov-Kette aus Aufgabe 5(a), d.h. die Übergangsmatrix $P = (p_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}_0}$ ist gegeben durch

$$p_{00} = p, \quad p_{i,i+1} = 1 - p \text{ für } i \geq 0 \quad \text{und } p_{i,i-1} = p \text{ für } i \geq 1,$$

und bestimmen Sie ein stationäres Maß für P. Für welche $p \in (0, 1)$ existiert eine stationäre Verteilung?

Aufgabe 11 (5 Punkte)
Gegeben sei eine Markov-Kette mit Zustandsraum $\mathbb{N}$ und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{1,1} = \frac{3}{4} \qquad\qquad p_{i,i+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{i}{i+1}, \quad i \geq 1$$
$$p_{i,i-1} = \frac{1}{2}, \quad i \geq 2 \qquad\qquad p_{i,i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{i+1}, \quad i \geq 2.$$

Bestimmen Sie ein stationäres Maß für $P = (p_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ und zeigen Sie, dass es keine invariante Verteilung gibt.

Bitte wenden!

Aufgabe 12 (5+3* Punkte)
Ein Unternehmen möchte mit $N \in \mathbb{N}$ gleichartigen Maschinen produzieren. Da von diesen am Ende jeder Periode eine Anzahl ausgefallen sind, bestellt das Unternehmen am Anfang jeder Periode so viele Maschinen nach, wie nötig sind, damit am Anfang der nächsten Periode wieder N zur Verfügung stehen, ohne jedoch zu beachten, dass auch in der laufenden Periode wieder Maschinen ausfallen. Sei M_n die Anzahl funktionstüchtiger Maschinen zu Beginn der n-ten Periode und X_n die Anzahl der Maschinen, die während der n-ten Periode ausfallen. Dabei gelte

$$\mathbb{P}(X_n = j \mid M_n = m) = \frac{1}{m+1}, \quad 0 \leq j \leq m, n \in \mathbb{N}_0\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass M_n eine Markov-Kette bildet.

(b) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung π.

(c) Bestimmen Sie die mittlere Anzahl funktionstüchtiger Maschinen unter der stationären Verteilung.

(d*) Simulieren Sie die Kette $(M_j)_{0\leq j\leq n}$ mit $n = 300$, $N = 10$ und $M_0 = N$ in einer Programmiersprache Ihrer Wahl. Berechnen Sie anschließend für $i \in \{0, 3, 6, 10\}$

$$a_j(i) \;:=\; \left|\pi_i - \frac{1}{j+1}\sum_{k=0}^{j} \mathbf{1}_{\{M_k=i\}}\right|, \quad 0 \leq j \leq n,$$

und plotten Sie die 4 Folgen $(a_j(i))_{0\leq j\leq n}$. Lässt sich eine Konvergenz erkennen?

Bitte schicken Sie den Quellcode an `matti.schneider@uni-muenster.de` und geben Sie den Quellcode auch ausgedruckt mit ab. Empfohlen für die Lösung der Programmieraufgaben wird die freie Sprache `R`. Auf der Homepage finden Sie eine Anleitung für den Einstieg in `R`, in der alle benötigten Befehle erklärt werden.