Institut für
Mathematische Statistik

Alsmeyer: Markov-Ketten
SS 2012, Blatt 1

Übungen

Abgabetermin: Dienstag 17.04. um 12 Uhr, Briefkasten 56

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Zufallsvariablen auf einem Zustandsraum $(\mathcal{S},\mathfrak{S})$ und es sei $f:(\mathcal{S},\mathfrak{S})\to(\mathcal{S}',\mathfrak{S}')$ eine messbare Funktion. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist Markov-Kette $\Rightarrow (f(X_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist Markov-Kette

(b) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist Markov-Kette und f ist injektiv $\Rightarrow (f(X_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist Markov-Kette

(c) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sind Markov-Ketten $\Rightarrow ((X_n,Y_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist Markov-Kette auf $(\mathcal{S}^2,\mathfrak{S}^2)$

(d) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sind stoch. unabhängige Markov-Ketten $\Rightarrow ((X_n,Y_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist Markov-Kette auf $(\mathcal{S}^2,\mathfrak{S}^2)$

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i.i.d. Zufallsgrößen mit $\mathbb{P}^{X_i}=p\delta_1+(1-p)\delta_{-1}$. Für welche $p\in[0,1]$ bildet $Y_n:=X_nX_{n+1}, n\in\mathbb{N}_0$, eine Markov-Kette?

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Es sei $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration des messbaren Raumes $(\Omega,\mathfrak{A})$ und σ,τ Stoppzeiten bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Zeigen Sie:

(a) $\{\sigma=\tau\},\{\sigma\le\tau\}\in\mathcal{F}_\sigma\cap\mathcal{F}_\tau$

(b) $\mathcal{F}_\tau\subseteq\mathcal{F}_\infty:=\sigma(\cup_{n\ge 0}\mathcal{F}_n)$

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette auf $\{0,1\}$ mit Startverteilung $\mathbb{P}^{X_0}=\delta_0$ und Übergangsmatrix

$$P=\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

für ein $p\in[\frac{1}{2},1]$. Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{P}(X_n=0)=\frac{1}{2}(1+q^n)$ und $\mathbb{P}(X_n=1)=\frac{1}{2}(1-q^n)$ für alle $n\ge 0$ und ein $q\in[0,1]$.

(b) Bestimmen Sie $\mu_i=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_n=i)$. Was ergibt sich für $\mathbb{P}^{X_n}$ wenn wir die Startverteilung $\mu_0\delta_0+\mu_1\delta_1$ wählen?