

Sebastian Gebennus

**Zur Modellierung und statistischen Auswertung
von PET-Daten**

2009

Mathematik

Zur Modellierung und statistischen Auswertung von PET-Daten

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften im Fachbereich
Mathematik und Informatik
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von
Sebastian Gebennus
aus Essen
-2009-

Dekan: Prof. Dr. Dr. h. c. Joachim Cuntz
Erster Gutachter: Prof. Dr. Gerold Alsmeyer
Zweiter Gutachter: Prof. Dr. Martin Burger

Tag der mündlichen Prüfung: 18.06.2009
Tag der Promotion: 18.06.2009

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt die Entwicklung eines statistischen Auswertungsverfahrens für PET-Daten basierend auf der stochastischen Modellierung der Bewegungspfade der Photonen aus der Positronen-Elektronen-Paarvernichtung. Im Gegensatz zu den etablierten Methoden der tomographischen Bildgebung entwickeln wir zunächst keine Zufallsvariablen für die Messdaten, sondern beginnen mit der Modellierung des dem Sammeln von Messdaten zugrunde liegenden physikalischen Diffusionsprozesses der von den Detektoren des PET-Scanners registrierten Photonenpaare. Die Idee eines stochastischen Diffusionsmodells auf der Basis des Pfadverhaltens der beteiligten Photonen beruht auf der Transportgleichung der Teilchenphysik. Diese beschreibt die Dichte der Photonen innerhalb des Untersuchungsmediums in Abhängigkeit von Neuemissionen, Absorption und Streuung. Die zentrale Herausforderung ist daher, das Pfadverhalten der Photonen unter Berücksichtigung der oben genannten Effekte in hinreichender Übereinstimmung mit seinen in der Realität beobachtbaren Eigenschaften zu modellieren, so dass das resultierende stochastische Modell der Transportgleichung genügt. Im ersten Teil der Arbeit entwickeln wir mehrere aufeinander aufbauende und mit der Transportgleichung konsistente Diffusionsmodelle, welche die real auftretenden physikalischen Effekte in unterschiedlich großer Genauigkeit berücksichtigen. Durch ihren modularen Aufbau ermöglichen sie in der praktischen Anwendung das Finden eines Kompromisses zwischen einer möglichst großen Exaktheit der gewonnenen Lösung und einer möglichst kurzen benötigten Rechenzeit. Im zweiten Teil der Arbeit bestimmen wir die Systemmatrix eines auf den Diffusionsmodellen basierenden statistischen Auswertungsverfahrens, das im Vergleich zu den etablierten Methoden die realen Vorgänge weitaus exakter beschreibt. Auf das resultierende lineare Gleichungssystem lassen sich dieselben bildgebenden Algorithmen anwenden wie auf die entsprechenden Systeme der etablierten Modelle. Mit MLEM, OSEM und dem Kleinst-Quadrat-Schätzer (KQS) stehen einige potente Verfahren zur Rückgewinnung der Quelledichte des Tracers aus den Messdaten zur Verfügung. Der größte Vorteil einer pfadbasierten Modellierung gegenüber den etablierten Modellen ist jedoch die vollständige Berücksichtigung von Absorption und Streuung bereits im zugrunde liegenden Systemmodell, wodurch nachträgliche meist ungenaue und rechenintensive Korrekturen nicht notwendig sind. Alle etablierten Methoden haben gemeinsam, dass sie hauptsächlich den Detektionsprozess, das bedeutet das Sammeln von Messdaten, abbilden und die der Photonen-Diffusion zugrunde liegenden physikalischen Effekte nur durch nachträgliche Korrekturen auf der Basis der gesammelten Messdaten berücksichtigen. Zudem basieren die Korrekturterme größtenteils auf heuristischen Annahmen und sind oftmals sehr ungenau. Eine mit den Erkenntnissen der Teilchenphysik konsistente stochastische Modellierung des Diffusionsprozesses der Annihilationsphotonen bildet daher die Basis für eine umfassendere Beschreibung der Vorgänge im PET-Scanner und eine effektivere Datenauswertung.

Summary

The present thesis is concerned with the development of a statistical evaluation method for PET detection data based on a stochastic model of the diffusion process of photon pairs inside the PET scanner. In positron emission tomography (PET), scanners collect measurements of a patient's in vivo radiotracer distribution. The data acquisition is based on the detection of photon pairs that emerge from positron-electron annihilation. First, we want to provide a stochastic model for the subsequent photon diffusion on which the detection relies. This bottom-up (particle-based) approach differs from the established ones in tomographic imaging in that it does not embark directly on a statistical model for the collected data but rather builds upon the modeling of the underlying physical dynamics behind the detection at the PET scanner. As a basic ingredient for such a stochastic model we adopt the viewpoint that photon diffusion is governed by the transport equation in particle physics. This equation describes the density or the expected number of photons within the examination area as a function of newly emitted particles, attenuation and scatter. We develop several consecutive and with the transport equation consistent diffusion models that consider real physical effects with different degrees of accuracy. Through their modular design, they allow finding a compromise between the accuracy of the extracted solution and the required computation time. In the second part of this thesis, we determine the system matrix of a statistical evaluation method on the basis of the diffusion models which describes the real processes behind PET in greater detail and thus more exactly than concurrent models. On the other hand, the resulting system of linear equations can be treated with the same algorithms from image reconstruction as those derived by other methods. For the statistical reconstruction of the radiotracer density (also called source density), powerful methods like MLEM, OSEM and the Least-Square method are available. However, we believe that the biggest advantage of a particle-based approach is that it includes attenuation and scatter as built-in features in the system model. This avoids the need for typically rather inaccurate and computationally intensive ex post corrections, a common necessity of all established methods. With a restricted focus on the detection process, that is the way measurements are collected, they leave the dynamics „behind the curtain“ as a black box. As a consequence, the afore-mentioned corrections to account for attenuation and scatter are mostly built upon heuristic assumptions. One with knowledge of particle physics consistent stochastic modelling of the photon diffusion process constitutes the basis for a comprehensive description of the processes inside the PET scanner and a more effective data analysis.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Inhalt und Aufbau der Arbeit	1
1.2	Notation	1
2	Motivation	3
2.1	Das Prinzip der PET	3
2.2	Das Sammeln von Messdaten	4
2.3	Gängige Verfahren zur Auswertung gewonnener Messdaten	5
2.3.1	Analytische Verfahren	6
2.3.2	Iterative Verfahren	7
3	Das Diffusionsmodell mit konstanter Absorptions- und Streuungsrate	9
3.1	Diffusionsmodell ohne Absorption und Streuung (Modell M)	10
3.1.1	Die Teilchenprozesse und die Transportgleichung	10
3.1.2	Stationäre Version des Diffusionsmaßes (M)	13
3.2	Diffusionsmodell mit globaler Absorptionsrate (Modell MA)	14
3.2.1	Berechnung der Dichte des Diffusionsmaßes (MA)	14
3.2.2	Bestimmung der Transportgleichung (MA)	15
3.2.3	Stationäre Version des Diffusionsmaßes (MA)	16
3.3	Diffusionsmodell mit einfacher Streuung am Emissionsort (Modell MASE)	17
3.3.1	Berechnung der Dichte des Diffusionsmaßes (MASE)	17
3.3.2	Bestimmung der Transportgleichung (MASE)	21
3.3.3	Stationäre Version des Diffusionsmaßes (MASE)	22
3.4	Diffusionsmodell mit einfacher Streuung im PET-Zylinder (Modell MAS)	23
3.4.1	Berechnung der Dichte des Diffusionsmaßes (MAS)	24
3.4.2	Bestimmung der Transportgleichung (MAS)	26
3.4.3	Stationäre Version des Diffusionsmaßes (MAS)	28
3.5	Diffusionsmodell mit Mehrfachstreuung (Modell MAMS)	29
3.5.1	Modellierung der Streueignisse	29
3.5.2	Bestimmung der Dichte des Diffusionsmaßes (MAMS)	30
3.5.3	Bestimmung der Transportgleichung (MAMS)	33
3.5.4	Stationäre Version des Diffusionsmaßes (MAMS)	35
4	Diffusionsmodell mit ortsabhängiger Absorptionsrate	37
4.1	Der diskrete Ansatz mit einer treppenförmigen Absorptionsratenfunktion (Modell MDA)	37
4.1.1	Bestimmung der Transportgleichung (MDA)	40
4.1.2	Stationäre Version des Diffusionsmaßes (MDA)	41
4.2	Diffusionsmodell mit stetiger Absorptionsratenfunktion (Modell MSA)	41
4.2.1	Berechnung der Dichte des Diffusionsmaßes (MSA)	42

4.2.2	Bestimmung der Transportgleichung (MSA)	43
4.2.3	Stationäre Version des Diffusionsmaßes (MSA)	43
5	Diffusionsmodell mit ortsabhängiger einfacher Streuung im PET-Zylinder	44
5.1	Der diskrete Ansatz mit treppenförmiger Absorptions- und Streuungsratenfunktion (Modell MDAS)	44
5.1.1	Bestimmung der Transportgleichung (MDAS)	46
5.1.2	Stationäre Version des Diffusionsmaßes (MDAS)	49
5.2	Diffusionsmodell mit einfacher Streuung bei stetiger Absorptions- und Streuungsratenfunktion (Modell MSAS)	50
5.2.1	Berechnung der Dichte des Diffusionsmaßes (MSAS)	50
5.2.2	Bestimmung der Transportgleichung (MSAS)	51
5.2.3	Stationäre Version des Diffusionsmaßes (MSAS)	52
6	Diffusionsmodell mit ortsabhängiger Mehrfachstreuung	53
6.1	Der diskrete Ansatz mit treppenförmiger Absorptions- und Streuungsratenfunktion (Modell MDAMS)	53
6.1.1	Bestimmung der Transportgleichung (MDAMS)	55
6.1.2	Stationäre Version des Diffusionsmaßes	58
6.2	Diffusionsmodell mit Mehrfachstreuung bei stetiger Absorptions- und Streuungsratenfunktion (Modell MSAMS)	58
6.2.1	Berechnung der Dichte des Diffusionsmaßes (MSAMS)	58
6.2.2	Bestimmung der Transportgleichung (MSAMS)	59
6.2.3	Stationäre Version des Diffusionsmaßes (MSAMS)	60
7	Übertragung der Ergebnisse auf den zweidimensionalen Fall	61
7.1	Anpassung der Diffusionsmodelle	61
7.2	Die Transportgleichung im zweidimensionalen Fall	64
8	Statistische Auswertung von PET-Daten	70
8.1	Auswertung im Ein-Teilchen-Modell (SPECT)	70
8.1.1	Entwicklung des Ein-Teilchen-Detektionsmodells	72
8.1.2	Problematik des Ein-Teilchen-Modells	73
8.2	Auswertung im Zwei-Teilchen-Modell (PET)	74
8.2.1	Ein Integralgleichungssystem zur Auswertung der Messdaten	74
8.2.2	Berechnung der erwarteten Anzahl von Teilchenpaaren bei gegebener Punktquelle	75
8.3	Aufstellung des linearen Gleichungssystems für die zu bestimmende Quelledichte	84
8.3.1	Bestimmung der Systemmatrix für das Modell MSAS im zweidimensionalen Fall	84

8.3.2	Bestimmung der Systemmatrix für das Modell MSAMS im zweidimensionalen Fall	94
8.3.3	Bestimmung der Systemmatrix für das Modell MSAS im dreidimensionalen Fall	95
8.3.4	Bestimmung der Systemmatrix für das Modell MSAMS im dreidimensionalen Fall	100
8.4	Ein alternatives Auswertungsverfahren zur numerischen Implementierung .	102
8.4.1	Modifizierung der Systemmatrix-Koeffizienten	103
8.4.2	Approximation der modifizierten Systemmatrix-Koeffizienten	108
8.5	Implementierung und erste Ergebnisse der Datenauswertung	115
9	Zusammenfassung und Ausblick	118
	Symbolverzeichnis	120
	Literaturverzeichnis	125

1 Einleitung

1.1 Inhalt und Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in zwei große Abschnitte. Im ersten Abschnitt (Kapitel 3 bis 7) entwickeln wir mehrere aufeinander aufbauende und mit der Transportgleichung konsistente stochastische Modelle für die Diffusion der Photonen aus der Positronen-Elektronen-Annihilation. Diese beschreiben die real auftretenden physikalischen Effekte innerhalb des PET-Scanners in unterschiedlich großer Genauigkeit. Kapitel 3 befasst sich mit den einfachen Modellen mit konstanter Absorptions- und Streuungsrate. In diesem Kapitel stellen wir die grundlegende Methodik vor, mithilfe derer wir die für die einzelnen Modelle geltenden Transportgleichungen herleiten. Darauf aufbauend erweitern wir unsere Diffusionsmodelle in den Kapiteln 4 bis 6 schrittweise um ortsabhängige Absorption, einfache ortsabhängige Streuung und mehrfache ortsabhängige Streuung. In Kapitel 7 übertragen wir die gewonnenen Ergebnisse vom 3D-Modell auf das Modell eines zweidimensionalen PET-Scanners. Unsere Modelle bilden somit die mathematische Grundlage für ein ganzes Spektrum von unterschiedlichen Auswertungsmethoden.

Der zweite große Abschnitt dieser Arbeit (Kapitel 8) behandelt die Entwicklung eines statistischen Auswertungsverfahrens für PET-Daten auf der Basis der Diffusionsmodelle, das wir analog zu den Diffusionsmodellen ebenfalls schrittweise entwickeln. Nach der Erläuterung der verwendeten Methoden (Abschnitt 8.1 und 8.2) bestimmen wir die Systemmatrix zunächst für den zweidimensionalen Fall mit konstanter Absorptions- und Streuungsrate bei mehrfacher Streuung. Daraufhin verallgemeinern wir diese für den dreidimensionalen Fall mit ortsabhängiger Absorption und Streuung (Abschnitt 8.3). In Abschnitt 8.4 geben wir ein äquivalentes Auswertungsverfahren an und entwickeln eine zugehörige mathematische Näherung, die in relativ einfacher Weise numerisch implementiert werden kann. Abschließend präsentieren wir in Abschnitt 8.5 erste Ergebnisse des zugehörigen Auswertungsalgorithmus und einen Vergleich mit den Ergebnissen der klassischen bildgebenden Methoden.

1.2 Notation

In der vorliegenden Arbeit verwenden wir durchgehend die folgende Notation: Es bezeichne $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Die Mengen der ganzen, rationalen und reellen Zahlen werden mit \mathbb{Z} , \mathbb{Q} und \mathbb{R} notiert. In allen Kapiteln dieser Arbeit liegt ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ zugrunde, wobei wir stets davon ausgehen, dass der Raum so groß ist, dass sämtliche vorkommenden Zufallsvariablen auf ihm definiert und bezüglich der σ -Algebra \mathcal{A} messbar sind. Für Teilmengen von \mathbb{R}^d oder Funktionen auf \mathbb{R}^d (für $d > 0$) wird der Messbarkeitsbegriff im Sinne der Borel-Messbarkeit verwendet. Das Lebesguemaß auf \mathbb{R} bezeichnen wir mit λ . Für das Bildmaß $\mathbb{P}(X \in \cdot)$ einer Zufallsvariable X unter \mathbb{P} verwenden wir an einigen Stellen die Abkürzung $\mathbb{P}^X(\cdot)$. In den späteren Kapi-

teln der Arbeit tauchen zudem häufig leere Summen der Form $\sum_{i=0}^{-1}$ und leere Produkte der Form $\prod_{i=0}^{-1}$ auf. Diese seien durchgängig und unabhängig von ihrer Verwendung als 0 beziehungsweise 1 definiert.

Für die gute Betreuung und zahlreiche Anregungen und Diskussionen während der Entstehungsphase dieser Arbeit danke ich Herrn Prof. Dr. Gerold Alsmeyer. Weiterhin gebührt mein Dank Dr. Frank Wübbeling, Dipl.-Math. Thomas Kösters und Dipl.-Math. Jahn Philipp Müller, die mich mit Anregungen unterstützt und zu dieser Arbeit durch die numerische Implementierung des alternativen Auswertungsverfahrens im zweidimensionalen Fall bei einfacher Streuung beigetragen haben, sowie dem Sonderforschungsbereich 656 Molekulare Kardiovaskuläre Bildgebung, aus dessen Mitteln meine Stelle zeitweise finanziert wurde. Ebenso danke ich Frau Dipl.-Math. Silke Ahlers für die Durchsicht meiner Arbeit und ihre freundschaftliche Gesellschaft als Bürokollegin.

2 Motivation

Die Geschichte der tomographischen Bildrekonstruktion beginnt in den späten 1960er Jahren. Seitdem wurden ihre Verfahren stetig weiterentwickelt. Heute finden die Methoden der tomographischen Bildrekonstruktion neben ihren wichtigsten Einsatzgebieten in der Nuklearmedizin auch in zahlreichen weiteren Anwendungs- und Forschungsfeldern Verwendung. Die Positronen-Emissions-Tomographie (PET) ist ein bildgebendes Verfahren der Nuklearmedizin, das dreidimensionale Bilder von lebenden Organismen erzeugt, indem es die Verteilung einer dem Organismus zuvor verabreichten, schwach radioaktiv markierten Substanz (Radiopharmakon, im Folgenden Tracer genannt) sichtbar macht und damit biochemische und physiologische Vorgänge abbildet. Für die Herstellung der Tracer verwendet man radioaktive Isotope (so genannte Nuklide), die mithilfe eines Zyklotrons hergestellt und aufgrund ihrer meist relativ langen Halbwertszeit über weite Strecken transportiert werden können.

2.1 Das Prinzip der PET

Einige Zeit nach der Verabreichung in den Blutkreislauf des Patienten konzentriert sich der Tracer in den zu untersuchenden Gewebepartien (Tumore, Krebsgeschwüre oder Plaques in Blutgefäßen). Beim Zerfall emittiert dieser fortwährend Positronen, welche nach dem Zurücklegen einer kurzen Wegstrecke auf freie Elektronen treffen. Beim Aufeinandertreffen von Positronen und Elektronen kommt es zur Paarvernichtung (Annihilation). Hierbei entstehen Paare von sich in nahezu exakt entgegengesetzte Richtungen bewegendes Annihilationsphotonen (γ -Photonen) mit einer Energie von exakt 511 keV, die beim Auftreffen auf die Detektoren (Szintillationskristalle) des PET-Scanners als so genannte Koinzidenzen registriert werden. Die vom PET-Scanner gesammelten Daten werden daraufhin zu einem dreidimensionalen Bild der räumlichen Verteilung der erfolgten Annihilationen verrechnet, welches wiederum Rückschlüsse auf die Verteilung des Tracers und damit auf die Ausdehnung und Lage der markierten Gewebepartien zulässt. Die charakteristische Eigenschaft der PET ist also, dass ausschließlich Photonen registriert werden, welche die Detektoren in Paaren (in der Regel innerhalb eines (Koinzidenz-)Zeitfensters von wenigen Nanosekunden) erreichen. Weiterführende Informationen zu den physikalischen Hintergründen findet man in den Arbeiten [Wer1] und [Ber]. Eine Einführung in die mathematischen Grundlagen bildgebender Verfahren liefern die Arbeiten beziehungsweise Monographien [Her], [Kak] und [Nat1]. Für weiterführende Informationen verweisen wir außerdem auf [Bar], [Nat2] und [Wer2].

Alle erhältlichen PET-Systeme verwenden als Detektormaterial entweder Bismutgermanat (BGO, $\text{Bi}_4\text{Ge}_3\text{O}_{12}$) oder mit Ce^{3+} dotierte Verbindungen wie Lutetiumyttriumoxoorthosilikat (LYSO, $\text{LuYSiO}_5:\text{Ce}^{3+}$) oder Lutetiumoxyorthosilikat (LSO, $\text{Lu}_2\text{SiO}_5:\text{Ce}^{3+}$). Durch die kurze Abklingzeit von LSO und LYSO werden PET-Systeme mit deutlich kleineren Koinzidenzzeitfenstern als bei Verwendung des Kristallmaterials BGO ermöglicht. Ein

kleineres Koinzidenzzeitfenster verringert die Zahl der gemessenen Zufallskoinzidenzen (so genannte Randoms) und verbessert auf diese Weise das Signal-Rausch-Verhältnis.

2.2 Das Sammeln von Messdaten

Für das Sammeln von Messdaten stehen der PET zwei unterschiedliche Methoden zur Verfügung: der 2D- und der 3D-Modus. Beide Modi werden zur Erzeugung dreidimensionaler Bilder verwendet. Ihre Bezeichnungen beziehen sich lediglich auf die verschiedenen Messmethoden, denen ein Modell basierend auf Linienintegralen zugrunde liegt. Ignoriert man physikalische Effekte wie Absorption, Streuung, zufällige Koinzidenzen und Variationen in der Effizienz von Detektoren, so ist für ein bestimmtes Detektorenpaar die erwartete Anzahl von gemessenen Koinzidenzen proportional zur Menge des Tracers innerhalb des *Koinzidenzvolumens* (KV, im 3D-Modus) beziehungsweise innerhalb der *Koinzidenzfläche* (KF, im 2D-Modus). Das Koinzidenzvolumen beziehungsweise die Koinzidenzfläche bezeichnet das parallele Verbindungsvolumen beziehungsweise die parallele Verbindungsfläche der beiden Detektoren. Diese setzen sich aus *Koinzidenzlinien* (KL), den Verbindungslinien zweier Punkte auf dem äußeren Rand des PET-Scanners, zusammen.

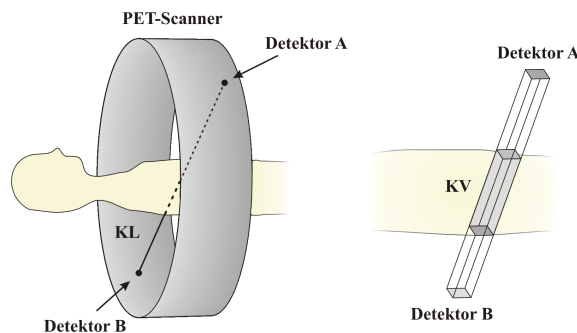


Abbildung 1: Messverfahren eines zylinderförmigen PET-Scanners mit dem Koinzidenzvolumen eines Detektorenpaares (A, B) .

Im 2D-Modus werden dabei nur Koinzidenzlinien berücksichtigt, die innerhalb von zuvor spezifizierten Querschnittsflächen durch den Körper des Patienten liegen. Technisch wird dies durch Abschirmung der Detektoren mithilfe von Septen erreicht. Die Menge der Linienintegrale der Koinzidenzlinien einer solchen Querschnittsfläche entspricht dabei den Projektionen der Dichte f des Tracers (die wir im Folgenden als *Quelldichte* bezeichnen) für alle Ortskoordinaten s und Winkel φ . Der Verbund $p(s, \varphi)$ aller Projektionen für s und $0 \leq \varphi < 2\pi$ wird als *Sinogramm* bezeichnet.

Die Abbildung $f(x, y) \rightarrow p(s, \varphi)$ entspricht im zweidimensionalen Fall der *Radontransformation* von Linienintegralen. Um letztendlich ein Abbild der dreidimensionalen Quelldichte $f(x, y, z)$ zu erhalten, werden die Sinogramme der verschiedenen transaxialen Querschnittsflächen zu einem dreidimensionalen Bild verrechnet. Im 3D-Modus werden zusätzlich alle Koinzidenzlinien berücksichtigt, die mehrere transaxiale Querschnittsflächen schneiden. Dabei ergeben sich sowohl Vor- als auch Nachteile. Die wesentlichen Vorteile

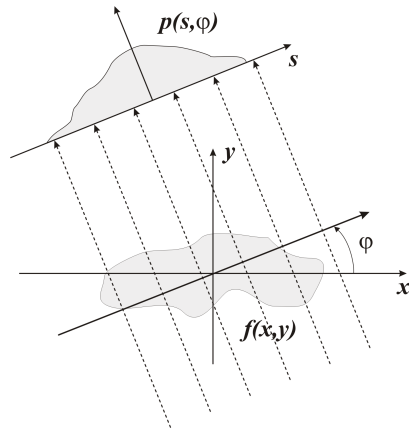


Abbildung 2: Projektion entlang paralleler Koinzidenzlinien bei festem Winkel φ .

sind eine erhöhte Sensitivität und eine Verbesserung des Signal-Rausch-Verhältnisses. Die Nachteile sind dagegen ein um das Tausendfache erhöhter Speicherbedarf, eine deutlich verlängerte Rechenzeit sowie eine Vermehrung von Messfehlern aufgrund von Streueignissen. Moderne Verfahren zur Streukorrektur haben letzteres Problem jedoch entschärft. Nähere Informationen zur Streukorrektur findet man in [Oll1] und [Wol].

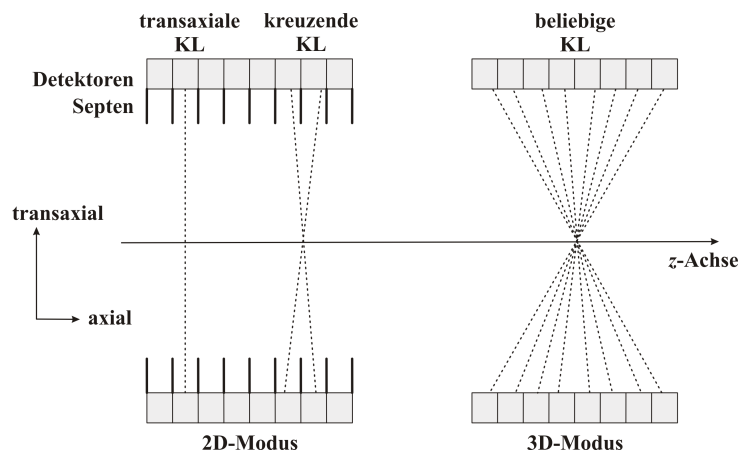


Abbildung 3: Vergleich der beiden Messverfahren der PET. Im 2D-Modus werden nur KL im selben Querschnittsvolumen beziehungsweise kreuzende KL innerhalb benachbarter Querschnittsvolumina registriert.

2.3 Gängige Verfahren zur Auswertung gewonnener Messdaten

Bei den Methoden der Bildrekonstruktion aus den gewonnenen Daten unterscheidet man zwischen *analytischen* und *iterativen Ansätzen*. Die analytischen Ansätze liefern eine direkte mathematische Lösung des zu rekonstruierenden Bildes, wohingegen die mathematisch anspruchsvolleren iterativen Ansätze mehrere Arbeitsschritte benötigen, um zu einem adäquaten Bild zu gelangen. Dabei sind sie wesentlich genauer, weil sie auf einer weitaus detaillierteren Beschreibung des Bildgebungsprozesses basieren. Grundlage aller Verfahren

ist ein lineares Gleichungssystem der Form $m = Af + n$, wobei der Vektor m die Messdaten der einzelnen Detektorenpaare, A das Systemmodell (auch *Systemmatrix* genannt), f die unbekannte Quelldichte und n den Fehler in den Messdaten repräsentiert. Die Messdaten werden entweder *deterministisch* oder *stochastisch* modelliert. Die erste Methode setzt voraus, dass die Daten kein statistisches Rauschen enthalten. Somit ist der Fehlerterm n in obigem linearen Gleichungssystem ebenfalls deterministisch. Dabei handelt es sich um ein idealisiertes Modell, dessen Anwendung Bilder mit sehr geringer Auflösung und schlechten Rauscheigenschaften produziert. Deswegen wird meistens eine stochastische Modellierung der Messdaten bevorzugt, welche die auftretenden physikalischen Effekte wie Absorption, Streuung und zufällige Koinzidenzen berücksichtigt. Aufgrund des statistischen Rauschens ist es in diesem Modell nicht möglich, eine exakte Lösung für die Verteilung der Quelldichte zu finden. Es werden jedoch verschiedene Schätzmethoden zum Finden einer geeigneten Näherung der Quelldichte verwendet.

2.3.1 Analytische Verfahren

Den wichtigsten analytischen Ansatz stellt die *gefilterte Rückprojektion* dar. Dabei werden für jeden Winkel φ die Werte von $p(s, \varphi)$ auf die entsprechenden KL rückübertragen.

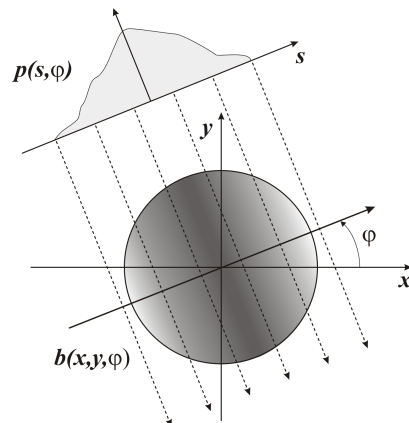


Abbildung 4: Rückprojektion $b(x, y, \varphi)$ der Werte $p(s, \varphi)$ entlang aller KL eines festen Winkels φ .

Bei der Überlagerung der rückprojizierten Bilder $b(x, y, \varphi)$ für alle Winkel φ werden jedoch Punkte, die sich weiter im Inneren des PET-Scanners befinden, im Vergleich zu denen an dessen Rand überbewertet, da sie von einer größeren Anzahl KL berührt werden. Diesen ungewollten Effekt vermeidet man durch den Einsatz eines geeigneten Filters. Im 3D-Modus hat sich der *Dreidimensionale-Rückprojektions-Algorithmus* (3DRP) bewährt, der in der Arbeit [Kin1] beschrieben wird. Eine weitere analytische Rekonstruktionsmethode ist die Verrechnung (das so genannte *Rebinning*) von im 2D-Modus generierten Sinogrammen einzelner Querschnittsflächen zu einem 3D-Sinogramm. Die am häufigsten verwendeten Verrechnungsmethoden sind der einfache Single-Slice Algorithmus (SSRB)

und der weitaus genauere Fourier Rebinning Algorithmus (FORE). Diese werden in den Arbeiten [Dau] beziehungsweise [Def] beschrieben.

2.3.2 Iterative Verfahren

Die iterativen Ansätze zur Bildrekonstruktion stellen gegenüber den analytischen einen Fortschritt dar, da ihnen ein deutlich genaueres Systemmodell zugrunde liegt. Durch die erhöhte Komplexität treten jedoch mathematisch sowie technisch unlösbare Probleme auf. Deswegen werden iterative Näherungen verwendet, die eine anfängliche Schätzung der unbekanntenen Verteilung der Quelldichte in mehreren Iterationsschritten sukzessive verbessern. Im Vergleich zu den analytischen Ansätzen führt dies in der Regel zu wesentlich schärferen Bildern, allerdings wird auch eine deutlich längere Rechenzeit benötigt.

Alle iterativen Ansätze basieren auf fünf Komponenten. Die erste ist ein Modell des zu erhaltenden Bildes. Für dieses Modell wird der Definitionsbereich der stetigen Quelldichte f in N disjunkte Pixel (Bildelemente im zweidimensionalen Fall) beziehungsweise Voxel (Bildelemente im dreidimensionalen Fall) diskretisiert. Als zweites wird eine Systemmatrix $A = (A_{ij})$ benötigt, deren Komponenten A_{ij} die Wahrscheinlichkeit angeben, dass ein im Voxel j emittiertes Photonenpaar in der Projektion (der KL oder dem zugehörigen Detektorenpaar) i registriert wird. Im Kontext dieser Arbeit ist dabei zu beachten, dass sich der Wert A_{ij} lediglich aus der Länge des streckenförmigen Durchschnitts der KL i und dem Voxel j ergibt und keinerlei Informationen über Absorption und Streuung enthält. Aus dem Systemmodell resultiert der lineare Zusammenhang

$$\bar{m}_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} f_j,$$

wobei \bar{m}_i die erwartete Anzahl der Messungen in der Projektion i und f_j den Wert der diskretisierten Quelldichte im Voxel j bezeichnet. Die dritte Komponente stellt ein Modell für die Messdaten dar. Dieses beschreibt den statistischen Zusammenhang zwischen den erwarteten und den tatsächlich gemessenen Daten und geht von Poisson-verteilten Messdaten $M = (m_i)_{i=1,\dots,K}$ mit Mittelwerten $(\bar{m}_i)_{i=1,\dots,K}$ aus. Dadurch ergibt sich die Likelihood-Funktion

$$L(M = m|f) = \prod_{i=1}^K \frac{\bar{m}_i^{m_i} \exp(-\bar{m}_i)}{m_i!},$$

wobei als Auswahlprinzip für das „beste“ Bild der *Maximum Likelihood Schätzer* (MLS) (die vierte Komponente der iterativen Ansätze) und zum Erhalt einer numerischen Approximation dessen schließlich ein *Expectation Maximization Algorithmus* (EM) (die fünfte Komponente) verwendet wird. Der *Maximum Likelihood Expectation Maximization Algorithmus* (MLEM) bildet seit seiner Einführung in das Forschungs- und Anwendungsfeld der Bildrekonstruktion im Jahr 1982 (vergleiche [She]) die Basis für die wichtigsten gegenwärtig verwendeten statistischen Methoden zur Bildrekonstruktion. In der PET basiert

der MLEM-Algorithmus auf der iterativen Gleichung

$$\hat{f}_j^{(n+1)} = \frac{\hat{f}_j^{(n)}}{\sum_i A_{ij}} \sum_i \left(A_{ij} \frac{m_i}{\sum_k A_{ik} \hat{f}_k^{(n)}} \right),$$

wobei $\hat{f}_j^{(n+1)}$ die nächste Näherung der Quelldichte für den Voxel j basierend auf der aktuellen Näherung $\hat{f}_j^{(n)}$ darstellt. Um Rechenzeit einzusparen, wurde der MLEM-Algorithmus im Jahr 1994 modifiziert (vergleiche [Hud]). Das Resultat war der *Ordered Subsets Expectation Maximization Algorithmus* (OSEM), der in jedem Iterationsschritt nur eine Teilmenge der Projektionen verwendet. Um eine in etwa B -fache Verringerung der Rechenzeit bei gleich gutem Ergebnis zu erzielen, wird die Menge der Projektionen $\{p_1, \dots, p_K\}$ in B disjunkte Teilmengen S_1, \dots, S_B aufgeteilt. Der OSEM-Algorithmus durchläuft dabei mehrfach sukzessive die Teilmengen S_1, \dots, S_B . Er basiert auf der iterativen Gleichung

$$\hat{f}_j^{(nB+b)} = \frac{\hat{f}_j^{(nB+b-1)}}{\sum_{i \in S_b} A_{ij}} \sum_{i \in S_b} \left(A_{ij} \frac{m_i}{\sum_k A_{ik} \hat{f}_k^{(n)}} \right), \quad b = 1, \dots, B.$$

Weiterführende Informationen zu den iterativen Ansätzen findet man in [Lea] und [Oll2]. Für einen detaillierteren Überblick der etablierten Methoden der tomographischen Bildrekonstruktion verweisen wir auf die Arbeit [Ale].

3 Das Diffusionsmodell mit konstanter Absorptions- und Streuungsrate

Als Grundlage für die stochastische Modellierung des Pfadverhaltens der Annihilationsphotonen verwenden wir einen Zylinder $C \subset \mathbb{R}^3$ als Modell für den PET-Scanner. Da die Geometrie des Scanners im Diffusionsmodell keine Rolle spielt (sie wird erst für die statistische Auswertung der gewonnenen Messdaten benötigt), kann neben einem Zylinder auch jeder andere beschränkte zusammenhängende dreidimensionale Körper als Grundraum verwendet werden. Es gibt verschiedene Bauformen von PET-Scannern, wozu neben solchen mit Ringdetektoren auch solche mit rotierenden parallelen Detektorplatten zählen. Innerhalb des PET-Zylinders liegt ein Patient (oder beispielsweise eine Maus in der Kleintier-PET), dem zuvor ein radioaktiver Tracer injiziert worden ist, welcher Teile seines Gewebes durch Anlagerung markiert. Der Tracer ist in unserem Modell gemäß einer zu bestimmenden Quelledichte f auf C verteilt. Abhängig von der Dosierung emittiert der Tracer Positronen mit einer Rate $\lambda > 0$. Diese Positronen treffen kurz nach ihrer Entstehung auf ein freies Elektron, wodurch es zur Annihilation (Paarvernichtung) kommt. Dabei entstehen zwei sich in entgegengesetzte Richtungen bewegend (γ -)Photonen. In den Kapiteln 3 bis 7 vernachlässigen wir die meistens sehr kurze Wegstrecke, die ein Positron vom Entstehungsort bis zur Annihilation zurücklegt, da im Diffusionsmodell lediglich das Pfadverhalten der Annihilationsphotonen eine Rolle spielt. Bei der statistischen Auswertung von Messdaten in Kapitel 8 gewinnt die so genannte Positronenreichweite (positron range) wieder an Bedeutung.

Für die Modellierung der Emissionszeitpunkte der Annihilationsphotonen verwenden wir einen homogenen Poissonprozess $(N(t))_{t \geq 0}$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ startet das System mit 0 Photonen. Daraufhin werden Photonenpaare gemäß der Ankunftszeiten $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des Poissonprozesses emittiert. Die $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnen wir daher auch als *Emissionszeiten* und die stochastisch unabhängigen $Exp(\lambda)$ -verteilten Zwischenankunftszeiten $(T_n - T_{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ (mit $T_0 = 0$) als *Zwischenemissionszeiten*. Den Prozess $(N(t))_{t \geq 0}$ nennen wir auch *Emissionsprozess*. Die Eigenschaften von Poissonprozessen werden in der Arbeit [Kin2] ausführlich behandelt. Für die Modellierung der *Emissionsorte* der Annihilationsphotonen eignet sich eine stochastisch unabhängige Familie $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen, deren Mitglieder identisch verteilt auf C mit Lebesguedichte f sind. Die Verteilung $\mathbb{P}^X = f \mathbb{X}^3$ bezeichnen wir im Folgenden als *Quellverteilung*. Die anfänglichen Flugrichtungen der Teilchen einzelner Photonenpaare sind genau entgegengesetzt und werden mithilfe von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen $(\Theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschrieben, welche eine Gleichverteilung auf der Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ besitzen. Nähere Informationen zur Existenz und Konstruktion der Gleichverteilung auf S^2 gibt es im Kapitel III, 18 in [Als1]. Zu den Zeitpunkten $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ werden also in den Punkten $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jeweils Photonenpaare (das n -te \oplus - beziehungsweise \ominus -Teilchen) in die Richtungen $(\Theta_n, -\Theta_n)$ emittiert. Dabei seien die Emissionszeitpunkte, die Emissionsorte und die anfänglichen Flugrichtungen der Photonenpaare voneinander unabhängig.

3.1 Diffusionsmodell ohne Absorption und Streuung (Modell M)

3.1.1 Die Teilchenprozesse und die Transportgleichung

Die dominante Wechselwirkung zwischen den Annihilationsphotonen und dem Körpergewebe des Patienten ist im Fall der PET der Compton-Effekt, bei dem die Photonen durch das Treffen auf freie Elektronen gestreut oder sogar absorbiert werden. Nähere Informationen zu den auftretenden Wechselwirkungen findet man in [Wil]. Im Folgenden bezeichne $u_t(x, \theta)$ die Dichte der Photonen im Punkt x mit Richtung θ zum Zeitpunkt t . Diese genügt der Transportgleichung

$$\begin{aligned} u_{t+s}(x + s\theta, \theta) &= u_t(x, \theta) + \int_0^s q(x + \tau\theta, \theta) d\tau \\ &\quad - \int_0^s a(x + \tau\theta, \theta) u_{t+\tau}(x + \tau\theta, \theta) d\tau \\ &\quad + \int_0^s \int_{S^2} p(x + \tau\theta, \theta, \theta') u_{t+\tau}(x + \tau\theta, \theta') d\theta' d\tau. \end{aligned} \quad (1)$$

Diese enthält die folgenden Terme:

1. Der *Quellterm* $\int_0^s q(x + \tau\theta, \theta) d\tau$ ist von t unabhängig und repräsentiert jene Teilchen, die zwischen x und $x + s\theta$ in Richtung θ emittiert werden, so dass sie zur Dichte der Teilchen im Punkt $x + s\theta$ mit Richtung θ zum Zeitpunkt $t + s$ beitragen. Der Integrand q entspricht bis auf skalare Vielfache der Quelldichte f .
2. Der *Dämpfungsterm* $\int_0^s a(x + \tau\theta, \theta) u_{t+\tau}(x + \tau\theta, \theta) d\tau$ steht für diejenigen Teilchen, die auf ihrem Weg absorbiert oder in eine andere Richtung gestreut werden. In allen hier vorgestellten Modellen hängt die *Dämpfungsrate* $a(x + \tau\theta, \theta)$ nur vom Ort $x + \tau\theta$ ab, das heißt es gilt $a(x + \tau\theta, \theta) \equiv a(x + \tau\theta)$.
3. Der *Streuterm* $\int_0^s \int_{S^2} p(x + \tau\theta, \theta, \theta') u_{t+\tau}(x + \tau\theta, \theta') d\theta' d\tau$ repräsentiert die aufgrund von Streueignissen zur Dichte $u_{t+s}(x + s\theta, \theta)$ beitragenden Teilchen. Der *Streukern* $p(x + \tau\theta, \theta, \theta')$ gibt dabei die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ein aus der Richtung θ' kommendes Teilchen im Punkt $x + \tau\theta$ in Richtung θ gestreut wird.

Werden die Teilchen nach ihrer Emission weder absorbiert noch gestreut, so ergibt sich der Aufenthaltsort des n -ten \oplus - beziehungsweise \ominus -Teilchens zum Zeitpunkt $t > T_n$ durch

$$X_n^\pm(t) = X_n \pm (t - T_n)\Theta_n,$$

wobei die Richtung für jeden Zeitpunkt $t > T_n$ gleich $\pm\Theta_n$ ist. Dabei haben wir analog zu den Ausführungen in [Wüb] die Geschwindigkeit der Teilchen auf 1 normiert. In diesem Abschnitt betrachten wir den Fall ohne Absorption und Streuung, daher vereinfacht sich die Transportgleichung zu

$$u_{t+s}(x + s\theta, \theta) = u_t(x, \theta) + \int_0^s q(x + \tau\theta, \theta) d\tau. \quad (2)$$

Von nun an bezeichne Λ die Gleichverteilung auf S^2 . Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir nun zwei Prozesse $(Y_n^+(t))_{t>T_n}$ und $(Y_n^-(t))_{t>T_n}$, welche die Position und die Richtung des n -ten \oplus - beziehungsweise \ominus -Teilchens zu den Zeitpunkten $t > T_n$ beschreiben. Dabei gilt

$$Y_n^\pm(t) \stackrel{\text{def}}{=} (X_n^\pm(t), \Theta_n^\pm(t)) = (X_n \pm (t - T_n)\Theta_n, \pm\Theta_n)$$

mit den Zufallsvariablen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\Theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus dem ersten Abschnitt. Die Markov-Prozesse $((Y_n^\pm(t))_{t>T_n})_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnen wir im Folgenden auch als *Teilchenprozesse*. Um Aussagen über die Verteilung der Teilchen im Zylinder zu beliebigen Zeitpunkten $t > 0$ machen zu können, definieren wir das Maß $Q \stackrel{\text{def}}{=} \lambda^3 \otimes \Lambda$ auf $\mathbb{R}^3 \times S^2$ und für beliebiges $t > 0$ das zufällige Punktmaß

$$\mathcal{N}_t^M(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{N(t)} (\delta_{Y_n^+(t)}(A) + \delta_{Y_n^-(t)}(A)) = \sum_{n=1}^{N(t)} (\mathbf{1}_A(Y_n^+(t)) + \mathbf{1}_A(Y_n^-(t)))$$

(Dabei sei $A \subset \mathbb{R}^3 \times S^2$ Q -messbar.). Um Aussagen über die Kompatibilität dieses einfachen Modells mit der Transportgleichung (2) machen zu können, betrachten wir die erwartete Verteilung der Teilchen im Zylinder. Diese wird repräsentiert durch das Intensitätsmaß $\mathcal{D}_t^M(A) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(\mathcal{N}_t^M(A))$, das wir im Folgenden als *Diffusionsmaß zum Zeitpunkt t* bezeichnen. Genauer gesagt interessieren wir uns für die Q -Dichte $u_t^M(x, \theta)$ des Diffusionsmaßes zum Zeitpunkt t in den beiden Dimensionen Ort ($x \in \mathbb{R}^3$) und Richtung ($\theta \in S^2$) für jedes $t > 0$.

Bei den folgenden Untersuchungen machen wir uns eine wichtige Eigenschaft des homogenen Poissonprozesses $N(t)_{t \geq 0}$ zu Nutze: Bedingt unter dem Ereignis $\{N(t) = n\}$ entspricht die gemeinsame Verteilung der ersten n Ankunftszeiten T_1, \dots, T_n des Poissonprozesses $N(t)_{t \geq 0}$ der Orderstatistik von n stochastisch unabhängigen $U(0, t)$ -verteilten Zufallsgrößen (Vergleiche die Ausführungen in den Monographien [Cox] und [Rei]). Unter der Bedingung $N(t) = n$ können wir also annehmen, dass die Emissionszeiten T_1, \dots, T_n der ersten n Annihilationsphotonen stochastisch unabhängig und gleichverteilt auf $[0, t]$ sind. Der daraus resultierende Vorteil ist, dass unter obiger Bedingung $(Y_{\pi(m)}^+(t), Y_{\pi(m)}^-(t))_{m=1, \dots, n}$ für jede beliebige Permutation π von $1, \dots, n$ und damit insbesondere die ersten n Paare $(Y_k^+(t), Y_k^-(t))_{k=1, \dots, n}$ von Teilchenprozessen alle dieselbe Verteilung besitzen. Wir erhalten somit für obiges Diffusionsmaß zum Zeitpunkt t

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_t^M(A) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(t) = m) \mathbb{E}(\mathcal{N}_t^M(A) | N(t) = m) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!} \sum_{n=1}^m [\mathbb{E}(\mathbf{1}_A(Y_n^+(t)) | N(t) = m) + \mathbb{E}(\mathbf{1}_A(Y_n^-(t)) | N(t) = m)] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!} 2m \mathbb{E}(\mathbf{1}_A((X + (t - T)\Theta, \Theta))) \\ &= 2\lambda t \mathbb{P}((X + (t - T)\Theta, \Theta) \in A) \end{aligned}$$

mit stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen $X = f\lambda^3$, $T \sim U(0, t)$ und Θ gleichverteilt auf S^2 , wobei wir für die vorletzte Gleichheit $-\Theta_n \sim \Theta_n$ ($n \in \mathbb{N}$) und obige Eigenschaft des Poissonprozesses $N(t)$ benutzt haben. Für ein beliebiges Q -messbares $A \subset \mathbb{R}^3 \times S^2$ setzen wir $A_\theta = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x, \theta) \in A\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}((X + (t - T)\Theta, \Theta) \in A) \\
&= \int_0^t \frac{1}{t} \mathbb{P}((X + (t - u)\Theta, \Theta) \in A) \, du \\
&= \int_0^t \frac{1}{t} \int_{S^2} \mathbb{P}((X + (t - u)\Theta, \Theta) \in A \mid \Theta = \theta) \, d\mathbb{P}^\Theta(\theta) \, du \\
&= \int_0^t \frac{1}{t} \int_{S^2} \mathbb{P}^{X+(t-u)\Theta|\Theta=\theta} \otimes \delta_\theta(A) \, d\mathbb{P}^\Theta(\theta) \, du \\
&= \int_0^t \frac{1}{t} \int_{S^2} \mathbb{P}(X + (t - u)\theta \in A_\theta) \, d\mathbb{P}^\Theta(\theta) \, du \\
&= \int_0^t \frac{1}{t} \int_{S^2} \int_{A_\theta} f(x - (t - u)\theta) \, d\lambda^3(x) \, d\Lambda(\theta) \, du \\
&= \int_A \int_0^t \frac{1}{t} f(x - (t - u)\theta) \, du \, dQ(x, \theta),
\end{aligned}$$

wobei wir die stochastische Unabhängigkeit von X , Θ und T , für die dritte Gleichheit die Ausführungen am Ende des Beweises von Satz 53.6 in [Als1] und für die letzte Gleichheit die Definition von Q verwendet haben. Wir erhalten schließlich

$$\mathcal{D}_t^M(A) = \int_A 2\lambda \int_0^t f(x - (t - u)\theta) \, du \, dQ(x, \theta) = \int_A u_t^M(x, \theta) \, dQ(x, \theta).$$

Da mit T auch die Zufallsgröße $t - T$ eine Gleichverteilung auf dem Intervall $(0, t)$ besitzt, könnte man an dieser Stelle fragen, warum wir nicht gleich mit dieser arbeiten. Dadurch würde im Integrand $t - u$ durch u substituiert und somit eine auf den ersten Blick unnötig erscheinende Komplexität vermieden werden. Im Hinblick auf die Bestimmung der Transportgleichung (vor allem bei den späteren Modellen mit Absorption und Streuung) führt jedoch die von uns gewählte, komplexer erscheinende Variante deutlich schneller zu den gewünschten Ergebnissen. Man sollte sich aber dennoch vor Augen führen, dass man durch Substitution $t - u \mapsto u$ in den Dichten der vorgestellten Diffusionsmaße stets zu einer anderen Betrachtungsweise des Diffusionsmodells gelangen kann: In obigem Fall repräsentiert u den Emissionszeitpunkt des betrachteten Teilchenpaares. Nach Substitution $t - u \mapsto u$ wird durch u dagegen die Länge der bis zum Zeitpunkt t zurückgelegten Pfade der jeweiligen Teilchenpartner angegeben. Letztere Sichtweise werden wir vornehmlich in Kapitel 8 zur statistischen Auswertung von Messdaten verwenden.

Wir erhalten für die Q -Dichte $u_t^M(x, \theta)$ von $\mathcal{D}_t^M(A)$ die Gleichung

$$\begin{aligned} u_{t+s}^M(x + s\theta, \theta) &= 2\lambda \int_0^{t+s} f(x + s\theta - (t + s - u)\theta) du \\ &= u_t^M(x, \theta) + \int_t^{t+s} 2\lambda f(x - (t - u)\theta) du \\ &= u_t^M(x, \theta) + \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\theta) d\tau. \end{aligned}$$

Für jedes $t, s > 0$ erfüllt also die Q -Dichte des Diffusionsmaßes die Transportgleichung (2) mit $q(x + \tau\theta, \theta) = 2\lambda f(x + \tau\theta)$.

3.1.2 Stationäre Version des Diffusionsmaßes (M)

In der Realität sammelt man PET-Messdaten über einen relativ zur Photonen-Emissionsrate λ sehr langen Zeitraum. Deshalb interessieren wir uns vor allem für das Verhalten des Modells, wenn t gegen ∞ strebt. Wir zeigen im Folgenden die Existenz und die genaue Gestalt des *stationären Diffusionsmaßes* $\mathcal{D}^M(A) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{D}_t^M(A)$. Für das hier vorgestellte Modell ohne Absorption und Streuung bereitet dies keine großen Probleme. Mithilfe des Satzes von Fubini (Man beachte, dass der Integrand positiv ist.) und der oben angesprochenen Substitution $t - u \mapsto u$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{D}_t^M(A) &= \lim_{t \rightarrow \infty} 2\lambda \int_0^t \int_A f(x - (t - u)\theta) dQ(x, \theta) du \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} 2\lambda \int_0^t \int_A f(x - u\theta) dQ(x, \theta) du \\ &= 2\lambda \int_0^\infty \int_A f(x - u\theta) dQ(x, \theta) du \\ &= 2\lambda \int_A \int_0^\infty f(x - u\theta) du dQ(x, \theta), \end{aligned}$$

wobei die Existenz des Limes aus der Tatsache folgt, dass der PET-Zylinder C beschränkt ist und damit die Quelledichte f einen kompakten Träger besitzt. Aus obiger Gleichung ist ersichtlich, dass das stationäre Diffusionsmaß \mathcal{D}^M Teilchen mit beliebig lange zurückliegender Emission berücksichtigt und die Q -Dichte

$$u^M(x, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} 2\lambda \int_0^\infty f(x - u\theta) du$$

besitzt. Die zeitunabhängige Dichte erfüllt für beliebiges $s > 0$ die *zeitunabhängige Transportgleichung*

$$\begin{aligned} u(x + s\theta, \theta) &= u(x, \theta) + \int_0^s q(x + \tau\theta, \theta) d\tau \\ &\quad - \int_0^s a(x + \tau\theta, \theta) u(x + \tau\theta, \theta) d\tau \\ &\quad + \int_0^s \int_{S^2} p(x + \tau\theta, \theta, \theta') u(x + \tau\theta, \theta') d\theta' d\tau \end{aligned} \tag{3}$$

mit dem Quellterm $\int_0^s 2\lambda f(x + \tau\theta) d\tau$, denn es gilt

$$\begin{aligned} u^M(x + s\theta, \theta) &= \lim_{t \rightarrow \infty} u_{t+s}^M(x + s\theta, \theta) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(u_t^M(x, \theta) + \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\theta) d\tau \right) \\ &= u^M(x, \theta) + \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\theta) d\tau \end{aligned}$$

aufgrund der Ergebnisse aus Abschnitt 3.1.1

3.2 Diffusionsmodell mit globaler Absorptionsrate (Modell MA)

Nachdem wir im vorherigen Abschnitt ein mit der Transportgleichung kompatibles Modell der Photonen-Diffusion für den sehr einfachen Fall ohne Absorption und Streuung gefunden haben, werden wir im nächsten Schritt die Möglichkeit der *Absorption* von Teilchen zulassen. Wir beschränken uns hier zunächst auf den Fall einer ortsunabhängigen *Absorptionsrate* $\mu > 0$. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen absorbiert wird, ist also in jedem Punkt des Zylinders gleich groß. Unser Ziel ist letztendlich ein Modell mit einer Absorptionsrate, die von der Beschaffenheit des Gewebes abhängig ist, weshalb wir die hier entwickelten Ergebnisse im nächsten Kapitel auf den ortsabhängigen Fall verallgemeinern werden. Für eine praktische Anwendung müssen die spezifischen Absorptionsraten für jeden Gewebetyp experimentell bestimmt werden. Sie ergeben sich nach den Ausführungen in [Wil] im Wesentlichen aus den Absorptionsraten der im Gewebe auftretenden Moleküle und deren relativen Häufigkeiten.

3.2.1 Berechnung der Dichte des Diffusionsmaßes (MA)

Basierend auf dem Modell M versehen wir jedes Teilchen zusätzlich mit einer $Exp(\mu)$ -verteilten Lebensdauer, wobei wir die Lebensdauer des n -ten \oplus - beziehungsweise \ominus -Teilchens mit L_n^\pm bezeichnen. Die Familie $(L_n^\alpha)_{\alpha \in \{+, -\}, n \in \mathbb{N}}$ sei stochastisch unabhängig und zudem unabhängig von allen im ersten Abschnitt eingeführten Zufallsvariablen. Ort und Richtung des n -ten \oplus - beziehungsweise \ominus -Teilchens beschreiben wir wieder durch den Prozess

$$Y_n^\pm(t) = (X_n^\pm(t), \Theta_n^\pm(t)) = (X_n \pm (t - T_n)\Theta_n, \pm\Theta_n).$$

Anders als im vorherigen Abschnitt müssen wir jetzt neben der Position und der Richtung für jedes beteiligte Teilchen zusätzlich die Information berücksichtigen, ob es bereits absorbiert worden ist. Wir beziehen also nur die Teilchen ein, deren Lebensdauer noch nicht abgelaufen ist, und erhalten das zufällige Punktmaß

$$\mathcal{N}_t^{\text{MA}}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{N(t)} (\mathbf{1}_A(Y_n^+(t)) \mathbf{1}_{(t-T_n, \infty)}(L_n^+) + \mathbf{1}_A(Y_n^-(t)) \mathbf{1}_{(t-T_n, \infty)}(L_n^-)).$$

Analog zu den Ausführungen im vorherigen Abschnitt erhalten wir für das zugehörige Diffusionsmaß

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_t^{\text{MA}}(A) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(t) = m) \mathbb{E}(\mathcal{N}_t^{\text{MA}}(A) | N(t) = m) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!} 2m \mathbb{E}(\mathbf{1}_A((X + (t - T)\Theta, \Theta)) \mathbf{1}_{(t-T, \infty)}(L)) \\
&= 2\lambda t \mathbb{P}((X + (t - T)\Theta, \Theta) \in A, L > t - T)
\end{aligned}$$

mit stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen $X = f\lambda^3$, $T \sim U(0, t)$, $L \sim \text{Exp}(\mu)$ und Θ gleichverteilt auf S^2 . Ferner gilt wegen der stochastischen Unabhängigkeit von X, Θ, T und L

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((X + (t - T)\Theta, \Theta) \in A, L > t - T) &= \int_0^t \frac{1}{t} \mathbb{P}((X + (t - u)\Theta, \Theta) \in A, L > t - u) du \\
&= \int_0^t \frac{1}{t} e^{-\mu(t-u)} \mathbb{P}((X + (t - u)\Theta, \Theta) \in A) du.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für jedes $t > 0$ analog zu den Ausführungen im vorherigen Abschnitt die Q -Dichte

$$u_t^{\text{MA}}(x, \theta) = 2\lambda \int_0^t e^{-\mu(t-u)} f(x - (t - u)\theta) du$$

des Diffusionsmaßes $\mathcal{D}_t^{\text{MA}}(\cdot)$ zum Zeitpunkt t .

3.2.2 Bestimmung der Transportgleichung (MA)

Wegen des in der Q -Dichte u_t^{MA} auftretenden durch die Absorption bedingten Terms $e^{-\mu(t-u)}$ gestaltet sich das Bestimmen der Transportgleichung durch bloßes Umstellen der Differenz $u_{t+s}^{\text{MA}}(x + s\theta, \theta) - u_t^{\text{MA}}(x, \theta)$ an dieser Stelle deutlich schwieriger als beim Modell M. Deswegen wählen wir einen anderen Ansatz, der auf der Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung basiert. Für beliebige $t, s > 0$ schreiben wir

$$u_{t+s}^{\text{MA}}(x + s\theta, \theta) = u_t^{\text{MA}}(x, \theta) + (u_{t+s}^{\text{MA}}(x + s\theta, \theta) - u_t^{\text{MA}}(x, \theta)).$$

Für die Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung benötigen wir als Voraussetzung die Stetigkeit der Queldichte f oder allgemeiner die stückweise Stetigkeit der Funktion $\tau \mapsto f(x + \tau\theta)$ für alle $(x, \theta) \in \mathbb{R}^3 \times S^2$, welche wir im Folgenden als gegeben voraussetzen. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\tau} u_{t+\tau}^{\text{MA}}(x + \tau\theta, \theta) \\
&= \frac{d}{d\tau} \left[2\lambda e^{-\mu\tau} \int_0^{t+\tau} e^{-\mu(t-u)} f(x - (t - u)\theta) du \right] \\
&= -\mu u_{t+\tau}^{\text{MA}}(x + \tau\theta, \theta) + 2\lambda e^{-\mu\tau} \frac{d}{d\tau} \left[2\lambda \int_0^{t+\tau} e^{-\mu(t-u)} f(x - (t - u)\theta) du \right] \\
&= -\mu u_{t+\tau}^{\text{MA}}(x + \tau\theta, \theta) + 2\lambda f(x + \tau\theta)
\end{aligned}$$

und es folgt mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned}
u_{t+s}^{\text{MA}}(x + s\theta, \theta) &= u_t^{\text{MA}}(x, \theta) + (u_{t+s}^{\text{MA}}(x + s\theta, \theta) - u_t^{\text{MA}}(x, \theta)) \\
&= u_t^{\text{MA}}(x, \theta) + \int_0^s \frac{d}{d\tau} u_{t+\tau}^{\text{MA}}(x + \tau\theta, \theta) d\tau \\
&= u_t^{\text{MA}}(x, \theta) - \int_0^s \mu u_{t+\tau}^{\text{MA}}(x + \tau\theta, \theta) d\tau + 2\lambda \int_0^s f(x + \tau\theta) d\tau.
\end{aligned}$$

Für jedes $t, s > 0$ erfüllt also die Q -Dichte des Diffusionsmaßes $\mathcal{D}_t^{\text{MA}}$ die Transportgleichung mit dem Quellterm $2\lambda \int_0^s f(x + \tau\theta) d\tau$ und dem Dämpfungsterm $\int_0^s \mu u_{t+\tau}^{\text{MA}}(x + \tau\theta, \theta) d\tau$. Die Dämpfungsrates $a(x + \tau\theta, \theta)$ aus der Transportgleichung entspricht demnach an allen Orten des Zylinders der Absorptionsrate $\mu > 0$.

3.2.3 Stationäre Version des Diffusionsmaßes (MA)

Analog zu den Überlegungen im vorherigen Abschnitt erhalten wir die Existenz und die genaue Gestalt des stationären Diffusionsmaßes. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\text{MA}}(A) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{D}_t^{\text{MA}}(A) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} 2\lambda \int_A \int_0^t e^{-\mu(t-u)} f(x - (t-u)\theta) du dQ(x, \theta) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} 2\lambda \int_0^t \int_A e^{-\mu u} f(x - u\theta) dQ(x, \theta) du \\
&= 2\lambda \int_A \int_0^\infty e^{-\mu u} f(x - u\theta) du dQ(x, \theta)
\end{aligned}$$

und damit ist

$$u^{\text{MA}}(x, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} 2\lambda \int_0^\infty e^{-\mu u} f(x - u\theta) du$$

die Q -Dichte des stationären Diffusionsmaßes \mathcal{D}^{MA} . Für diese gilt aufgrund der Ergebnisse zur zeitabhängigen Transportgleichung im vorherigen Abschnitt

$$\begin{aligned}
u^{\text{MA}}(x + s\theta, \theta) &= \lim_{t \rightarrow \infty} u_{t+s}^{\text{MA}}(x + s\theta, \theta) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(u_t^{\text{MA}}(x, \theta) - \int_0^s \mu u_{t+\tau}^{\text{MA}}(x + \tau\theta, \theta) d\tau + 2\lambda \int_0^s f(x + \tau\theta) d\tau \right) \\
&= u^{\text{MA}}(x, \theta) - \int_0^s \mu u^{\text{MA}}(x + \tau\theta, \theta) d\tau + 2\lambda \int_0^s f(x + \tau\theta) d\tau
\end{aligned}$$

für beliebiges $s > 0$, wobei wir im letzten Schritt die monotone Konvergenz von $(u_t^{\text{MA}})_{t>0}$ ausgenutzt haben. Damit erfüllt $u^{\text{MA}}(x, \theta)$ die zeitunabhängige Transportgleichung (3) mit dem Quellterm $2\lambda \int_0^s f(x + \tau\theta) d\tau$ und der Dämpfungsrates μ .

3.3 Diffusionsmodell mit einfacher Streuung am Emissionsort (Modell MASE)

In diesem Abschnitt integrieren wir die Möglichkeit der Streuung in unser Modell. Bei dem hier vorgestellten Diffusionsmodell MASE entscheiden wir unabhängig für jedes Teilchen direkt am Emissionsort, ob es gestreut wird oder nicht. Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit p streuen wir also ein Teilchen unmittelbar nach seiner Entstehung. Nach der Emission wird seine Richtung bis zur Absorption oder Detektion jedoch nicht mehr beeinflusst. Die Richtung eines gestreuten Teilchens ist somit fast sicher nicht genau entgegengesetzt zu der seines Partners. Dadurch führt die Detektion des betreffenden Teilchenpaares fast sicher zu falschen Messdaten.

3.3.1 Berechnung der Dichte des Diffusionsmaßes (MASE)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ versehen wir das n -te \oplus - beziehungsweise \ominus -Teilchen mit einer $B(1, p)$ -verteilten Zufallsgröße B_n^\pm , deren Parameter $p \in (0, 1)$ wir als *Streuwahrscheinlichkeit* bezeichnen. Dabei sei die Familie $(B_n^\alpha)_{\alpha \in \{+, -\}, n \in \mathbb{N}}$ stochastisch unabhängig. Beim Eintreten des Ereignisses $\{B_n^\pm = 1\}$ wird das n -te \oplus - beziehungsweise \ominus -Teilchen gestreut, wobei wir davon ausgehen, dass die Verteilung des *Streuwinkels* $\Phi \in [0, \pi]$ eine *stetige* Lebesgue-Dichte h besitzt. Um unsere Ergebnisse möglichst allgemein zu halten, setzen wir für die Verteilung des Streuwinkels keine weiteren Eigenschaften voraus.

Für praktische Anwendungen der Ergebnisse ist für den Cosinus des Streuwinkels zum Beispiel die Annahme der Lebesgue-Dichte

$$h_g(z) = \frac{1}{2} \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2gz)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{1}_{[-1, 1]}(z)$$

basierend auf der aus der Atmosphärenphysik stammenden *Henye-Greensteinschen Streufunktion*

$$p_g(z) = \frac{1}{4\pi} \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g \cos(z))^{\frac{3}{2}}}$$

sinnvoll. Der *Streuparameter* $g \in [0, 1]$ ist zugleich der Erwartungswert der Zufallsgröße $\cos(\Phi)$ und bestimmt ferner das quantitative Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten verschieden großer Streuwinkel. Für $g = 0$ besitzt $\cos(\Phi)$ eine $U(-1, 1)$ -Verteilung. Mit wachsendem Streuparameter werden kleinere Streuwinkel gegenüber größeren immer wahrscheinlicher. Für weiterführende Informationen zur Henye-Greensteinschen Streufunktion verweisen wir auf die Arbeit [Hen1].

Für $t > T_n$ verwenden wir zur Beschreibung des Ortes und der Richtung des n -ten \oplus - beziehungsweise \ominus -Teilchens die Prozesse $Y_n^\pm(t) = (X_n^\pm(t), \Theta_n^\pm(t))$ mit

$$X_n^\pm(t) = \begin{cases} X_n \pm (t - T_n)\Theta_n & , \text{ falls } B_n^\pm = 0 \\ X_n + (t - T_n)H(\pm\Theta_n, \Phi_n^\pm, Y_n^\pm) & , \text{ falls } B_n^\pm = 1, \end{cases}$$

und

$$\Theta_n^\pm(t) = \begin{cases} \pm\Theta_n & , \text{ falls } B_n^\pm = 0 \\ H(\pm\Theta_n, \Phi_n^\pm, Y_n^\pm) & , \text{ falls } B_n^\pm = 1, \end{cases}$$

wobei Φ_n^\pm den Streuwinkel und Y_n^\pm eine $U(0, 2\pi)$ -verteilte Zufallsgröße bezeichnet. Die Funktion $H : S^2 \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow S^2$

$$H(\theta, \phi, y) = \cos(\phi)\theta + \sin(\phi) \left(\cos(y) \frac{\theta'}{\|\theta'\|} + \sin(y) \frac{\theta''}{\|\theta''\|} \right)$$

mit $\theta' = (\theta_2, -\theta_1, 0)$ und $\theta'' = (-\frac{\theta_1^2}{\theta_2}, -\theta_1, \frac{\theta_1^2}{\theta_2\theta_3} + \frac{\theta_1\theta_2}{\theta_3})$ errechnet die neue Richtung nach dem Streuereignis auf der Basis der ursprünglichen Richtung θ und des Streuwinkels ϕ . Die Vektoren θ' und θ'' sind orthogonal zueinander und spannen die zu θ orthogonale Ebene durch den Nullpunkt des \mathbb{R}^3 auf. Man beachte dabei, dass $\theta_2, \theta_3 = 0$ bei Annahme der Gleichverteilung auf S^2 nur mit Wahrscheinlichkeit 0 eintritt. Da die Richtung nach dem Streuereignis nicht eindeutig durch die ursprüngliche Richtung $\pm\Theta_n$ und den Streuwinkel Φ_n^\pm bestimmt ist, benötigen wir zusätzlich die Zufallsgröße Y_n^\pm , die zufällig einen Punkt auf dem Rand des Einheitskreises $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ auswählt. Der zu diesem Punkt gehörende Richtungsvektor repräsentiert die Projektion des Vektors $H(\pm\Theta_n, \Phi_n^\pm, Y_n^\pm)$ auf die zu Θ_n orthogonale Ebene durch den Nullpunkt des \mathbb{R}^3 . Zur Veranschaulichung dient die folgende Abbildung:

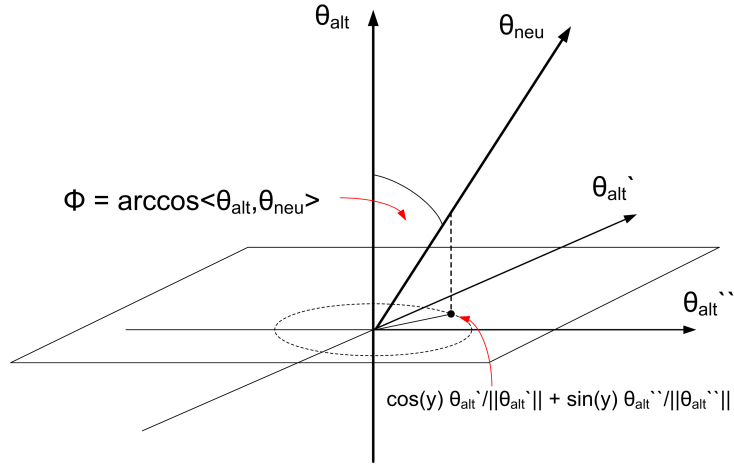


Abbildung 5: Konstruktion der neuen Richtung in Folge eines Streuereignisses.

Wir definieren das zufällige Punktmaß

$$\mathcal{N}_t^{\text{MASE}}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{N(t)} (\mathbf{1}_A(Y_n^+(t)) \mathbf{1}_{(t-T_n, \infty)}(L_n^+) + \mathbf{1}_A(Y_n^-(t)) \mathbf{1}_{(t-T_n, \infty)}(L_n^-))$$

und erhalten für das zugehörige Diffusionsmaß die Gleichung

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_t^{\text{MASE}}(A) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(t) = m) \mathbb{E}(\mathcal{N}_t^{\text{MASE}}(A) | N(t) = m) \\ &= 2\lambda t \mathbb{P}((X + (t-T)\Theta, \Theta) \in A, L > t-T, B = 0) \\ &+ 2\lambda t \mathbb{P}((X + (t-T)H(\Theta, \Phi, Y), H(\Theta, \Phi, Y)) \in A, L > t-T, B = 1) \end{aligned}$$

mit stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen X , Θ , T und L wie im vorherigen Abschnitt, sowie $B \sim B(1, p)$, $Y \sim U(0, 2\pi)$ und der Streuwinkel-Verteilung $\Phi = h\lambda^3$. Wegen der stochastischen Unabhängigkeit gilt analog zu den Ausführungen im letzten Abschnitt

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}((X + (t - T)\Theta, \Theta) \in A, L > t - T, B = 0) \\ &= (1 - p) \mathbb{P}((X + (t - T)\Theta, \Theta) \in A, L > t - T) \\ &= (1 - p) \int_A \int_0^t \frac{1}{t} e^{-\mu(t-u)} f(x - (t - u)\theta) du dQ(x, \theta). \end{aligned}$$

Der zweite Summand in obiger Gleichung ist für den Streuterm in der Transportgleichung verantwortlich.

Für die nachfolgende Rechnung benötigen wir die Λ -Dichte von $\mathbb{P}^{H(\theta_0, \Phi, Y)}$ für ein beliebiges $\theta_0 \in S^2$. Da die Abbildung $H_{\theta_0}(z, y) = H(\theta_0, z, y) : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow S^2$ bijektiv ist, existiert für ein beliebiges $\theta \in S^2$ genau ein Paar $(z_0, y_0) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ mit $H(\theta_0, z_0, y_0) = \theta$.

Wir definieren

$$A_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} [z_0, z_0 + \frac{1}{n}] & , \text{ falls } z_0 < \pi \\ [z_0 - \frac{1}{n}, z_0] & , \text{ falls } z_0 = \pi \end{cases}$$

und

$$B_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} [y_0, y_0 + \frac{1}{n}] & , \text{ falls } y_0 < 2\pi \\ [y_0 - \frac{1}{n}, y_0] & , \text{ falls } y_0 = 2\pi \end{cases}$$

für alle $n \geq n_0$ mit $n_0 \in \mathbb{N}$ so klein, dass $A_n \times B_n \subset [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. Ferner setzen wir $C_n \stackrel{\text{def}}{=} H(\theta_0, \Phi, Y)(A_n \times B_n)$ für alle $n \geq n_0$. Für

$$g(z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{\pi}{2} - z & , \text{ falls } z \leq \frac{\pi}{2} \\ z - \frac{\pi}{2} & , \text{ falls } z > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

erhalten wir

$$\Lambda(C_n) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi n} \int_{z_0 - \frac{1}{n}}^{z_0} \cos g(z) dz & , \text{ falls } z_0 = \pi \\ \frac{1}{4\pi n} \int_{z_0}^{z_0 + \frac{1}{n}} \cos g(z) dz & , \text{ falls } z_0 < \pi. \end{cases}$$

Wegen $\cos g(z) = \sin z$ für alle $z \in [0, \pi]$ folgt daraus

$$\Lambda(C_n) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi n} (\cos(z_0 - \frac{1}{n}) - \cos z_0) & , \text{ falls } z_0 = \pi \\ \frac{1}{4\pi n} (\cos z_0 - \cos(z_0 + \frac{1}{n})) & , \text{ falls } z_0 < \pi \end{cases}$$

(vergleiche Abbildung 6). Aufgrund der Stetigkeit von h existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_1 \geq n_0$, so dass für alle $n \geq n_1$ die Abschätzung $|h(\arccos \langle \theta, \theta_0 \rangle) - h(z)| < \varepsilon$ für alle $z \in A_n$ gilt. Dabei bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Produkt auf \mathbb{R}^3 . Wegen ihrer Normiertheit entspricht das Produkt $\langle \theta, \theta_0 \rangle$ gerade dem Cosinus des (Streu-)Winkels zwischen den

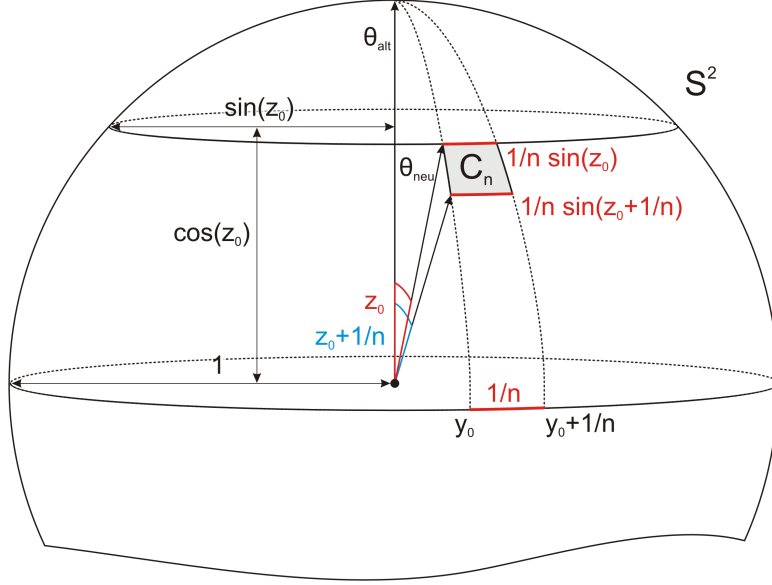


Abbildung 6: Die Menge $C_n = H(\theta_0, \Phi, Y)(A_n \times B_n)$ für den Fall $z_0 < \pi$ und $y_0 < 2\pi$.

Vektoren θ und θ_0 . Für $n \geq n_1$ hinreichend groß erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathbb{P}^{H(\theta_0, \Phi, Y)}(C_n)}{\Lambda(C_n)} \\
&= \frac{1}{\Lambda(C_n)} \int_{A_n} \int_{B_n} \frac{1}{2\pi} h(z) dy dz \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\cos(z_0 - \frac{1}{n}) - \cos z_0} 2 \int_{A_n} h(z) dz & , \text{ falls } z_0 = \pi \\ \frac{1}{\cos z_0 - \cos(z_0 + \frac{1}{n})} 2 \int_{A_n} h(z) dz & , \text{ falls } z_0 < \pi \end{cases} \\
&\in \begin{cases} 2 \frac{\frac{1}{n}}{\cos(z_0 - \frac{1}{n}) - \cos z_0} (h(\arccos \langle \theta, \theta_0 \rangle) - \varepsilon, h(\arccos \langle \theta, \theta_0 \rangle) + \varepsilon) & , \text{ falls } z_0 = \pi \\ 2 \frac{\frac{1}{n}}{\cos z_0 - \cos(z_0 + \frac{1}{n})} (h(\arccos \langle \theta, \theta_0 \rangle) - \varepsilon, h(\arccos \langle \theta, \theta_0 \rangle) + \varepsilon) & , \text{ falls } z_0 < \pi \end{cases} \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sin z_0} (h(\arccos \langle \theta, \theta_0 \rangle) - \varepsilon, h(\arccos \langle \theta, \theta_0 \rangle) + \varepsilon),
\end{aligned}$$

wobei wir $\lambda(A_n) = \lambda(B_n) = \frac{1}{n}$ beachtet haben. Wir definieren

$$\zeta(\theta|\theta_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2h(\arccos \langle \theta, \theta_0 \rangle)}{\sin(\arccos \langle \theta, \theta_0 \rangle)} = \frac{2h(\phi_{\theta, \theta_0})}{\sin(\phi_{\theta, \theta_0})}$$

mit dem (Streu-)Winkel $\phi_{\theta, \theta_0} \in [0, \pi]$ zwischen den Vektoren θ und θ_0 (man beachte $\langle \theta, \theta_0 \rangle = \cos(\theta - \theta_0)$ und die Symmetrieeigenschaften der Kosinusfunktion) und erhalten schließlich

$$\mathbb{P}^{H(\theta_0, \Phi, Y)} = \zeta(\cdot|\theta_0)\Lambda,$$

da $\varepsilon > 0$ und $\theta \in S^2$ beliebig gewählt waren. Die bedingte Verteilung von $H(\Theta_0, \Phi, Y)$ bedingt unter $\Theta_0 = \theta_0$ besitzt also die Λ -Dichte $\zeta(\cdot|\theta_0)$. Diese Erkenntnis führt uns zu der

folgenden Gleichungskette

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}((X + (t - T)H(\Theta, \Phi, Y), H(\Theta, \Phi, Y)) \in A, L > t - T, B = 1) \\
&= p \mathbb{P}((X + (t - T)H(\Theta, \Phi, Y), H(\Theta, \Phi, Y)) \in A, L > t - T) \\
&= p \int_0^t \frac{1}{t} \mathbb{P}((X + (t - u)H(\Theta, \Phi, Y), H(\Theta, \Phi, Y)) \in A, L > t - u) du \\
&= p \int_0^t \frac{1}{t} e^{-\mu(t-u)} \mathbb{P}((X + (t - u)H(\Theta, \Phi, Y), H(\Theta, \Phi, Y)) \in A) du \\
&= p \int_0^t \int_{S^2} \frac{1}{t} e^{-\mu(t-u)} \mathbb{P}((X + (t - u)H(\theta_0, \Phi, Y), H(\theta_0, \Phi, Y)) \in A) d\Lambda(\theta_0) du \\
&= p \int_0^t \int_{S^2} \int_{S^2} \frac{1}{t} e^{-\mu(t-u)} \zeta(\theta|\theta_0) \mathbb{P}((X + (t - u)\theta, \theta) \in A) d\Lambda(\theta) d\Lambda(\theta_0) du \\
&= p \int_A \int_0^t \int_{S^2} \frac{1}{t} e^{-\mu(t-u)} \zeta(\theta|\theta_0) f(x - (t - u)\theta) d\Lambda(\theta_0) du dQ(x, \theta),
\end{aligned} \tag{4}$$

wobei wir im vorletzten Schritt analog zu den Ausführungen zur Bestimmung der Q -Dichte von $P^{Y_n^\pm(t)|N(t)=n}$ in den vorangegangenen Abschnitten geschlossen haben.

Schließlich erhalten wir für das Diffusionsmaß

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_t^{\text{MASE}}(A) &= \int_A 2\lambda(1 - p) \int_0^t e^{-\mu(t-u)} f(x - (t - u)\theta) du dQ(x, \theta) \\
&+ \int_A 2\lambda p \int_{S^2} \int_0^t \zeta(\theta|\theta_0) e^{-\mu(t-u)} f(x - (t - u)\theta) du d\Lambda(\theta_0) dQ(x, \theta) \\
&= \int_A u_t^{\text{MASE}}(x, \theta) dQ(x, \theta).
\end{aligned}$$

3.3.2 Bestimmung der Transportgleichung (MASE)

Zur Berechnung der Transportgleichung betrachten wir wieder

$$u_{t+s}^{\text{MASE}}(x + s\theta, \theta) = u_t^{\text{MASE}}(x, \theta) + u_{t+s}^{\text{MASE}}(x + s\theta, \theta) - u_t^{\text{MASE}}(x, \theta).$$

Der Dämpfungsterm besteht in diesem Modell aus zwei Teilen. Zum einen berücksichtigt er die Teilchen, die auf ihrem Weg durch den Zylinder absorbiert werden, und zum anderen die Teilchen, welche zwar ursprünglich in Richtung θ emittiert worden waren, danach aber in eine andere Richtung gestreut worden sind. Da hier derselbe Absorptionsmechanismus wirkt, entspricht der erste nur auf Absorption basierende Teil des Dämpfungsterms dem Dämpfungsterm $\int_0^s \mu u_{t+\tau}^{\text{MA}}(x + \tau\theta, \theta) d\tau$ des Modells MA. Der Quellterm, der Streuterm und der auf Streuung basierende Teil des Dämpfungsterms sind noch zu bestimmen. Unter den gleichen Voraussetzungen an die Quelledichte f wie im vorherigen Abschnitt erhalten wir die Ableitung

$$\frac{d}{d\tau} u_{t+\tau}^{\text{MASE}}(x + \tau\theta, \theta) = -\mu 2\lambda(1 - p) \int_0^{t+\tau} e^{-\mu(t+\tau-u)} f(x - (t - u)\theta) du$$

$$\begin{aligned}
& + 2\lambda(1-p)f(x+\tau\theta) \\
& - \mu 2\lambda p \int_0^{t+\tau} \int_{S^2} \zeta(\theta|\theta_0) e^{-\mu(t+\tau-u)} f(x-(t-u)\theta) d\Lambda(\theta_0) du \\
& + 2\lambda p \int_{S^2} \zeta(\theta|\theta_0) f(x+\tau\theta) d\Lambda(\theta_0) \\
& = -\mu u_{t+\tau}^{\text{MASE}}(x+\tau\theta, \theta) + 2\lambda f(x+\tau\theta) - 2\lambda p f(x+\tau\theta) \\
& + 2\lambda p \int_{S^2} \zeta(\theta|\theta_0) f(x+\tau\theta) d\Lambda(\theta_0)
\end{aligned}$$

der Funktion $\tau \mapsto u_{t+\tau}^{\text{MASE}}(x+\tau\theta, \theta)$. Für jedes $t, s > 0$ leiten wir daraus mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung die Gleichung

$$\begin{aligned}
u_{t+s}^{\text{MASE}}(x+s\theta, \theta) & = u_t^{\text{MASE}}(x, \theta) - \int_0^s [\mu u_{t+\tau}^{\text{MASE}}(x+\tau\theta, \theta) + 2\lambda p f(x+\tau\theta)] d\tau \\
& + \int_0^s \int_{S^2} 2\lambda p \zeta(\theta|\theta_0) f(x+\tau\theta) d\Lambda(\theta_0) d\tau + \int_0^s 2\lambda f(x+\tau\theta) d\tau
\end{aligned}$$

ab. Die Dichte des Diffusionsmaßes genügt also einer *verallgemeinerten Transportgleichung* mit Dämpfungsterm

$$\int_0^s [\mu u_{t+\tau}^{\text{MASE}}(x+\tau\theta, \theta) + 2\lambda p f(x+\tau\theta)] d\tau,$$

Streuterm

$$\int_0^s \int_{S^2} 2\lambda p \zeta(\theta|\theta_0) f(x+\tau\theta) d\Lambda(\theta_0) d\tau$$

und Quellterm

$$\int_0^s 2\lambda f(x+\tau\theta) d\tau,$$

wobei $\int_0^s 2\lambda p f(x+\tau\theta) d\tau$ der nur auf Streuung basierende Teil des Dämpfungsterms ist. Diese Gleichung ist jedoch nicht von der speziellen Gestalt der Transportgleichung (1), da hier weder der im Dämpfungsterm noch der im Streuterm auftretende Integrand den Faktor $u_{t+\tau}^{\text{MASE}}(x+\tau\theta, \theta)$ enthält.

3.3.3 Stationäre Version des Diffusionsmaßes (MASE)

Wie in den vorherigen Abschnitten erhalten wir durch die Grenzwertbetrachtung $t \rightarrow \infty$ die stationäre Version des Diffusionsmaßes. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\text{MASE}}(A) & = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{D}_t^{\text{MASE}}(A) \\
& = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_A 2\lambda(1-p) \int_0^t e^{-\mu(t-u)} f(x-(t-u)\theta) du dQ(x, \theta) \right. \\
& + \left. \int_A 2\lambda p \int_{S^2} \int_0^t \zeta(\theta|\theta_0) e^{-\mu(t-u)} f(x-(t-u)\theta) du d\Lambda(\theta_0) dQ(x, \theta) \right) \\
& = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_0^t \int_A 2\lambda(1-p) e^{-\mu u} f(x-u\theta) dQ(x, \theta) du \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t \int_A 2\lambda p \int_{S^2} \zeta(\theta|\theta_0) e^{-\mu u} f(x - u\theta) d\Lambda(\theta_0) dQ(x, \theta) du \Big) \\
& = \int_0^\infty \int_A 2\lambda(1-p) e^{-\mu u} f(x - u\theta) dQ(x, \theta) du \\
& + \int_0^\infty \int_A 2\lambda p \int_{S^2} \zeta(\theta|\theta_0) e^{-\mu u} f(x - u\theta) d\Lambda(\theta_0) dQ(x, \theta) du
\end{aligned}$$

und damit ist

$$\begin{aligned}
u^{\text{MASE}}(x, \theta) & \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty 2\lambda(1-p) e^{-\mu u} f(x - u\theta) du \\
& + \int_{S^2} \int_0^\infty 2\lambda p \zeta(\theta|\theta_0) e^{-\mu u} f(x - u\theta) du d\Lambda(\theta_0)
\end{aligned}$$

die Q -Dichte des stationären Diffusionsmaßes $\mathcal{D}^{\text{MASE}}$. Für diese gilt aufgrund obiger Ergebnisse

$$\begin{aligned}
u^{\text{MASE}}(x + s\theta, \theta) & = \lim_{t \rightarrow \infty} u_{t+s}^{\text{MASE}}(x + s\theta, \theta) \\
& = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(u_t^{\text{MASE}}(x, \theta) - \int_0^s [\mu u_{t+\tau}^{\text{MASE}}(x + \tau\theta, \theta) + 2\lambda p f(x + \tau\theta)] d\tau \right. \\
& \quad \left. + \int_0^s \int_{S^2} 2\lambda p \zeta(\theta|\theta_0) f(x + \tau\theta) d\Lambda(\theta_0) d\tau + \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\theta) d\tau \right) \\
& = u^{\text{MASE}}(x, \theta) - \int_0^s [\mu u^{\text{MASE}}(x + \tau\theta, \theta) + 2\lambda p f(x + \tau\theta)] d\tau \\
& \quad + \int_0^s \int_{S^2} 2\lambda p \zeta(\theta|\theta_0) f(x + \tau\theta) d\Lambda(\theta_0) d\tau + \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\theta) d\tau
\end{aligned}$$

für beliebiges $s > 0$, wobei wir im letzten Schritt die monotone Konvergenz von $(u_t^{\text{MASE}})_{t>0}$ ausgenutzt haben. Damit erfüllt $u^{\text{MASE}}(x, \theta)$ eine *verallgemeinerte zeitunabhängige Transportgleichung* mit dem Quellterm $2\lambda \int_0^s f(x + \tau\theta) d\tau$, dem Dämpfungsterm

$$\int_0^s [\mu u^{\text{MASE}}(x + \tau\theta, \theta) + 2\lambda p f(x + \tau\theta)] d\tau$$

und dem Streuterm

$$\int_0^s \int_{S^2} 2\lambda p \zeta(\theta|\theta_0) f(x + \tau\theta) d\Lambda(\theta_0) d\tau.$$

Man beachte, dass auch diese Gleichung nicht von der speziellen Gestalt der Transportgleichung (3) ist, da wiederum weder der im Dämpfungsterm noch der im Streuterm auftretende Integrand den Faktor $u^{\text{MASE}}(x + \tau\theta, \theta)$ enthält.

3.4 Diffusionsmodell mit einfacher Streuung im PET-Zylinder (Modell MAS)

Im letzten Abschnitt haben wir ein Modell entwickelt, das die Streuung von Teilchen auf eine sehr einfache Weise berücksichtigt. Dabei haben wir unterstellt, dass Streuung

ausschließlich zum Zeitpunkt der Emission stattfindet, was in der Realität jedoch lediglich mit Wahrscheinlichkeit 0 passiert. Insbesondere im Hinblick auf die Ortsabhängigkeit der einzelnen physikalischen Effekte, welche die Pfade der Teilchen im PET-Zylinder beeinflussen, ist eine Modellierung der Streuung notwendig, bei der ein Teilchen zu jedem Zeitpunkt seiner Durchquerung des PET-Zylinders gestreut werden kann. In diesem Abschnitt entwickeln wir zunächst ein Modell mit einfacher Streuung. Das heißt, ein Teilchen wird in Folge eines Streuereignisses kein weiteres Mal gestreut. Der PET-Zylinder enthält in diesem Modell also zu jedem Zeitpunkt eine gewisse Anzahl nicht gestreuter und eine gewisse Anzahl einfach gestreuter Teilchen. Dementsprechend besteht die Dichte des Diffusionsmaßes genau wie im vorherigen Abschnitt aus zwei Teilen. Der Vorteil dieses Modells gegenüber einem Modell mit Mehrfachstreuung liegt in der einfacheren Implementierbarkeit in Algorithmen zur Bildrekonstruktion. Zwar stellt es aufgrund der fehlenden Berücksichtigung von mehrfacher Streuung nur eine grobe Approximation der realen Vorgänge im PET-Zylinder dar, ist aber im Hinblick auf praktische Anwendungen nützlich, da viele etablierte Bildgebungsverfahren derartige Approximationen verwenden. Das beste Beispiel eines solchen Verfahrens ist der *Single Scattering Algorithm*, wie er in [Nat1] beschrieben wird.

3.4.1 Berechnung der Dichte des Diffusionsmaßes (MAS)

Auf der Basis des Modells MA versehen wir jedes Teilchen zusätzlich zu der dort eingeführten absorptionsbedingten $Exp(\mu)$ -verteilten Lebensdauer mit einer zweiten $Exp(\nu)$ -verteilten Lebensdauer, welche die Zeitspanne von der Emission bis zur Streuung repräsentiert. Die entsprechende Lebensdauer des n -ten \oplus - beziehungsweise \ominus -Teilchens bezeichnen wir mit M_n^\pm , wobei die Familie $(M_n^\alpha)_{\alpha \in \{+, -\}, n \in \mathbb{N}}$ stochastisch unabhängig und unabhängig von allen zuvor eingeführten Zufallsvariablen sei. Den Parameter ν bezeichnen wir als *Streuungsrate*. Im Streuzeitpunkt M_n^\pm wird das n -te \oplus - beziehungsweise \ominus -Teilchen gestreut, wobei wir für die *post-Streu-Richtung* das im Abschnitt 3.1.1 eingeführte Modell verwenden. Wir definieren daher die Teilchenprozesse $Y_n^\pm(t) = (X_n^\pm(t), \Theta_n^\pm(t))$ (für $n \in \mathbb{N}$) auf der Basis der Notation des letzten Abschnittes durch

$$X_n^\pm(t) = \begin{cases} X_n \pm (t - T_n)\Theta_n & , \text{ falls } M_n^\pm > t - T_n \\ X_n \pm M_n^\pm \Theta_n + (t - T_n - M_n^\pm)H(\pm\Theta_n, \Phi_n^\pm, Y_n^\pm) & , \text{ falls } M_n^\pm \leq t - T_n \end{cases}$$

und

$$\Theta_n^\pm(t) = \begin{cases} \pm\Theta_n & , \text{ falls } M_n^\pm > t - T_n \\ H(\pm\Theta_n, \Phi_n^\pm, Y_n^\pm) & , \text{ falls } M_n^\pm \leq t - T_n. \end{cases}$$

Man beachte, dass die Teilchenprozesse bei Berücksichtigung von lediglich einfacher Streuung keine Markov-Prozesse darstellen, da man ohne Kenntnis der gesamten Vergangenheit eines Pfades nicht wissen kann, ob ein Streuereignis bereits eingetreten ist oder nicht.

Seien im folgenden M , L , Φ , Y , X , Θ und T stochastisch unabhängig mit $M \sim Exp(\nu)$

und L, Φ, Y, X, Θ und T wie im vorherigen Abschnitt. Für das Diffusionsmaß

$$\mathcal{D}_t^{\text{MAS}}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{N(t)} (\mathbf{1}_A(Y_n^+(t)) \mathbf{1}_{(t-T_n, \infty)}(L_n^+) + \mathbf{1}_A(Y_n^-(t)) \mathbf{1}_{(t-T_n, \infty)}(L_n^-)) \right)$$

gilt dann

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_t^{\text{MAS}}(A) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(t) = m) \mathbb{E}(\mathcal{N}_t^{\text{MAS}}(A) | N(t) = m) \\ &= 2\lambda t \mathbb{P}((X + (t-T)\Theta, \Theta) \in A, L > t-T, M > t-T) \\ &+ 2\lambda t \mathbb{P}((X + M\Theta + (t-T-M)H(\Theta, \Phi, Y), H(\Theta, \Phi, Y)) \in A, L > t-T, M \leq t-T). \end{aligned}$$

Wegen der stochastischen Unabhängigkeit der beteiligten Zufallsgrößen folgt analog zu den Ausführungen in den vorherigen Abschnitten

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}((X + (t-T)\Theta, \Theta) \in A, L > t-T, M > t-T) \\ &= \int_0^t \frac{1}{t} \mathbb{P}(L > t-u) \mathbb{P}(M > t-u) \mathbb{P}((X + (t-u)\Theta, \Theta) \in A) du \\ &= \int_0^t \frac{1}{t} e^{-(\mu+\nu)(t-u)} \mathbb{P}((X + (t-u)\Theta, \Theta) \in A) du \\ &= \int_A \int_0^t \frac{1}{t} e^{-(\mu+\nu)(t-u)} f(x - (t-u)\theta) du dQ(x, \theta). \end{aligned}$$

Für den zweiten Term gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}((X + M\Theta + (t-T-M)H(\Theta, \Phi, Y), H(\Theta, \Phi, Y)) \in A, L > t-T, M \leq t-T) \\ &= \int_0^t \frac{1}{t} \mathbb{P}((X + M\Theta + (t-u-M)H(\Theta, \Phi, Y), H(\Theta, \Phi, Y)) \in A, M \leq t-u) \\ & \quad e^{-\mu(t-u)} du \\ &= \int_0^t \int_0^{t-u} \frac{1}{t} \mathbb{P}((X + M\Theta + (t-u-M)H(\Theta, \Phi, Y), H(\Theta, \Phi, Y)) \in A | M = m) \\ & \quad e^{-\mu(t-u)} d\mathbb{P}^M(m) du \\ &= \int_0^t \int_0^{t-u} \frac{1}{t} \mathbb{P}((X + m\Theta + (t-u-m)H(\Theta, \Phi, Y), H(\Theta, \Phi, Y)) \in A) \\ & \quad \nu e^{-\nu m} e^{-\mu(t-u)} dm du \\ &= \int_0^t \int_0^{t-u} \int_{S^2} \frac{1}{t} \mathbb{P}((X + m\theta_0 + (t-u-m)H(\theta_0, \Phi, Y), H(\theta_0, \Phi, Y)) \in A) \\ & \quad \nu e^{-\nu m} e^{-\mu(t-u)} d\mathbb{P}^\Theta(\theta_0) dm du \\ &= \int_A \int_{S^2} \int_0^t \int_0^{t-u} \frac{1}{t} \nu e^{-\nu m} e^{-\mu(t-u)} \zeta(\theta|\theta_0) f(x - m\theta_0 - (t-u-m)\theta) \\ & \quad dm du d\Lambda(\theta_0) dQ(x, \theta), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt analog zu (4) geschlossen haben. Das Diffusionsmaß $\mathcal{D}_t^{\text{MAS}}$ zum Zeitpunkt t besitzt demnach die Q -Dichte

$$\begin{aligned} & u_t^{\text{MAS}}(x, \theta) \\ = & 2\lambda \int_0^t e^{-(\mu+\nu)(t-u)} f(x - (t-u)\theta) du \\ + & 2\lambda \int_{S^2} \int_0^t \int_0^{t-u} \nu e^{-\nu m} e^{-\mu(t-u)} \zeta(\theta|\theta_0) f(x - m\theta_0 - (t-u-m)\theta) dm du d\Lambda(\theta_0). \end{aligned}$$

Sie zerfällt in die *Dichte*

$$u_t^{\text{MAS},(1)}(x, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} 2\lambda \int_0^t e^{-(\mu+\nu)(t-u)} f(x - (t-u)\theta) du$$

der erwarteten Anzahl nicht gestreuter Teilchen im Punkt x mit Richtung θ zum Zeitpunkt t und die *Dichte*

$$\begin{aligned} & u_t^{\text{MAS},(2)}(x, \theta) \\ \stackrel{\text{def}}{=} & 2\lambda \int_{S^2} \int_0^t \int_0^{t-u} \nu e^{-\nu m} e^{-\mu(t-u)} \zeta(\theta|\theta_0) f(x - m\theta_0 - (t-u-m)\theta) dm du d\Lambda(\theta_0) \end{aligned}$$

der erwarteten Anzahl gestreuter Teilchen im Punkt x mit Richtung θ zum Zeitpunkt t .

3.4.2 Bestimmung der Transportgleichung (MAS)

Wir wählen erneut den Ansatz

$$u_{t+s}^{\text{MAS}}(x + s\theta, \theta) = u_t^{\text{MAS}}(x, \theta) + (u_{t+s}^{\text{MAS}}(x + s\theta, \theta) - u_t^{\text{MAS}}(x, \theta))$$

und bestimmen die Ableitung der Funktion $\tau \mapsto u_{t+\tau}^{\text{MAS}}(x + \tau\theta, \theta)$. Analog zu den entsprechenden Ausführungen im letzten Abschnitt gilt

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\tau} u_{t+\tau}^{\text{MAS}}(x + \tau\theta, \theta) \\ = & \frac{d}{d\tau} u_{t+\tau}^{\text{MAS},(1)}(x + \tau\theta, \theta) + \frac{d}{d\tau} u_{t+\tau}^{\text{MAS},(2)}(x + \tau\theta, \theta) \\ = & -(\mu + \nu) u_{t+\tau}^{\text{MAS},(1)}(x + \tau\theta, \theta) + 2\lambda f(x + \tau\theta) - \mu u_{t+\tau}^{\text{MAS},(2)}(x + \tau\theta, \theta) \\ + & e^{-\mu\tau} \frac{d}{d\tau} \left[2\lambda \int_0^{t+\tau} \int_0^{t+\tau-u} \int_{S^2} \nu e^{-\nu m} e^{-\mu(t-u)} \zeta(\theta|\theta_0) f(x - m\theta_0 - (t-u-m)\theta) \right. \\ & \left. d\Lambda(\theta_0) dm du \right] \\ = & -(\mu + \nu) u_{t+\tau}^{\text{MAS},(1)}(x + \tau\theta, \theta) - \mu u_{t+\tau}^{\text{MAS},(2)}(x + \tau\theta, \theta) + 2\lambda f(x + \tau\theta) \\ + & e^{-\mu\tau} \frac{d}{d\tau} \left[2\lambda \int_{-t}^{\tau} \int_0^{\tau-u} \int_{S^2} \nu e^{-\nu m} e^{\mu u} \zeta(\theta|\theta_0) f(x - m\theta_0 + (u+m)\theta) d\Lambda(\theta_0) dm du \right]. \end{aligned}$$

Mithilfe der Differentiationsregel

$$\frac{d}{d\tau} \int_a^{\tau} \int_b^{\tau-x} g(x, y) dy dx = \int_a^{\tau} \left[\frac{d}{d\tau} \int_b^{\tau-x} g(x, y) dy \right] dx + \int_b^0 g(\tau, y) dy \quad (5)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{d\tau} 2\lambda \int_{-t}^{\tau} \int_0^{\tau-u} \int_{S^2} \nu e^{-\nu m} e^{\mu u} \zeta(\theta|\theta_0) f(x - \theta_0 m + \theta(u+m)) d\Lambda(\theta_0) dm du \\
= & 2\lambda \int_{-t}^{\tau} \frac{d}{d\tau} \left[\int_0^{\tau-u} \int_{S^2} \nu e^{-\nu m} e^{\mu u} \zeta(\theta|\theta_0) f(x - m\theta_0 + (u+m)\theta) d\Lambda(\theta_0) dm du \right] \\
+ & 2\lambda \int_0^0 \int_{S^2} \nu e^{-\nu m} e^{\mu \tau} \zeta(\theta|\theta_0) f(x - m\theta_0 + (\tau+m)\theta) d\Lambda(\theta_0) dm \\
= & 2\lambda \int_{-t}^{\tau} \int_{S^2} \nu e^{-\nu(\tau-u)} e^{\mu u} \zeta(\theta|\theta_0) f(x - (\tau-u)\theta_0 + \tau\theta) d\Lambda(\theta_0) du \\
= & 2\lambda e^{-\nu\tau} \int_{-t}^{\tau} \int_{S^2} \nu e^{(\mu+\nu)u} \zeta(\theta|\theta_0) f(x - (\tau-u)\theta_0 + \tau\theta) d\Lambda(\theta_0) du \\
= & 2\lambda e^{-\nu\tau} \int_0^{t+\tau} \int_{S^2} \nu e^{-(\mu+\nu)(t-u)} \zeta(\theta|\theta_0) f(x - (t+\tau-u)\theta_0 + \tau\theta) d\Lambda(\theta_0) du.
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen in obige Gleichung für die Ableitung von $u_{t+\tau}(x + \tau\theta, \theta)$ nach τ und Anwenden des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}
& u_{t+s}^{\text{MAS}}(x + s\theta, \theta) \\
= & u_t^{\text{MAS}}(x, \theta) - \int_0^s \left(\mu u_{t+\tau}^{\text{MAS}}(x + \tau\theta, \theta) + \nu u_{t+\tau}^{\text{MAS},(1)}(x + \tau\theta, \theta) \right) d\tau + \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\theta) d\tau \\
+ & \int_0^s \int_{S^2} \int_0^{t+\tau} 2\lambda \nu e^{-(\mu+\nu)(t+\tau-u)} \zeta(\theta|\theta_0) f(x - (t+\tau-u)\theta_0 + \tau\theta) du d\Lambda(\theta_0) d\tau \\
= & u_t^{\text{MAS}}(x, \theta) - \int_0^s \left(\mu u_{t+\tau}^{\text{MAS}}(x + \tau\theta, \theta) + \nu u_{t+\tau}^{\text{MAS},(1)}(x + \tau\theta, \theta) \right) d\tau + \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\theta) d\tau \\
+ & \int_0^s \int_{S^2} \nu \zeta(\theta|\theta_0) u_{t+\tau}^{\text{MAS},(1)}(x + \tau\theta, \theta_0) d\Lambda(\theta_0) d\tau.
\end{aligned}$$

Für jedes $t, s > 0$ genügt die Dichte des Diffusionsmaßes also einer verallgemeinerten Transportgleichung mit Dämpfungsterm

$$\int_0^s \left(\mu u_{t+\tau}^{\text{MAS}}(x + \tau\theta, \theta) + \nu u_{t+\tau}^{\text{MAS},(1)}(x + \tau\theta, \theta) \right) d\tau,$$

Streuterm

$$\int_0^s \int_{S^2} \nu \zeta(\theta|\theta_0) u_{t+\tau}^{\text{MAS},(1)}(x + \tau\theta, \theta_0) d\Lambda(\theta_0) d\tau$$

und Quellterm

$$\int_0^s 2\lambda f(x + \tau\theta) d\tau.$$

Dabei sind der durch Streuung verursachte Teil $\int_0^s \nu u_{t+\tau}^{\text{MAS},(1)}(x + \tau\theta, \theta) d\tau$ des Dämpfungstermes und der Streuterm nur von den ungestreuten Teilchen (repräsentiert durch $u_{t+\tau}^{\text{MAS},(1)}$) abhängig.

3.4.3 Stationäre Version des Diffusionsmaßes (MAS)

Die Grenzwertbetrachtung $t \rightarrow \infty$ liefert

$$\begin{aligned}
& \mathcal{D}^{\text{MAS}}(A) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{D}_t^{\text{MAS}}(A) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_A 2\lambda \int_0^t e^{-(\mu+\nu)(t-u)} f(x - (t-u)\theta) du + 2\lambda \int_{S^2} \int_0^t \int_0^{t-u} \nu e^{-\nu m} e^{-\mu(t-u)} \\
&\quad \zeta(\theta|\theta_0) f(x - m\theta_0 - (t-u-m)\theta) dm du d\Lambda(\theta_0) dQ(x, \theta) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} 2\lambda \int_0^t \int_A e^{-(\mu+\nu)u} f(x - u\theta) dQ(x, \theta) du + 2\lambda \int_0^t \int_0^u \int_A \int_{S^2} \nu e^{-\nu m} e^{-\mu u} \\
&\quad \zeta(\theta|\theta_0) f(x - m\theta_0 - (u-m)\theta) d\Lambda(\theta_0) dQ(x, \theta) dm du \\
&= 2\lambda \int_0^\infty \int_A e^{-(\mu+\nu)u} f(x - u\theta) dQ(x, \theta) du + 2\lambda \int_0^\infty \int_0^u \int_A \int_{S^2} \nu e^{-\nu m} e^{-\mu u} \\
&\quad \zeta(\theta|\theta_0) f(x - m\theta_0 - (u-m)\theta) d\Lambda(\theta_0) dQ(x, \theta) dm du
\end{aligned}$$

als stationäre Version des Diffusionsmaßes. Damit ist

$$\begin{aligned}
u^{\text{MAS}}(x, \theta) &= \int_0^\infty 2\lambda e^{-(\mu+\nu)u} f(x - u\theta) du \\
&\quad + \int_{S^2} \int_0^\infty \int_0^u 2\lambda \nu e^{-\nu m} e^{-\mu u} \zeta(\theta|\theta_0) f(x - m\theta_0 - (u-m)\theta) dm du d\Lambda(\theta_0)
\end{aligned}$$

die Q -Dichte des stationären Diffusionsmaßes \mathcal{D}^{MAS} . Für diese gilt aufgrund obiger Ergebnisse

$$\begin{aligned}
& u^{\text{MAS}}(x + s\theta, \theta) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} u_{t+s}^{\text{MAS}}(x + s\theta, \theta) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(u_t^{\text{MAS}}(x, \theta) - \int_0^s (\mu u_{t+\tau}^{\text{MAS}}(x + \tau\theta, \theta) + \nu u_{t+\tau}^{\text{MAS},(1)}(x + \tau\theta, \theta)) d\tau \right. \\
&\quad \left. + \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\theta) d\tau + \int_0^s \int_{S^2} \nu \zeta(\theta|\theta_0) u_{t+\tau}^{\text{MAS},(1)}(x + \tau\theta, \theta) d\Lambda(\theta_0) d\tau \right) \\
&= u^{\text{MAS}}(x, \theta) - \int_0^s (\mu u^{\text{MAS}}(x + \tau\theta, \theta) + \nu u^{\text{MAS},(1)}(x + \tau\theta, \theta)) d\tau \\
&\quad + \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\theta) d\tau + \int_0^s \int_{S^2} \nu \zeta(\theta|\theta_0) u^{\text{MAS},(1)}(x + \tau\theta, \theta) d\Lambda(\theta_0) d\tau
\end{aligned}$$

für beliebiges $s > 0$, wobei wir

$$u^{\text{MAS},(1)}(x, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} 2\lambda \int_0^\infty e^{-(\mu+\nu)u} f(x - u\theta) du$$

gesetzt und im letzten Schritt die monotone Konvergenz von $(u_t^{\text{MAS}})_{t>0}$ und $(u_t^{\text{MAS},(1)})_{t>0}$ ausgenutzt haben. Damit erfüllt $u^{\text{MAS}}(x, \theta)$ eine verallgemeinerte zeitunabhängige Transportgleichung mit Dämpfungsterm

$$\int_0^s (\mu u^{\text{MAS}}(x + \tau\theta, \theta) + \nu u^{\text{MAS},(1)}(x + \tau\theta, \theta)) d\tau,$$

Streuterm

$$\int_0^s \int_{S^2} \nu \zeta(\theta|\theta_0) u^{\text{MAS},(1)}(x + \tau\theta, \theta_0) d\Lambda(\theta_0) d\tau$$

und Quellterm

$$2\lambda \int_0^s f(x + \tau\theta) d\tau.$$

3.5 Diffusionsmodell mit Mehrfachstreuung (Modell MAMS)

Bevor wir uns der Erweiterung unseres Modells in Bezug auf ortsabhängige Absorption und Streuung widmen, integrieren wir zunächst die Möglichkeit der Mehrfachstreuung. Damit ein Teilchen auf seinem Weg durch den PET-Zylinder auch mehrfach gestreut werden kann, benötigen wir im Modell anstelle einer einzigen unendlich viele $Exp(\nu)$ -verteilte Lebensdauern. Nach Ablauf der ersten Lebensdauer tritt das erste Streueignis ein, wodurch das Teilchen eine neue Richtung erhält. Unmittelbar danach beginnt eine zweite Lebensdauer, nach deren Ablauf zum zweiten Mal gestreut wird und so fort. Den Streuungsprozess werden wir im nun folgenden Abschnitt mathematisch präzisieren.

3.5.1 Modellierung der Streueignisse

Zur Modellierung der Mehrfachstreuung versehen wir jedes Teilchen mit einem homogenen Poissonprozess der Intensität $\nu > 0$, den wir im Folgenden als *Streuungsprozess* bezeichnen. Den Streuungsprozess des n -ten \oplus - beziehungsweise \ominus -Teilchens bezeichnen wir mit $(M_n^\pm(t))_{t \geq 0}$. Seine Ankunftszeiten $(S_{n,k}^\pm)_{k \in \mathbb{N}}$ bezeichnen wir als *Streuzeitpunkte*, seine stochastisch unabhängigen $Exp(\nu)$ -verteilten Zwischenankunftszeiten $(\Delta S_{n,k}^\pm)_{k \in \mathbb{N}} = (S_{n,k}^\pm - S_{n,k-1}^\pm)_{k \in \mathbb{N}}$ als *Zwischenstreuzeiten* (wobei wir $S_{n,0}^\pm = 0$ setzen) und seine Intensität ν als *Streuungsrate*. Die Familie von Prozessen $((M_n^\alpha(t))_{t \geq 0})_{\alpha \in \{+, -\}, n \in \mathbb{N}}$ sei stochastisch unabhängig und unabhängig von allen in den vorherigen Abschnitten eingeführten Zufallsvariablen. Für das n -te \oplus - beziehungsweise \ominus -Teilchen ist die Position zum Zeitpunkt $t > T_n$ gleich

$$X_n^\pm(t) = X_n + \sum_{k=1}^{M_n^\pm(t-T_n)} \Delta S_{n,k}^\pm \Theta_{n,k-1}^\pm + (t - T_n - S_{n, M_n^\pm(t-T_n)}^\pm) \Theta_{n, M_n^\pm(t-T_n)}^\pm$$

und die Richtung gleich

$$\Theta_n^\pm(t) = \Theta_{n, M_n^\pm(t-T_n)}^\pm.$$

Zur Erinnerung: Leere Summen interpretieren wir stets als 0. Dabei sei $\Theta_{n,0}^\pm$ gleichverteilt auf S^2 die Richtung des n -ten \oplus - beziehungsweise \ominus -Teilchens unmittelbar nach der Emission und es gelte $\Theta_{n,0}^- = -\Theta_{n,0}^+$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zur Definition der Zufallsvariablen $(\Theta_{n,k}^\pm)_{k \in \mathbb{N}}$ bedarf es einiger Vorarbeit:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \{+, -\}$ sei die Familie $(\Phi_{n,k}^\alpha)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Kopie der stochastisch unabhängigen Familie $(\Phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von identisch verteilten Zufallsgrößen mit Lebesgue-Dichte

h , wobei $\Phi_{n,k}^\alpha$ den Streuwinkel des k -ten Streuereignisses des n -ten α -Teilchens bezeichnet. Ferner sei die Familie $(Y_{n,k}^\alpha)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Kopie der stochastisch unabhängigen Familie $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von $U(0, 2\pi)$ -verteilten Zufallsgrößen. Analog zu den Zufallsgrößen $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im vorherigen Abschnitt handelt es sich dabei um Hilfsvariablen zur Konstruktion der neuen Richtung nach den entsprechenden Streuereignissen. Die Zufallsgrößen $(\Phi_{n,k}^\alpha, Y_{n,k}^\alpha)_{\alpha \in \{+, -\}; n, k \in \mathbb{N}}$ seien stochastisch unabhängig und unabhängig von allen oben und in den vorherigen Abschnitten eingeführten Zufallsvariablen.

Mithilfe der Funktion $H : S^2 \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \longrightarrow S^2$

$$H(\theta, \phi, y) = \cos(\phi)\theta + \sin(\phi) \left(\cos(y) \frac{\theta'}{\|\theta'\|} + \sin(y) \frac{\theta''}{\|\theta''\|} \right)$$

aus Abschnitt 3.3 definieren wir für alle $n, k \in \mathbb{N}$ die Richtung $\Theta_{n,k}^\pm$ des n -ten \oplus - beziehungsweise \ominus -Teilchens unmittelbar nach dem k -ten Streuereignis rekursiv durch

$$\Theta_{n,k}^\pm = H(\Theta_{n,k-1}^\pm, \Phi_{n,k}^\pm, Y_{n,k}^\pm).$$

Für jedes $\alpha \in \{+, -\}$ und $n \in \mathbb{N}$ bildet die Familie $(\Theta_{n,k}^\alpha)_{k \in \mathbb{N}}$ daher eine zeitlich homogene Markov-Kette mit Übergangskern

$$\mathcal{S}(\theta_0, d\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}^{H(\Theta, \Phi, Y) | \Theta = \theta_0}(d\theta) = \mathbb{P}^{H(\theta_0, \Phi, Y)}(d\theta) = \zeta(\theta | \theta_0) \Lambda(d\theta)$$

bei Verwendung der bekannten Notation.

3.5.2 Bestimmung der Dichte des Diffusionsmaßes (MAMS)

Wie in den vorherigen Modellen repräsentiert das zufällige Punktmaß

$$\mathcal{N}_t^{\text{MAMS}}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{N(t)} (\mathbf{1}_A(Y_n^+(t)) \mathbf{1}_{(t-T_n, \infty)}(L_n^+) + \mathbf{1}_A(Y_n^-(t)) \mathbf{1}_{(t-T_n, \infty)}(L_n^-))$$

mit $Y_n^\pm(t) = (X_n^\pm(t), \Theta_n^\pm(t))$ den Zustand des Systems zum Zeitpunkt $t > 0$. Man beachte, dass die Teilchenprozesse $((Y_n^\pm(t))_{t>0})_{n \in \mathbb{N}}$ aufgrund der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung offenbar Markov-Prozesse sind. Sei im Folgenden $M(t)$ ein homogener Poissonprozess der Intensität ν mit Ankunftszeiten $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(\Delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine stochastisch unabhängige Familie von $Exp(\nu)$ -verteilten Zufallsgrößen, Θ_0 gleichverteilt auf S^2 , sowie $(\Theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine zeitlich homogene Markov-Kette mit Übergangskern \mathcal{S} , die rekursiv definiert sei durch

$$\Theta_k \stackrel{\text{def}}{=} H(\Theta_{k-1}, \Phi_k, Y_k) = H_k(\Theta_0, \Phi_1, \dots, \Phi_k, Y_1, \dots, Y_k)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Insbesondere erhalten wir $\prod_{k=1}^n \zeta(\theta_k | \theta_{k-1})$ als die bedingte Λ^n -Dichte von $(\Theta_1, \dots, \Theta_n)$ bedingt unter $\Theta_0 = \theta_0$. Mit der Notation aus den vorherigen Abschnitten

und beliebigem Q -messbaren $A \subset \mathbb{R}^3 \times S^2$ gilt dann für das zu $\mathcal{N}_t^{\text{MAMS}}(\cdot)$ gehörende Diffusionsmaß

$$\begin{aligned}
& \mathcal{D}_t^{\text{MAMS}}(A) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(t) = m) \mathbb{E}(\mathcal{N}_t^{\text{MAMS}}(A) | N(t) = m) \\
&= 2\lambda t \mathbb{P}\left(\left(X + \sum_{k=1}^{M(t-T)} \Delta S_k \Theta_{k-1} + (t-T - S_{M(t-T)})\Theta_{M(t-T)}, \Theta_{M(t-T)}\right) \in A, L > t-T\right) \\
&= 2\lambda t \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(M(t-T) = n, \left(X + \sum_{k=1}^n \Delta S_k \Theta_{k-1} + (t-T - S_n)\Theta_n, \Theta_n\right) \in A, L > t-T\right) \\
&= 2\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left(X + \sum_{k=1}^n \Delta_k \Theta_{k-1} + (t-T - \Delta_n)\Theta_n, \Theta_n\right) \in A, L > t-T, \right. \\
&\quad \left. \Delta_1 \leq t-T, \Delta_2 \leq t-T - \Delta_1, \dots, \Delta_n \leq t-T - \sum_{k=1}^{n-1} \Delta_k, \Delta_{n+1} > t-T - \sum_{k=1}^n \Delta_k\right).
\end{aligned}$$

Ausintegrieren über die $(\Delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ liefert

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(\left(X + \sum_{k=1}^n \Delta_k \Theta_{k-1} + (t-T - \Delta_n)\Theta_n, \Theta_n\right) \in A, L > t-T, \right. \\
&\quad \left. \Delta_1 \leq t-T, \Delta_2 \leq t-T - \Delta_1, \dots, \Delta_n \leq t-T - \sum_{k=1}^{n-1} \Delta_k, \Delta_{n+1} > t-T - \sum_{k=1}^n \Delta_k\right) \\
&= \frac{1}{t} \int_0^t \int_0^{t-u} \int_0^{t-u-m_1} \dots \int_0^{t-u-\sum_{k=1}^{n-1} m_k} \nu^n e^{-\nu m_1} \dots e^{-\nu m_n} \\
&\quad \mathbb{P}\left(\left(X + \sum_{k=1}^n m_k \Theta_{k-1} + \left(t-u - \sum_{k=1}^n m_k\right)\Theta_n, \Theta_n\right) \in A, \Delta_{n+1} > t-u - \sum_{k=1}^n m_k, \right. \\
&\quad \left. L > t-u\right) dm_n \dots dm_1 du \\
&= \frac{1}{t} \int_0^t \int_0^{t-u} \int_0^{t-u-m_1} \dots \int_0^{t-u-\sum_{k=1}^{n-1} m_k} \nu^n e^{-\nu \sum_{k=1}^n m_k} e^{-\nu(t-u-\sum_{k=1}^n m_k)} e^{-\mu(t-u)} \\
&\quad \mathbb{P}\left(\left(X + \sum_{k=1}^n m_k \Theta_{k-1} + \left(t-u - \sum_{k=1}^n m_k\right)\Theta_n, \Theta_n\right) \in A\right) dm_n \dots dm_1 du
\end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}
& \mathcal{D}_t^{\text{MAMS}}(A) \\
&= 2\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t-u} \int_0^{t-u-m_1} \dots \int_0^{t-u-\sum_{k=1}^{n-1} m_k} \nu^n e^{-(\mu+\nu)(t-u)} \\
&\quad \mathbb{P}\left(\left(X + \sum_{k=1}^n m_k \Theta_{k-1} + \left(t-u - \sum_{k=1}^n m_k\right)\Theta_n, \Theta_n\right) \in A\right) dm_n \dots dm_1 du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\lambda \int_0^t e^{-(\mu+\nu)(t-u)} \mathbb{P}((X + (t-u)\Theta_0, \Theta_0) \in A) du \\
&+ 2\lambda \int_0^t \int_0^{t-u} \nu e^{-(\mu+\nu)(t-u)} \mathbb{P}((X + m_1\Theta_0 + (t-u-m_1)\Theta_1, \Theta_1) \in A) dm_1 du \\
&+ 2\lambda \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t-u} \int_0^{t-u-m_1} \cdots \int_0^{t-u-\sum_{k=1}^{n-1} m_k} \nu^n e^{-(\mu+\nu)(t-u)} \\
&\quad \mathbb{P}\left(\left(X + \sum_{k=1}^n m_k \Theta_{k-1} + \left(t-u - \sum_{k=1}^n m_k\right) \Theta_n, \Theta_n\right) \in A\right) dm_n \dots dm_1 du.
\end{aligned}$$

Wenden wir uns nun dem Term $\mathbb{P}((X + \sum_{k=1}^n m_k \Theta_{k-1} + (t-u - \sum_{k=1}^n m_k) \Theta_n, \Theta_n) \in A)$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ zu. Aufgrund der oben erwähnten Eigenschaften von $(\Theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ als homogene Markov-Kette mit Übergangskern \mathcal{S} erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\left(X + \sum_{k=1}^n m_k \Theta_{k-1} + \left(t-u - \sum_{k=1}^n m_k\right) \Theta_n, \Theta_n\right) \in A\right) \\
&= \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \prod_{k=1}^{n-1} \zeta(\theta_{k+1}|\theta_k) \zeta(\theta|\theta_n) \mathbb{P}\left(\left(X + \sum_{k=1}^n m_k \theta_k + \left(t-u - \sum_{k=1}^n m_k\right) \theta_{n+1}, \theta_{n+1}\right) \in A\right) \\
&\quad d\Lambda(\theta) d\Lambda(\theta_n) \cdots d\Lambda(\theta_1) \\
&= \int_A \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \prod_{k=1}^{n-1} \zeta(\theta_{k+1}|\theta_k) \zeta(\theta|\theta_n) f\left(x - \sum_{k=1}^n m_k \theta_k - \left(t-u - \sum_{k=1}^n m_k\right) \theta_{n+1}\right) \\
&\quad d\Lambda(\theta_n) \cdots d\Lambda(\theta_1) dQ(x, \theta)
\end{aligned}$$

(wobei an $\prod_{k=1}^{-1} = \prod_{k=1}^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$ erinnert sei) und damit für beliebiges $t > 0$

$$\begin{aligned}
&u_t^{\text{MAMS}}(x, \theta) \\
&= 2\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n \int_0^t \int_0^{t-u} \int_0^{t-u-m_1} \cdots \int_0^{t-u-\sum_{k=1}^{n-1} m_k} \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \\
&\quad \prod_{k=1}^{n-1} \zeta(\theta_{k+1}|\theta_k) \zeta(\theta|\theta_n) e^{-(\mu+\nu)(t-u)} f\left(x - \sum_{k=1}^n m_k \theta_k - \left(t-u - \sum_{k=1}^n m_k\right) \theta\right) \\
&\quad d\Lambda(\theta_n) \cdots d\Lambda(\theta_1) dm_n \dots dm_1 du
\end{aligned}$$

als Q -Dichte des Diffusionsmaßes $\mathcal{D}_t^{\text{MAMS}}$ zum Zeitpunkt t . Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichnet dabei

$$\begin{aligned}
&u_t^{\text{MAMS},(n)}(x, \theta) \\
&= 2\lambda \nu^n \int_0^t \int_0^{t-u} \int_0^{t-u-m_1} \cdots \int_0^{t-u-\sum_{k=1}^{n-1} m_k} \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \\
&\quad \prod_{k=1}^{n-1} \zeta(\theta_{k+1}|\theta_k) \zeta(\theta|\theta_n) e^{-(\mu+\nu)(t-u)} f\left(x - \sum_{k=1}^n m_k \theta_k - \left(t-u - \sum_{k=1}^n m_k\right) \theta\right) \\
&\quad d\Lambda(\theta_n) \cdots d\Lambda(\theta_1) dm_n \dots dm_1 du
\end{aligned}$$

die Q -Dichte der erwarteten Anzahl der genau n -fach gestreuten Teilchen.

3.5.3 Bestimmung der Transportgleichung (MAMS)

Wie man bereits an der komplexen Gestalt der Dichte $u_t^{\text{MAMS}}(x, \theta)$ erahnen kann, ist die Berechnung der Transportgleichung für das Modell mit Mehrfachstreuung sehr aufwendig. Daher überrascht es ein wenig, wie einfach die Transportgleichung letztendlich ausfällt. Zur Vereinfachung schreiben wir für $n \in \mathbb{N}_0$

$$I_n = \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \prod_{k=1}^{n-1} \zeta(\theta_{k+1} | \theta_k) \zeta(\theta | \theta_n) f\left(x - \sum_{k=1}^n m_k \theta_k - \left(t - u - \sum_{k=1}^n m_k\right) \theta\right) d\Lambda(\theta_n) \cdots d\Lambda(\theta_1)$$

und wählen erneut den Ansatz

$$u_{t+s}^{\text{MAMS}}(x + s\theta, \theta) = u_t^{\text{MAMS}}(x, \theta) + u_{t+s}^{\text{MAMS}}(x + s\theta, \theta) - u_t^{\text{MAMS}}(x, \theta).$$

Durch mehrfaches Anwenden der Differentiationsregel (5) erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\tau} u_{t+\tau}^{\text{MAMS}}(x + \tau\theta, \theta) \\ = & \frac{d}{d\tau} 2\lambda e^{-(\mu+\nu)\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n \int_0^{t+\tau} \int_0^{t+\tau-u} \int_0^{t+\tau-u-m_1} \cdots \int_0^{t+\tau-u-\sum_{k=1}^{n-1} m_k} e^{-(\mu+\nu)(t-u)} I_n \\ & dm_n \dots dm_1 du \\ = & -(\mu + \nu) u_{t+\tau}^{\text{MAMS}}(x + \tau\theta, \theta) \\ & + 2\lambda e^{-(\mu+\nu)\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n \int_0^{t+\tau} \frac{d}{d\tau} \int_0^{t+\tau-u} \int_0^{t+\tau-u-m_1} \cdots \int_0^{t+\tau-u-\sum_{k=1}^{n-1} m_k} e^{-(\mu+\nu)(t-u)} I_n \\ & dm_n \dots dm_1 du \\ & + 2\lambda e^{-(\mu+\nu)\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n \int_0^{t+\tau-(t+\tau)} \int_0^{t+\tau-(t+\tau)-m_1} \cdots \int_0^{t+\tau-(t+\tau)-\sum_{k=1}^{n-1} m_k} e^{-(\mu+\nu)(t-(t+\tau))} I_n \\ & dm_n \dots dm_1 du \\ = & -(\mu + \nu) u_{t+\tau}^{\text{MAMS}}(x + \tau\theta, \theta) \\ & + 2\lambda e^{-(\mu+\nu)\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n \int_0^{t+\tau} \int_0^{t+\tau-u} \frac{d}{d\tau} \int_0^{t+\tau-u-m_1} \cdots \int_0^{t+\tau-u-\sum_{k=1}^{n-1} m_k} e^{-(\mu+\nu)(t-u)} I_n \\ & dm_n \dots dm_1 du \\ & \vdots \\ = & -(\mu + \nu) u_{t+\tau}^{\text{MAMS}}(x + \tau\theta, \theta) + 2\lambda f(x + \tau\theta) \\ & + 2\lambda e^{-(\mu+\nu)\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \nu^n \int_0^{t+\tau} \int_0^{t+\tau-u} \int_0^{t+\tau-u-m_1} \cdots \int_0^{t+\tau-u-\sum_{k=1}^{n-2} m_k} e^{-(\mu+\nu)(t-u)} \\ & \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \prod_{k=1}^{n-1} \zeta(\theta_{k+1} | \theta_k) f\left(x - \sum_{k=1}^{n-1} m_k \theta_k - \left(t + \tau - u - \sum_{k=1}^{n-1} m_k\right) \theta_n + \tau\theta\right) \\ & \zeta(\theta | \theta_n) d\Lambda(\theta_n) \cdots d\Lambda(\theta_1) dm_{n-1} \dots dm_1 du, \end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt die fast sichere absolute Konvergenz der Reihe ausgenutzt (die Anzahl der bis zum Zeitpunkt t emittierten Teilchen ist fast sicher endlich) und im

letzten Schritt den Summanden für $n = 0$ (der für den Quellterm verantwortlich ist) aus der Summe extrahiert haben. Für den 0-ten Summanden gilt nämlich

$$\begin{aligned}
& 2\lambda e^{-(\mu+\nu)\tau} \frac{d}{d\tau} \int_0^{t+\tau} I_0 e^{-(\mu+\nu)(t-u)} du \\
&= 2\lambda e^{-(\mu+\nu)\tau} \frac{d}{d\tau} \int_0^{t+\tau} e^{-(\mu+\nu)(t-u)} f(x - (t-u)\theta) du \\
&= 2\lambda e^{-(\mu+\nu)\tau} f(x + \tau\theta) e^{(\mu+\nu)\tau} \\
&= 2\lambda f(x + \tau\theta).
\end{aligned}$$

Nun summieren wir wieder über $n \in \mathbb{N}_0$, ersetzen für alle $n \in \mathbb{N}_0$ im n -ten Summanden θ_n durch θ' und ziehen das Integral über θ' aus der Summe heraus, wodurch wir

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{d\tau} u_{t+\tau}^{\text{MAMS}}(x + \tau\theta, \theta) \\
&= -(\mu + \nu) u_{t+\tau}^{\text{MAMS}}(x + \tau\theta, \theta) + 2\lambda f(x + \tau\theta) \\
&+ 2\lambda e^{-(\mu+\nu)\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \nu^n \int_0^{t+\tau} \int_0^{t+\tau-u} \int_0^{t+\tau-u-m_1} \cdots \int_0^{t+\tau-u-\sum_{k=1}^{n-2} m_k} e^{-(\mu+\nu)(t-u)} \\
&\quad \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \prod_{k=1}^{n-2} \zeta(\theta_{k+1}|\theta_k) \zeta(\theta'|\theta_{n-1}) f\left(x - \sum_{k=1}^{n-1} m_k \theta_k - \left(t + \tau - u - \sum_{k=1}^{n-1} m_k\right) \theta' + \tau\theta\right) \\
&\quad \zeta(\theta|\theta') d\Lambda(\theta') d\Lambda(\theta_{n-1}) \cdots d\Lambda(\theta_1) dm_{n-1} \dots dm_1 du \\
&= -(\mu + \nu) u_{t+\tau}^{\text{MAMS}}(x + \tau\theta, \theta) + 2\lambda f(x + \tau\theta) \\
&+ 2\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \nu^{n+1} \int_0^{t+\tau} \int_0^{t+\tau-u} \int_0^{t+\tau-u-m_1} \cdots \int_0^{t+\tau-u-\sum_{k=1}^{n-1} m_k} e^{-(\mu+\nu)(t+\tau-u)} \\
&\quad \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \prod_{k=1}^{n-1} \zeta(\theta_{k+1}|\theta_k) \zeta(\theta'|\theta_n) f\left(x + \tau\theta - \sum_{k=1}^n m_k \theta_k - \left(t + \tau - u - \sum_{k=1}^n m_k\right) \theta'\right) \\
&\quad \zeta(\theta|\theta') d\Lambda(\theta') d\Lambda(\theta_n) \cdots d\Lambda(\theta_1) dm_n \dots dm_1 du \\
&= -(\mu + \nu) u_{t+\tau}^{\text{MAMS}}(x + \tau\theta, \theta) + 2\lambda f(x + \tau\theta) + \int_{S^2} \nu \zeta(\theta|\theta') u_{t+\tau}^{\text{MAMS}}(x + \tau\theta, \theta') d\Lambda(\theta')
\end{aligned}$$

erhalten. Mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ergibt sich daraus für beliebige $t, s > 0$ die Transportgleichung

$$\begin{aligned}
u_{t+s}^{\text{MAMS}}(x + s\theta, \theta) &= u_t^{\text{MAMS}}(x, \theta) - \int_0^s (\mu + \nu) u_{t+\tau}^{\text{MAMS}}(x + \tau\theta, \theta) d\tau + \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\theta) d\tau \\
&+ \int_0^s \int_{S^2} \nu \zeta(\theta|\theta') u_{t+\tau}^{\text{MAMS}}(x + \tau\theta, \theta') d\Lambda(\theta') d\tau
\end{aligned}$$

für die Q -Dichte des Diffusionsmaßes. MAMS ist also das erste Streuung berücksichtigende Diffusionsmodell, dessen Quell-, Dämpfungs- und Streuterm der Gestalt der allgemeinen Transportgleichung (1) entsprechen. Für dieses umfassende Modell erhalten wir im Gegensatz zu den zuerst vorgestellten Modellen sowohl eine Dämpfungsrate ($a(x) \equiv \mu + \nu$) als auch einen Streukern im Sinne von (1). Der ortsunabhängige Streukern $p(x + \tau\theta, \theta, \theta') = \nu \zeta(\theta|\theta')$ ist linear in der Streurrate ν .

3.5.4 Stationäre Version des Diffusionsmaßes (MAMS)

Auch für das hier betrachtete Modell MAMS liefert die Grenzwertbetrachtung $t \rightarrow \infty$ die stationäre Version des Diffusionsmaßes. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\text{MAMS}}(A) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{D}_t^{\text{MAMS}}(A) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_A \left(2\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n \int_0^t \int_0^{t-u} \int_0^{t-u-m_1} \cdots \int_0^{t-u-\sum_{k=1}^{n-1} m_k} \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \right. \\
&\quad \left. \prod_{k=1}^{n-1} \zeta(\theta_{k+1}|\theta_k) \zeta(\theta|\theta_n) e^{-(\mu+\nu)(t-u)} f\left(x - \sum_{k=1}^n m_k \theta_k - \left(t - u - \sum_{k=1}^n m_k\right)\theta\right) \right. \\
&\quad \left. d\Lambda(\theta_n) \cdots d\Lambda(\theta_1) dm_n \dots dm_1 du \right) dQ(x, \theta) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(2\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n \int_0^t \int_0^u \int_0^{u-m_1} \cdots \int_0^{u-\sum_{k=1}^{n-1} m_k} \int_A \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \right. \\
&\quad \left. \prod_{k=1}^{n-1} \zeta(\theta_{k+1}|\theta_k) \zeta(\theta|\theta_n) e^{-(\mu+\nu)u} f\left(x - \sum_{k=1}^n m_k \theta_k - \left(u - \sum_{k=1}^n m_k\right)\theta\right) \right. \\
&\quad \left. d\Lambda(\theta_n) \cdots d\Lambda(\theta_1) dQ(x, \theta) dm_n \dots dm_1 du \right) \\
&= 2\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n \int_0^\infty \int_0^u \int_0^{u-m_1} \cdots \int_0^{u-\sum_{k=1}^{n-1} m_k} \int_A \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \\
&\quad \prod_{k=1}^{n-1} \zeta(\theta_{k+1}|\theta_k) \zeta(\theta|\theta_n) e^{-(\mu+\nu)u} f\left(x - \sum_{k=1}^n m_k \theta_k - \left(u - \sum_{k=1}^n m_k\right)\theta\right) \\
&\quad d\Lambda(\theta_n) \cdots d\Lambda(\theta_1) dQ(x, \theta) dm_n \dots dm_1 du,
\end{aligned}$$

wobei die Existenz des Limes aus der absoluten Konvergenz der Reihe folgt. Man beachte ferner, dass der Integrand positiv ist und wegen f einen kompakten Träger besitzt. Daher ist

$$\begin{aligned}
u^{\text{MAMS}}(x, \theta) &\stackrel{\text{def}}{=} 2\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n \int_0^\infty \int_0^u \int_0^{u-m_1} \cdots \int_0^{u-\sum_{k=1}^{n-1} m_k} \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \\
&\quad \prod_{k=1}^{n-1} \zeta(\theta_{k+1}|\theta_k) \zeta(\theta|\theta_n) e^{-(\mu+\nu)u} f\left(x - \sum_{k=1}^n m_k \theta_k - \left(u - \sum_{k=1}^n m_k\right)\theta\right) \\
&\quad d\Lambda(\theta_n) \cdots d\Lambda(\theta_1) dm_n \dots dm_1 du
\end{aligned}$$

die Q -Dichte des stationären Diffusionsmaßes $\mathcal{D}^{\text{MAMS}}$. Für diese gilt aufgrund obiger Ergebnisse

$$\begin{aligned}
u^{\text{MAMS}}(x + s\theta, \theta) &= \lim_{t \rightarrow \infty} u_{t+s}^{\text{MAMS}}(x + s\theta, \theta) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(u_t^{\text{MAMS}}(x, \theta) - \int_0^s (\mu + \nu) u_{t+\tau}^{\text{MAMS}}(x + \tau\theta, \theta) d\tau \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\int_0^s 2\lambda f(x + \tau\theta) d\tau + \int_0^s \int_{S^2} \nu\zeta(\theta|\theta') u_{t+\tau}^{\text{MAMS}}(x + \tau\theta, \theta') d\Lambda(\theta') d\tau \right) \\
& = u^{\text{MAMS}}(x, \theta) - \int_0^s (\mu + \nu) u^{\text{MAMS}}(x + \tau\theta, \theta) d\tau + \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\theta) d\tau \\
& + \int_0^s \int_{S^2} \nu\zeta(\theta|\theta') u^{\text{MAMS}}(x + \tau\theta, \theta') d\Lambda(\theta') d\tau
\end{aligned}$$

für beliebiges $s > 0$, wobei wir im letzten Schritt die monotone Konvergenz von $(u_t^{\text{MAMS}})_{t>0}$ ausgenutzt haben. Damit erfüllt $u^{\text{MAMS}}(x, \theta)$ die zeitunabhängige Transportgleichung (3) mit dem Quellterm $2\lambda \int_0^s f(x + \tau\theta) d\tau$, der Dämpfungsrate $\mu + \nu$ und dem Streukern $\nu\zeta(\theta|\theta')$.

4 Diffusionsmodell mit ortsabhängiger Absorptionsrate

Die Annahme einer globalen Absorptionsrate μ ist für eine detaillierte Beschreibung der Vorgänge im PET-Scanner zu ungenau. In der Realität besitzen verschiedene Gewebetypen wie Knochen, Knorpel, Muskelgewebe und Fettgewebe Absorptionsraten, die sich stark voneinander unterscheiden. Daher ist es für eine umfassende stochastische Modellierung erforderlich, die Ortsabhängigkeit der Absorptionsrate zu berücksichtigen.

4.1 Der diskrete Ansatz mit einer treppenförmigen Absorptionsratenfunktion (Modell MDA)

Wir konzentrieren uns hier zunächst auf einen diskreten Ansatz, bei dem wir den PET-Zylinder C in k disjunkte Teilmengen mit verschiedenen Absorptionsraten aufteilen. Sei also

$$C = \sum_{i=1}^k C_i$$

mit Mengen $(C_i)_{i=1,\dots,k}$, die eine für unsere Zwecke brauchbare Gestalt besitzen. Die wesentlichen Bedingungen an die Zylinder-Teilmengen C_i sind ihre Lebesgue-Messbarkeit und die Eigenschaft, dass der Rand einer solchen Menge von jeder Gerade durch den Zylinder höchstens endlich oft durchstoßen wird. Die offenen Kerne $(C_i^\circ)_{i=1,\dots,k}$ der Zylinder-Teilmengen stellen also im mathematischen Sinne Vereinigungen endlich vieler beschränkter Gebiete (beschränkte, offene, nichtleere und zusammenhängende Teilmengen) innerhalb des Zylinders C dar. Die Teilmengen $(C_i)_{i=1,\dots,k}$ bezeichnen wir fortan als *Gewebegruppen* und die zugehörigen Absorptionsraten mit $(\mu_i)_{i=1,\dots,k}$. Dabei gelte $\mathfrak{M}^3(C_i) > 0$ und $\mu_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, k$. Anstelle einer globalen Absorptionsrate erhalten wir also eine treppenförmige *Absorptionsratenfunktion* $\mu_k : C \rightarrow [0, \infty)$,

$$\mu_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^k \mu_i \mathbf{1}_{C_i}(x),$$

welche für jeden Punkt x des PET-Zylinders die in x geltende Absorptionsrate angibt. In Hinblick auf die praktische Anwendung kann man sich die Gewebegruppen als Vereinigungen von Voxeln des in Voxel aufgeteilten (diskretisierten) PET-Zylinders vorstellen. Die Voxel erfüllen offensichtlich jede der oben geforderten Eigenschaften. Für einen festen Ort $x \in C$ und eine feste Richtung $\theta \in S^2$ bezeichne $S_j(x, \theta)$ die Länge der Verbindungsstrecke zwischen x und dem j -ten Schnittpunkt (von x aus gesehen in Richtung θ) des Strahles $\{x + u\theta \mid u \geq 0\}$ mit der Vereinigung

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \overline{C_i} \cap \overline{C_j}$$

der Ränder der Teilmengen $(C_i)_{i=1,\dots,k}$ von C (wobei $\overline{C_i}$ den topologischen Abschluss von C_i bezeichne). Außerdem setzen wir $S_0(x, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} 0$. Man beachte, dass die Menge der

Schnittpunkte $\{X + u\Theta \mid u \geq 0\} \cap \mathcal{C}$ wegen obiger Eigenschaften der Mengen $(C_i)_{i=1,\dots,k}$ und der Definitionen von X und Θ fast sicher diskret ist.

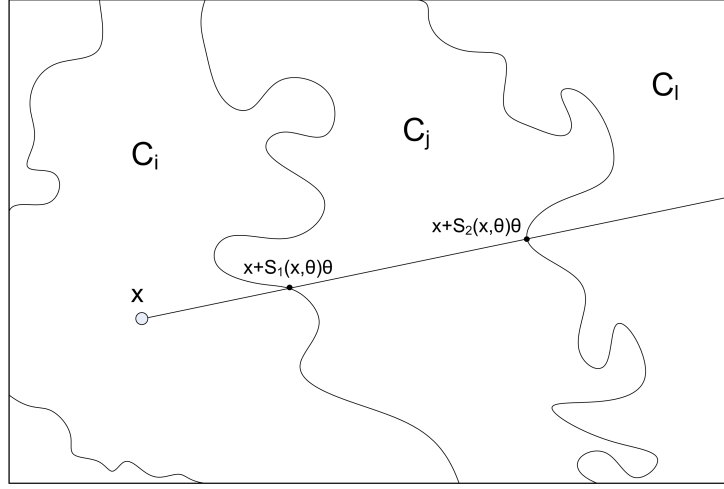


Abbildung 7: Die Übergangspunkte $(S_j(x, \theta))_{j \in \mathbb{N}}$ zwischen den Gewebegruppen des Teilchenpfades mit Emissionspunkt x und Startrichtung θ .

Für $j \in \mathbb{N}_0$ seien ferner $\varepsilon_j(x, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(S_{j+1}(x, \theta) - S_j(x, \theta))$ und $\mu_{k,j}(x, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_k(S_j(x, \theta) + \varepsilon_j(x, \theta))$. Für beliebige $x \in C$, $\theta \in S^2$ und $j \in \mathbb{N}$ gibt $\mu_{k,j-1}(x, \theta)$ also die auf dem j -ten Teilstück des Strahles $\{x + u\theta \mid u \geq 0\}$ geltende Absorptionsrate an. Außerdem bezeichne $m(x, \theta, t) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{j \mid S_j(x, \theta) < t\}$ die Anzahl der Übergangspunkte zwischen den einzelnen Gewebegruppen auf der Strecke von x nach $x + t\theta$.

Im dritten Abschnitt haben wir das Diffusionsmodell MA mit globaler Absorptionsrate und ohne Streuung eingeführt, dessen Diffusionsmaß zum Zeitpunkt t die Q -Dichte

$$u_t^{MA}(x, \theta) = 2\lambda \int_0^t e^{-\mu(t-u)} f(x - (t-u)\theta) du$$

besitzt. Den hier auftretenden absorptionsbedingten Term $e^{-\mu(t-u)}$ verallgemeinern wir nun gemäß der neu eingeführten ortsabhängigen Absorptionsratenfunktion $\mu_k(x)$, indem wir den Pfad der Länge $t-u$ in seine Teilabschnitte innerhalb der einzelnen durchwanderten Gewebegruppen aufteilen und diese mit den entsprechenden innerhalb dieser geltenden Absorptionsraten gewichten, und erhalten den ortsabhängigen Term

$$\begin{aligned} & J_{t,u,k}^\mu(x, \theta) \\ \stackrel{\text{def}}{=} & \exp\left(-\int_0^{t-u} \mu_k(x - v\theta) dv\right) \\ = & \prod_{j=1}^{m(x-(t-u)\theta, \theta, t-u)} \exp(-\mu_{k,j-1}(S_j(x - (t-u)\theta, \theta) - S_{j-1}(x - (t-u)\theta, \theta))) \\ & \exp(-\mu_{k,m(x-(t-u)\theta, \theta, t-u)}(t-u - S_{m(x-(t-u)\theta, \theta, t-u)}(x - (t-u)\theta, \theta))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{j=1}^{m(x-t\theta, \theta, t)} \exp(-\mu_{k,j-1}(S_j(x-t\theta, \theta) - S_{j-1}(x-t\theta, \theta))) \\
&\quad \exp(-\mu_{k,m(x-t\theta, \theta, t)}(t - S_{m(x-t\theta, \theta, t)}(x-t\theta, \theta))) \\
&\quad \prod_{j=1}^{m(x-t\theta, \theta, u)} \exp(\mu_{k,j-1}(S_j(x-t\theta, \theta) - S_{j-1}(x-t\theta, \theta))) \\
&\quad \exp(\mu_{k,m(x-t\theta, \theta, u)}(u - S_{m(x-t\theta, \theta, u)}(x-t\theta, \theta))),
\end{aligned}$$

wobei wir abkürzend $\mu_{k,j-1}$ und $\mu_{k,m(x-t\theta, \theta, t)}$ anstelle von $\mu_{k,j-1}(x - (t-u)\theta, \theta)$ und $\mu_{k,m(x-t\theta, \theta, t)}(x-t\theta, \theta)$ geschrieben haben. Die zweigeteilte Form des Produktterms hinter dem letzten Gleichheitszeichen entspricht der geometrischen Anschauung bei der Berechnung der Transportgleichung: Der Punkt $x-t\theta$ wäre der Startpunkt des betrachteten Pfades, wenn das entsprechende Teilchen zum Zeitpunkt $t=0$ emittiert werden würde. In diesem Fall erhielten wir die oberen beiden Zeilen des Produktterms als absorptionsbedingte Gewichtung des Pfades. Da das Teilchen aber erst zum Zeitpunkt u emittiert wird, benötigen wir zusätzlich die unteren beiden Zeilen des Produktterms, um die im ersten Term zuviel veranschlagte Dämpfung zwischen $x - (t-u)\theta$ und $x-t\theta$ auszugleichen. Im Gegensatz dazu führt die Verwendung des ersten (auf den ersten Blick weniger komplexen) Produktterms bei der Berechnung der Transportgleichung zu einer unverhältnismäßig aufwendigen Rechnung.

Wir erhalten für jedes $t > 0$ die Q -Dichte

$$u_{t,k}^{\text{MDA}}(x, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} 2\lambda \int_0^t J_{t,u,k}^\mu(x, \theta) f(x - (t-u)\theta) du,$$

und definieren das Diffusionsmaß $\mathcal{D}_{t,k}^{\text{MDA}}$ zum Zeitpunkt t des Modells MDA mit k Gewebegruppen durch

$$\mathcal{D}_{t,k}^{\text{MDA}}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \int_A u_{t,k}^{\text{MDA}}(x, \theta) dQ(x, \theta)$$

(für $A \subset \mathbb{R}^3 \times S^2$ Q -messbar). Das Modell beschreibt den folgenden Absorptionsprozess: Nach jedem Übergang des Teilchenpfades von einer Gewebegruppe C_i in eine andere Gewebegruppe C_j beginnt jeweils eine neue $\text{Exp}(\mu_j)$ -verteilte Lebensdauer, wobei für einen beliebigen Emissionsort $x \in C$ und eine beliebige Startrichtung $\theta \in S^2$ die Familie der in chronologischer Reihenfolge durchnummerierten Lebensdauern $(L_n(x, \theta))_{n \in \mathbb{N}}$ stochastisch unabhängig ist. Die Lebensdauer auf dem n -ten Pfadabschnitt eines Teilchens bezeichnen wir als n -te *Teillebensdauer*. Schafft es das Teilchen auf dem n -ten Teilstück $\{x + u\theta \mid u \in [S_{n-1}(x, \theta), S_n(x, \theta)]\}$ seines Pfades nicht, vor Ablauf der entsprechenden $\text{Exp}(\mu_{k,n-1}(x, \theta))$ -verteilten Lebensdauer $L_n(x, \theta)$ in eine neue Gewebegruppe zu gelangen, so wird es absorbiert. Abbildung 8 veranschaulicht die neu eingeführten Begriffe.

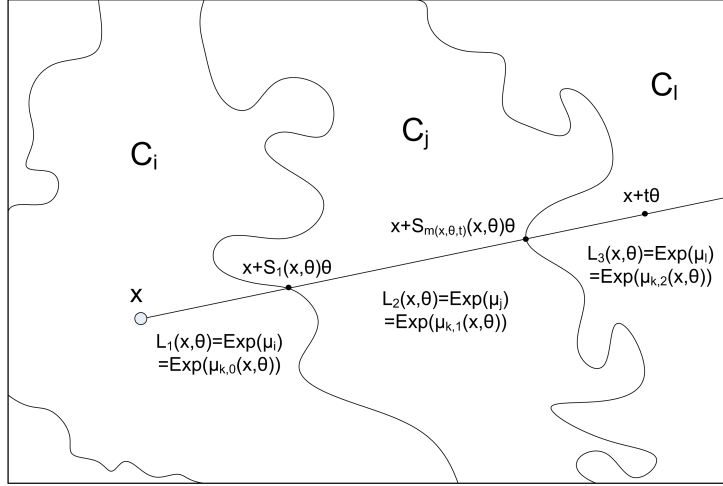


Abbildung 8: Teilchenpfad mit Emission in x und Richtung θ und den zugehörigen Teillebensdauern.

4.1.1 Bestimmung der Transportgleichung (MDA)

Zur Bestimmung der Transportgleichung für obige Dichte $u_{t,k}^{\text{MDA}}(x, \theta)$ wählen wir für beliebiges $s > 0$ den bewährten Ansatz

$$u_{t+s,k}^{\text{MDA}}(x + s\theta, \theta) = u_{t,k}^{\text{MDA}}(x, \theta) + (u_{t+s,k}^{\text{MDA}}(x + s\theta, \theta) - u_{t,k}^{\text{MDA}}(x, \theta))$$

und bestimmen die Ableitung der Funktion $\tau \mapsto u_{t+\tau,k}^{\text{MDA}}(x + \tau\theta, \theta)$. Durch Anwendung der Differentiationsregel (5) erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\tau} u_{t+\tau,k}^{\text{MDA}}(x + \tau\theta, \theta) \\ &= \frac{d}{d\tau} 2\lambda \int_0^{t+\tau} J_{t+\tau,u,k}^\mu(x + \tau\theta, \theta) f(x - (t-u)\theta) du \\ &= 2\lambda \frac{d}{d\tau} \int_0^{t+\tau} \exp\left(-\int_0^{t+\tau-u} \mu_k(x + \tau\theta - v\theta) dv\right) f(x - (t-u)\theta) du \\ &= 2\lambda \exp\left(-\int_0^0 \mu_k(x + \tau\theta - v\theta) dv\right) f(x - (t - (t + \tau))\theta) \\ &+ 2\lambda \int_0^{t+\tau} \frac{d}{d\tau} \exp\left(-\int_0^{t+\tau-u} \mu_k(x - (t-u)\theta + v\theta) dv\right) f(x - (t-u)\theta) du \\ &= 2\lambda f(x + \tau\theta) + 2\lambda \int_0^{t+\tau} -\mu_k(x - (t-u)\theta + (t + \tau - u)\theta) \\ &\quad \exp\left(-\int_0^{t+\tau-u} \mu_k(x - (t-u)\theta + v\theta) dv\right) f(x - (t-u)\theta) du \\ &= 2\lambda f(x + \tau\theta) + \mu_k(x + \tau\theta) u_{t+\tau,k}^{\text{MDA}}(x + \tau\theta, \theta), \end{aligned}$$

wobei wir die stückweise Stetigkeit von $v \mapsto \mu_k(x + \tau\theta - v\theta)$ verwendet haben (Die Menge der Übergangspunkte des betrachteten Pfades zwischen den einzelnen Gewebegruppen C_1, \dots, C_k ist nach Definition fast sicher diskret.). Durch Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung erhalten wir für alle $t, s > 0$ schließlich die Trans-

portgleichung

$$\begin{aligned} u_{t+s,k}^{\text{MDA}}(x+s\theta, \theta) &= u_{t,k}^{\text{MDA}}(x, \theta) + \int_0^s 2\lambda f(x+\tau\theta) d\tau \\ &\quad - \int_0^s \mu_k(x+\tau\theta) u_{t+\tau,k}^{\text{MDA}}(x+\tau\theta, \theta) d\tau \end{aligned}$$

für die Q -Dichte des Diffusionsmaßes. Der Dämpfungsterm verallgemeinert sich also dahingehend, dass die konstante Absorptionsrate μ des Modells MA durch die treppenförmige Absorptionsratenfunktion μ_k ersetzt wird. Die Anzahl der im Punkt $x+\tau\theta$ absorbierten Teilchen ist also linear in der im Punkt $x+\tau\theta$ gültigen Absorptionsrate $\mu_k(x+\tau\theta)$.

4.1.2 Stationäre Version des Diffusionsmaßes (MDA)

Zur Bestimmung der stationären Version des Diffusionsmaßes substituieren wir in der Integralformel von $u_{t,k}^{\text{MDA}}$ zunächst $t-u$ durch u und erhalten

$$u_{t,k}^{\text{MDA}}(x, \theta) = 2\lambda \int_0^t J_{t,t-u,k}^\mu(x, \theta) f(x-u\theta) du$$

mit

$$\begin{aligned} &J_{t,t-u,k}^\mu(x-t\theta, \theta) \\ &= \exp\left(-\int_0^u \mu_k(x-v\theta) dv\right) \\ &= \prod_{j=1}^{m(x-u\theta, \theta, u)} \exp(-\mu_{k,j-1}(x-u\theta, \theta)(S_j(x-u\theta, \theta) - S_{j-1}(x-u\theta, \theta))) \\ &\quad \exp(-\mu_{k,m(x-u\theta, \theta, u)}(u - S_{m(x-u\theta, \theta, u)}(x-u\theta, \theta))) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} I_{u,k}^\mu(x, \theta) \end{aligned}$$

unabhängig von t . Somit gewinnen wir die Q -Dichte

$$u_k^{\text{MDA}}(x, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} u_{t,k}^{\text{MDA}}(x, \theta) = 2\lambda \int_0^\infty I_{u,k}^\mu(x, \theta) f(x-u\theta) du$$

des stationären Diffusionsmaßes $\mathcal{D}_k^{\text{MDA}}$. Analog zu den Ausführungen in den vorherigen Abschnitten genügt diese der zeitunabhängigen Transportgleichung

$$\begin{aligned} u_k^{\text{MDA}}(x+s\theta, \theta) &= u_k^{\text{MDA}}(x, \theta) + \int_0^\infty 2\lambda f(x+\tau\theta) d\tau \\ &\quad - \int_0^\infty \mu_k(x+\tau\theta) u_k^{\text{MDA}}(x+\tau\theta, \theta) d\tau. \end{aligned}$$

4.2 Diffusionsmodell mit stetiger Absorptionsratenfunktion (Modell MSA)

In der Realität lässt sich das Körpergewebe eines Patienten nicht einfach in k disjunkte Bereiche mit verschiedenen (jedoch innerhalb dieser Bereiche konstanten) Absorptionsraten

einteilen. Die lokale Absorptionsrate ist von vielen physikalischen Faktoren abhängig. Um eine möglichst genaue Approximation der realen Vorgänge im PET-Zylinder zu erhalten, benötigen wir daher eine *stetige Absorptionsratenfunktion* $\mu : C \longrightarrow [0, \infty)$, $x \mapsto \mu(x)$. An dieser Stelle könnte man einwenden, dass stetige Absorptionsratenfunktionen in der Praxis keine Verwendung finden, da jede numerische Auswertung von Messdaten lediglich auf einer Näherung des Modells beruht. Unser Ziel ist es aber, die realen Vorgänge mit möglichst großer Genauigkeit zu beschreiben. Im achten Kapitel dieser Arbeit werden wir die für die umfassenden Modelle gewonnenen Ergebnisse diskretisieren und auf diese Weise eine beliebig genaue Approximation ermöglichen. Das Hauptproblem bei der Verwendung einer stetigen Absorptionsratenfunktion ist die Tatsache, dass wir nicht in jedem Punkt eines Teilchenpfades eine neue exponentialverteilte Lebensdauer beginnen lassen können. Daher versagt hier die in den vorherigen Kapiteln vorgestellte stochastische Modellierung der Absorption. Zur Lösung dieses Problems verallgemeinern wir das zuvor entwickelte Diffusionsmodell mit treppenförmiger Absorptionsratenfunktion (MDA). Wir stellen uns im Folgenden vor, dass die stetige Absorptionsratenfunktion μ durch eine Folge von treppenförmigen Absorptionsratenfunktionen $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ derartig approximiert wird, dass μ_k für $k \rightarrow \infty$ (punktweise) monoton gegen μ konvergiert. In der Anwendung der hier entwickelten Ergebnisse kann die Funktion μ zum Beispiel aus den Absorptionsdaten eines CT-Scans gewonnen und dann direkt in die Formel der auf den nächsten Seiten entwickelten Q -Dichte des Modells MSA eingesetzt werden. Wir erhalten in diesem und in den nächsten beiden Abschnitten sowohl die Q -Dichten als auch die Transportgleichungen für Diffusionsmodelle, die eine direkte Nutzung von real gewonnenen Absorptions- und Streuungsdaten erlauben.

4.2.1 Berechnung der Dichte des Diffusionsmaßes (MSA)

Der in der Q -Dichte $u_{t,k}^{\text{MDA}}(x, \theta)$ des Diffusionsmaßes $\mathcal{D}_{t,k}^{\text{MDA}}$ auftretende absorptionsbedingten Term

$$J_{t,u,k}^\mu(x, \theta) = \exp\left(-\int_0^{t-u} \mu_k(x - v\theta) dv\right)$$

ist für beliebige $x \in C$ und $\theta \in S^2$ monoton fallend in k . Unter Benutzung des Satzes von der monotonen Konvergenz erhalten wir daher

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} u_{t,k}^{\text{MDA}}(x, \theta) &= \lim_{k \rightarrow \infty} 2\lambda \int_0^t \exp\left(-\int_0^{t-u} \mu_k(x - v\theta) dv\right) f(x - (t-u)\theta) du \\ &= 2\lambda \int_0^t \lim_{k \rightarrow \infty} \exp\left(-\int_0^{t-u} \mu_k(x - v\theta) dv\right) f(x - (t-u)\theta) du \\ &= 2\lambda \int_0^t \exp\left(-\int_0^{t-u} \mu(x - v\theta) dv\right) f(x - (t-u)\theta) du. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$u_t^{\text{MSA}}(x, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} 2\lambda \int_0^t J_{t,u}^\mu(x, \theta) f(x - (t-u)\theta) du$$

mit

$$J_{t,u}^\mu(x, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left(-\int_0^{t-u} \mu(x - v\theta) dv\right)$$

und definieren für jedes $t > 0$ das Diffusionsmaß zum Zeitpunkt t über die Q -Dichte $u_t^{\text{MSA}}(x, \theta)$. Das Diffusionsmodell mit stetiger Absorptionsratenfunktion (MSA) ist also das Limesmodell von MDA für $k \rightarrow \infty$.

4.2.2 Bestimmung der Transportgleichung (MSA)

Eine weitere Anwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz liefert für beliebiges $t > 0$ die Transportgleichung

$$\begin{aligned} u_{t+s}^{\text{MSA}}(x + s\theta, \theta) &= u_t^{\text{MSA}}(x, \theta) + \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\theta) d\tau \\ &\quad - \int_0^s \mu(x + \tau\theta) u_{t+\tau}^{\text{MSA}}(x + \tau\theta, \theta) d\tau \end{aligned}$$

für die Q -Dichte des Diffusionsmaßes. Im Dämpfungsterm steht hier anstatt der treppenförmigen Absorptionsratenfunktion μ_k die stetige Absorptionsratenfunktion μ .

4.2.3 Stationäre Version des Diffusionsmaßes (MSA)

Analog zu den Ausführungen im Abschnitt 4.1.2 erhalten wir

$$u^{\text{MSA}}(x, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} 2\lambda \int_0^\infty J_{t,t-u}^\mu(x, \theta) f(x - u\theta) du$$

mit

$$J_{t,t-u}^\mu(x, \theta) = \exp\left(-\int_0^u \mu(x - v\theta) dv\right)$$

als Q -Dichte des stationären Diffusionsmaßes \mathcal{D}^{MSA} , welche der zeitunabhängigen Transportgleichung

$$\begin{aligned} u^{\text{MSA}}(x + s\theta, \theta) &= u^{\text{MSA}}(x, \theta) + \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\theta) d\tau \\ &\quad - \int_0^s \mu(x + \tau\theta) u^{\text{MSA}}(x + \tau\theta, \theta) d\tau \end{aligned}$$

genügt.

5 Diffusionsmodell mit ortsabhängiger einfacher Streuung im PET-Zylinder

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir das Modell MAS aus Kapitel 3.4 im Hinblick auf eine ortsabhängige Streuungsrate. Diese Erweiterung stellt für die Praxis den wohl wichtigsten Aspekt dieser Arbeit dar, schließlich erreicht die Quote der gestreuten Annihilationsphotonen bei vielen PET-Scannern mehr als 40%. Die Berücksichtigung der korrekten Streuungsphysik bei der Verarbeitung der Detektionsdaten ist daher essentiell für eine möglichst genaue medizinische Bildgebung. Analog zu den Ausführungen des vorherigen Abschnitts führen wir zunächst ein Modell mit treppenförmiger Streuungsratenfunktion ein.

5.1 Der diskrete Ansatz mit treppenförmiger Absorptions- und Streuungsratenfunktion (Modell MDAS)

Wir behalten die Notation aus dem letzten Abschnitt bei und ersetzen in der Q -Dichte

$$\begin{aligned} & u_t^{\text{MAS}}(x, \theta) \\ = & 2\lambda \int_0^t e^{-(\mu+\nu)(t-u)} f(x - (t-u)\theta) du \\ + & 2\lambda \int_{S^2} \int_0^t \int_0^{t-u} \nu e^{-\nu m} e^{-\mu(t-u)} \zeta(\theta|\theta_0) f(x - m\theta_0 - (t-u-m)\theta) dm du d\Lambda(\theta_0) \end{aligned}$$

des Diffusionsmaßes $\mathcal{D}_t^{\text{MAS}}$ zum Zeitpunkt t analog zu den Ausführungen im Abschnitt 4.1 den durch Absorption und Streuung bedingten Term $e^{-(\mu+\nu)(t-u)}$ unter Verwendung der Notation $\alpha_k \stackrel{\text{def}}{=} \mu_k + \nu_k$, $\alpha_{k,j}(x, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_{k,j}(x, \theta) + \nu_{k,j}(x, \theta)$ und $\Delta S_j(x, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} S_j(x, \theta) - S_{j-1}(x, \theta)$ (für alle $j \in \mathbb{N}_0$) durch

$$\begin{aligned} & J_{t,u,k}^{\mu,\nu}(x, \theta) \\ \stackrel{\text{def}}{=} & \exp\left(-\int_0^{t-u} \alpha_k(x - v\theta) dv\right) \\ = & \prod_{j=1}^{m(x-(t-u)\theta, \theta, t-u)} \exp(-\alpha_{k,j-1}(x - (t-u)\theta, \theta) \Delta S_j(x - (t-u)\theta, \theta)) \\ & \exp(-\alpha_{k,m(x-(t-u)\theta, \theta, t-u)}(x - (t-u)\theta, \theta) (t-u - S_{m(x-(t-u)\theta, \theta, t-u)}(x - (t-u)\theta, \theta))) \\ = & \prod_{j=1}^{m(x-t\theta, \theta, t)} \exp(-\alpha_{k,j-1}(x - t\theta, \theta) \Delta S_j(x - t\theta, \theta)) \\ & \exp(-\alpha_{k,m(x-t\theta, \theta, t)}(x - t\theta, \theta) (t - S_{m(x-t\theta, \theta, t)}(x - t\theta, \theta))) \\ = & \prod_{j=1}^{m(x-t\theta, \theta, u)} \exp(\alpha_{k,j-1}(x - t\theta, \theta) \Delta S_j(x - t\theta, \theta)) \\ & \exp(\alpha_{k,m(x-t\theta, \theta, u)}(x - t\theta, \theta) (u - S_{m(x-t\theta, \theta, u)}(x - t\theta, \theta))), \end{aligned}$$

und den ebenfalls durch Absorption und Streuung bedingten Term $\nu e^{-\nu m} e^{-\mu(t-u)}$ durch

$$\begin{aligned}
& K_{t,u,m,k}(x, \theta, \theta_0) \\
\stackrel{\text{def}}{=} & \nu_k(x - (t - u - m)\theta) \exp\left(-\int_0^{t-u-m} \mu_k(x - v\theta) dv\right) \\
& \exp\left(-\int_0^m \alpha_k(x - (t - u - m)\theta - v\theta_0) dv\right) \\
= & \nu_{k,m(x-t\theta,\theta,t)} \prod_{j=1}^{m(x-t\theta,\theta,t)} \exp(-\mu_{k,j-1}(x - t\theta, \theta)\Delta S_j(x - t\theta, \theta)) \\
& \exp(-\mu_{k,m(x-t\theta,\theta,t)}(t - S_{m(x-t\theta,\theta,t)}(x - t\theta, \theta))) \\
& \prod_{j=1}^{m(x-t\theta,\theta,u+m)} \exp(\mu_{k,j-1}(x - t\theta, \theta)\Delta S_j(x - t\theta, \theta)) \\
& \exp(\mu_{k,m(x-t\theta,\theta,u+m)}(u + m - S_{m(x-t\theta,\theta,u+m)}(x - t\theta, \theta))) \\
& \prod_{j=1}^{m(x-(t-u-m)\theta-m\theta_0,\theta_0,m)} \exp(-\alpha_{k,j-1}(\dots)\Delta S_j(x - (t - u - m)\theta - m\theta_0, \theta_0)) \\
& \exp(-\alpha_{k,m(\dots)}(m - S_{m(x-(t-u-m)\theta-m\theta_0,\theta_0,m)}(x - (t - u - m)\theta - m\theta_0, \theta_0))),
\end{aligned}$$

wobei wir die $(\nu_{k,j})_{j \in \mathbb{N}_0}$ analog zu den $(\mu_{k,j})_{j \in \mathbb{N}_0}$ aus Abschnitt 4.1 definiert und an einigen Stellen $x - (t - u - m)\theta - m\theta_0, \theta_0, m$ durch Fortsetzungspunkte ersetzt haben. Diese komplexen Terme erhält man, wenn man die globale Streuungsrate ν durch die treppenförmige *Streuungsratenfunktion* $\nu_k : C \rightarrow [0, \infty)$,

$$\nu_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^k \nu_i \mathbf{1}_{C_i}(x),$$

und die globale Absorptionsrate μ durch die treppenförmige Absorptionsratenfunktion $\mu_k : C \rightarrow [0, \infty)$,

$$\mu_k(x) = \sum_{i=1}^k \mu_i \mathbf{1}_{C_i}(x),$$

ersetzt. Dabei sei $\nu_i > 0$ die in der Gewebegruppe C_i geltende Streuungsrate ($i = 1, \dots, k$). Für $t > 0$ beliebig setzen wir

$$\begin{aligned}
& u_{t,k}^{\text{MDAS}}(x, \theta) \\
\stackrel{\text{def}}{=} & 2\lambda \int_0^t J_{t,u,k}^{\mu,\nu}(x, \theta) f(x - (t - u)\theta) du \\
& + 2\lambda \int_{S^2} \int_0^t \int_0^{t-u} K_{t,u,m,k}(x, \theta, \theta_0) \zeta(\theta|\theta_0) f(x - m\theta_0 - (t - u - m)\theta) dm du d\Lambda(\theta_0)
\end{aligned}$$

und definieren das Diffusionsmaß $\mathcal{D}_{t,k}^{\text{MDAS}}$ zum Zeitpunkt t des Modells MDAS mit k Gewebegruppen durch

$$\mathcal{D}_{t,k}^{\text{MDAS}}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \int_A u_{t,k}^{\text{MDAS}}(x, \theta) dQ(x, \theta)$$

(für $A \subset \mathbb{R}^3 \times S^2$ Q -messbar). Analog zu der im Abschnitt 3.4 verwendeten Notation definieren wir ferner die *Dichte*

$$u_{t,k}^{\text{MDAS},(1)}(x, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} 2\lambda \int_0^t J_{t,u,k}^{\mu,\nu}(x, \theta) f(x - (t-u)\theta) du$$

der erwarteten Anzahl der nicht gestreuten Teilchen im Punkt x mit Richtung θ zum Zeitpunkt t und die *Dichte*

$$u_{t,k}^{\text{MDAS},(2)}(x, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} 2\lambda \int_{S^2} \int_0^t \int_0^{t-u} K_{t,u,m,k}(x, \theta, \theta_0) \zeta(\theta|\theta_0) f(x - m\theta_0 - (t-u-m)\theta) dm du d\Lambda(\theta_0)$$

der erwarteten Anzahl der (einfach) gestreuten Teilchen im Punkt x mit Richtung θ zum Zeitpunkt t .

Der dem Modell MDAS zugrunde liegende Absorptionsmechanismus entspricht also dem des Modells MDA. Auf diesen sind wir im letzten Abschnitt bereits eingegangen. Ähnlich verhält es sich hier mit dem Streuungsmechanismus: Jedes Teilchen kann insgesamt höchstens ein Mal gestreut werden. Abhängig von der Gewebegruppe C_i , in der die Emission stattfindet, erhält das Teilchen zunächst eine $\text{Exp}(\nu_i)$ -verteilte Lebensdauer. Gelingt dem Teilchen vor Ablauf dieser Lebensdauer der Übergang von der Gewebegruppe C_i in eine andere Gewebegruppe C_j , so beginnt eine neue $\text{Exp}(\nu_j)$ -verteilte Lebensdauer und so fort. Läuft jedoch die aktuelle Lebensdauer des Teilchens vor dem Übergang in eine neue Gewebegruppe ab, so tritt ein Streuereignis ein. Das Streuereignis selbst - also die Verteilung des Streuwinkels und der neuen Richtung nach dem Streuereignis - entspricht dabei dem im Abschnitt 3.3 eingeführten Modell. Die Familie der Teillebensdauern eines Teilchenpfades und die beiden Familien der Teillebensdauern des Absorptions- und des Streuungsmechanismus sind stochastisch unabhängig. Zur Veranschaulichung des zugrunde liegenden Streumechanismus dient Abbildung 9.

5.1.1 Bestimmung der Transportgleichung (MDAS)

Zur Bestimmung der Transportgleichung für obige Dichte $u_{t,k}^{\text{MDAS}}(x, \theta)$ wählen wir für beliebiges $s > 0$ den bewährten Ansatz

$$u_{t+s,k}^{\text{MDAS}}(x + s\theta, \theta) = u_{t,k}^{\text{MDAS}}(x, \theta) + (u_{t+s,k}^{\text{MDAS}}(x + s\theta, \theta) - u_{t,k}^{\text{MDAS}}(x, \theta))$$

und bestimmen die Ableitung der Funktion $\tau \mapsto u_{t+\tau,k}^{\text{MDAS}}(x + \tau\theta, \theta)$. Unter Beachtung der stückweisen Stetigkeit der Funktionen $v \mapsto \mu_k(x + \tau\theta - v\theta)$ und $v \mapsto \nu_k(x + \tau\theta - v\theta)$ folgt analog zu den Ausführungen im letzten Abschnitt

$$\frac{d}{d\tau} u_{t+\tau,k}^{\text{MDAS},(1)}(x + \tau\theta, \theta) = 2\lambda f(x + \tau\theta) + \alpha_k(x + \tau\theta) u_{t+\tau,k}^{\text{MDAS},(1)}(x + \tau\theta, \theta).$$

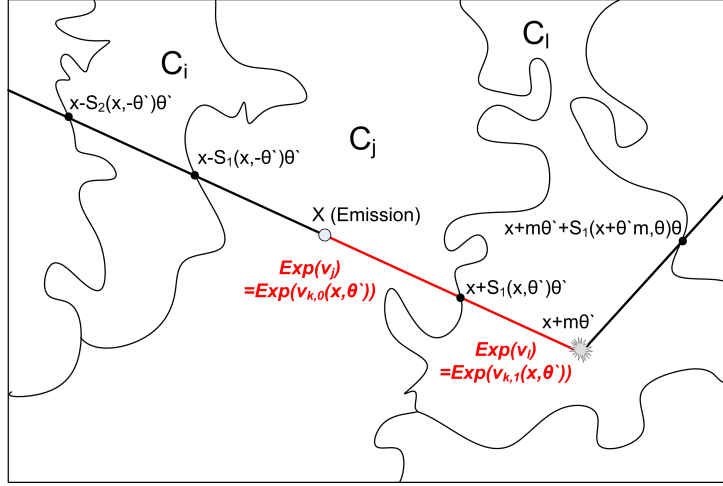


Abbildung 9: Pfade eines Teilchenpaares mit Emission in x und Startrichtungen $(\theta', -\theta')$. Der streuungsrelevante Teil des Pfades des \oplus -Teilchens und die zugehörigen Teillebensdauern des Streuungsmechanismus sind rot markiert.

Die Ableitung des zweiten Teiles $u_{t+\tau,k}^{\text{MDAS},(2)}(x + \tau\theta, \theta)$ der Dichte ist etwas komplizierter. Unter Beachtung von

$$\int_0^{t+\tau-u-m} \mu_k(x + \tau\theta - v\theta) dv = \int_0^{t+\tau-u-m} \mu_k(x - (t - u - m - v)\theta) dv$$

und durch mehrfaches Anwenden der Differentiationsregel (5) erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\tau} u_{t+\tau,k}^{\text{MDAS},(2)}(x + \tau\theta, \theta) \\ &= \frac{d}{d\tau} 2\lambda \int_{S^2} \int_0^{t+\tau} \int_0^{t+\tau-u} K_{t+\tau,u,m,k}(x + \tau\theta, \theta, \theta_0) \zeta(\theta|\theta_0) \\ & \quad f(x - m\theta_0 - (t - u - m)\theta) dm du d\Lambda(\theta_0) \\ &= \frac{d}{d\tau} 2\lambda \int_0^{t+\tau} \int_0^{t+\tau-u} \int_{S^2} \nu_k(x - (t - u - m)\theta) \\ & \quad \exp\left(-\int_0^{t+\tau-u-m} \mu_k(x - (t - u - m - v)\theta) dv - \int_0^m \alpha_k(x - (t - u - m)\theta - v\theta_0) dv\right) \\ & \quad \zeta(\theta|\theta_0) f(x - m\theta_0 - (t - u - m)\theta) d\Lambda(\theta_0) dm du \\ &= 2\lambda \int_0^{t+\tau} \frac{d}{d\tau} \left[\int_0^{t+\tau-u} \int_{S^2} \nu_k(x - (t - u - m)\theta) \right. \\ & \quad \exp\left(-\int_0^{t+\tau-u-m} \mu_k(x - (t - u - m - v)\theta) dv - \int_0^m \alpha_k(x - (t - u - m)\theta - v\theta_0) dv\right) \\ & \quad \left. \zeta(\theta|\theta_0) f(x - m\theta_0 - (t - u - m)\theta) d\Lambda(\theta_0) dm \right] du \\ &= 2\lambda \int_0^{t+\tau} \int_{S^2} \nu_k(x + \tau\theta) \exp\left(-\int_0^{t+\tau-u} \alpha_k(x + \tau\theta - v\theta_0) dv\right) \\ & \quad \zeta(\theta|\theta_0) f(x + \tau\theta - (t + \tau - u)\theta_0) du d\Lambda(\theta_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\lambda \int_0^{t+\tau} \int_0^{t+\tau-u} \frac{d}{d\tau} \left[\exp\left(-\int_0^{t+\tau-u-m} \mu_k(x - (t-u-m)\theta + v\theta) dv\right) \right] \\
& \int_{S^2} \nu_k(x - (t-u-m)\theta) \exp\left(-\int_0^m \alpha_k(x - (t-u-m)\theta - v\theta_0) dv\right) \\
& \zeta(\theta|\theta_0) f(x - m\theta_0 - (t-u-m)\theta) d\Lambda(\theta_0) dm du \\
& = \int_{S^2} \nu_k(x + \tau\theta) 2\lambda \int_0^{t+\tau} \exp\left(-\int_0^{t+\tau-u} \mu_k(x + \tau\theta - v\theta_0) + \nu_k(x + \tau\theta - v\theta_0) dv\right) \\
& \zeta(\theta|\theta_0) f(x + \tau\theta - (t + \tau - u)\theta_0) du d\Lambda(\theta_0) \\
& - \mu_k(x + \tau\theta) 2\lambda \int_0^{t+\tau} \int_0^{t+\tau-u} \int_{S^2} \nu_k(x - (t-u-m)\theta) \zeta(\theta|\theta_0) \\
& f(x - m\theta_0 - (t-u-m)\theta) \exp\left(-\int_0^{t+\tau-u-m} \mu_k(x - (t-u-m-v)\theta) dv\right. \\
& \left. - \int_0^m \alpha_k(x - (t-u-m)\theta - v\theta_0) dv\right) d\Lambda(\theta_0) dm du \\
& = \int_{S^2} \nu_k(x + \tau\theta) \zeta(\theta|\theta_0) 2\lambda \int_0^{t+\tau} J_{t+\tau,u,k}^{\mu,\nu}(x + \tau\theta, \theta_0) f(x + \tau\theta - (t + \tau - u)\theta_0) \\
& du d\Lambda(\theta_0) \\
& - \mu_k(x + \tau\theta) 2\lambda \int_{S^2} \int_0^{t+\tau} \int_0^{t+\tau-u} K_{t+\tau,u,m,k}(x + \tau\theta, \theta, \theta_0) \zeta(\theta|\theta_0) \\
& f(x - m\theta_0 - (t-u-m)\theta) dm du d\Lambda(\theta_0),
\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt verwendet haben, dass die Funktion $v \mapsto \mu_k(x + v\theta)$ auf $C \setminus \mathcal{C}$ stückweise konstant ist (Für fast alle $x \in C$ und $\theta \in S^2$ durchläuft der Pfad $\{v \mapsto x - (t-u-m)\theta + v\theta : v \in [0, t+\tau-u-m]\}$ höchstens endlich viele Gewebegruppen.). Daraus ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{d\tau} u_{t+\tau,k}^{\text{MDAS},(2)}(x + \tau\theta, \theta) \\
& = -\mu_k(x + \tau\theta) u_{t+\tau,k}^{\text{MDAS},(2)}(x + \tau\theta, \theta) \\
& + \int_{S^2} \nu_k(x + \tau\theta) \zeta(\theta|\theta_0) u_{t+\tau,k}^{\text{MDAS},(1)}(x + \tau\theta, \theta_0) d\Lambda(\theta_0).
\end{aligned}$$

Durch Zusammenfassen obiger Ergebnisse und Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung erhalten wir für jedes $t > 0$ die verallgemeinerte Transportgleichung

$$\begin{aligned}
& u_{t+s,k}^{\text{MDAS}}(x + s\theta, \theta) \\
& = u_{t,k}^{\text{MDAS}}(x, \theta) + \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\theta) d\tau \\
& - \int_0^s \left(\mu_k(x + \tau\theta) u_{t+\tau,k}^{\text{MDAS}}(x + \tau\theta, \theta) + \nu_k(x + \tau\theta) u_{t+\tau,k}^{\text{MDAS},(1)}(x + \tau\theta, \theta) \right) d\tau \\
& + \int_0^s \int_{S^2} \nu_k(x + \tau\theta) \zeta(\theta|\theta_0) u_{t+\tau,k}^{\text{MDAS},(1)}(x + \tau\theta, \theta_0) d\Lambda(\theta_0) d\tau
\end{aligned}$$

für die Q -Dichte des Diffusionsmaßes des Modells MDAS mit k Gewebegruppen. Hier besteht der Unterschied zum Diffusionsmodell MAS lediglich darin, dass unter den Integralen

die globale Absorptionsrate μ und die globale Streuungsrate ν durch die Absorptionsratenfunktion μ_k beziehungsweise durch die Streuungsratenfunktion ν_k (ausgewertet an der Stelle $x + \tau\theta$) ersetzt werden.

5.1.2 Stationäre Version des Diffusionsmaßes (MDAS)

Zur Bestimmung der stationären Version des Diffusionsmaßes substituieren wir zunächst wieder $t - u \mapsto u$ in der Formel der Dichte $u_{t,k}^{\text{MDAS}}$ und erhalten

$$\begin{aligned} & u_{t,k}^{\text{MDAS}}(x, \theta) \\ &= 2\lambda \int_0^t J_{t,t-u,k}^{\mu,\nu}(x, \theta) f(x - u\theta) du \\ &+ 2\lambda \int_{S^2} \int_0^t \int_0^u K_{t,t-u,m,k}(x, \theta, \theta_0) \zeta(\theta|\theta_0) f(x - m\theta_0 - (u - m)\theta) dm du d\Lambda(\theta_0). \end{aligned}$$

Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, ist

$$I_{u,k}^{\mu,\nu}(x, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} J_{t,t-u,k}^{\mu,\nu}(x, \theta)$$

unabhängig von t . Außerdem sehen wir anhand der Gleichungskette

$$\begin{aligned} & K_{t,t-u,m,k}(x, \theta, \theta_0) \\ &= \nu_k(x - (u - m)\theta) \exp\left(-\int_0^{u-m} \mu_k(x - v\theta) dv\right) \\ &\quad \exp\left(-\int_0^m \mu_k(x - (u - m)\theta - v\theta_0) + \nu_k(x - (u - m)\theta - v\theta_0) dv\right) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} L_{u,m,k}(x, \theta, \theta_0), \end{aligned}$$

dass auch der Term $K_{t,t-u,m,k}(x, \theta, \theta_0)$ unabhängig von t ist. Mit der neu eingeführten Notation erhalten wir

$$\begin{aligned} & u_k^{\text{MDAS}}(x, \theta) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} u_{t,k}^{\text{MDAS}}(x, \theta) \\ &= 2\lambda \int_0^\infty I_{u,k}^{\mu,\nu}(x, \theta) f(x - u\theta) du \\ &+ 2\lambda \int_{S^2} \int_0^\infty \int_0^u L_{u,m,k}(x, \theta, \theta_0) \zeta(\theta|\theta_0) f(x - m\theta_0 - (u - m)\theta) dm du d\Lambda(\theta_0) \\ &= u_k^{\text{MDAS},(1)}(x, \theta) + u_k^{\text{MDAS},(2)}(x, \theta) \end{aligned}$$

als Q -Dichte des stationären Diffusionsmaßes $\mathcal{D}_k^{\text{MDAS}}$. Analog zu den Ausführungen in den vorherigen Abschnitten genügt daher $u_k^{\text{MDAS}}(x, \theta)$ der verallgemeinerten zeitunabhängigen Transportgleichung

$$\begin{aligned}
& u_k^{\text{MDAS}}(x + s\theta, \theta) \\
= & u_k^{\text{MDAS}}(x, \theta) + \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\theta) d\tau \\
& - \int_0^s \left(\mu_k(x + \tau\theta) u_k^{\text{MDAS}}(x + \tau\theta, \theta) + \nu_k(x + \tau\theta) u_k^{\text{MDAS},(1)}(x + \tau\theta, \theta) \right) d\tau \\
& + \int_0^s \int_{S^2} \nu_k(x + \tau\theta) \zeta(\theta|\theta_0) u_k^{\text{MDAS},(1)}(x + \tau\theta, \theta_0) d\Lambda(\theta_0) d\tau.
\end{aligned}$$

5.2 Diffusionsmodell mit einfacher Streuung bei stetiger Absorptions- und Streuungsratenfunktion (Modell MSAS)

Ähnlich wie bei der Absorptionsratenfunktion ist die Annahme einer treppenförmigen Streuungsratenfunktion ν_k für die Betrachtung der tatsächlichen physikalischen Vorgänge im PET-Scanner unzureichend. Für die Modellierung der Streuung benötigen wir ebenfalls eine Ratenfunktion, die sich abhängig von der Position stetig verändert. Wir gehen daher im Folgenden von einer *stetigen Streuungsratenfunktion* $\nu : C \rightarrow [0, \infty)$, $x \mapsto \nu(x)$ aus, deren genaue Gestalt durch entsprechende Voruntersuchungen - wie zum Beispiel die gewonnenen Streuungsdaten eines CT-Scans - ermittelt werden kann. Diese stetige Streuungsratenfunktion lässt sich genau wie die stetige Absorptionsratenfunktion (punktweise) monoton durch eine Familie $(\nu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von treppenförmigen Streuungsratenfunktionen approximieren. Gelte also im Folgenden für jedes $x \in C$

$$\nu(x) = \lim_{k \uparrow \infty} \nu_k(x).$$

5.2.1 Berechnung der Dichte des Diffusionsmaßes (MSAS)

Für die oben definierten Folgen von treppenförmigen Absorptionsraten- und Streuungsratenfunktionen sind die in der Q -Dichte $u_{t,k}^{\text{MDAS}}(x, \theta)$ des Diffusionsmaßes $\mathcal{D}_{t,k}^{\text{MDAS}}$ auftretenden absorptions- und streuungsbedingten Terme $J_{t,u,k}^{\mu,\nu}(x, \theta)$ und $K_{t,u,m,k}(x, \theta, \theta_0)$ punktweise konvergent für $k \rightarrow \infty$, denn es gilt aufgrund des Satzes von der monotonen Konvergenz

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} J_{t,u,k}^{\mu,\nu}(x, \theta) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \exp\left(-\int_0^{t-u} \mu_k(x - v\theta) + \nu_k(x - v\theta) dv\right) \\
&= \exp\left(-\int_0^{t-u} \lim_{k \rightarrow \infty} (\mu_k(x - v\theta) + \nu_k(x - v\theta)) dv\right) \\
&= \exp\left(-\int_0^{t-u} \mu(x - v\theta) + \nu(x - v\theta) dv\right) \\
&\stackrel{\text{def}}{=} J_{t,u}^{\mu,\nu}(x, \theta)
\end{aligned}$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} K_{t,u,m,k}(x, \theta, \theta_0)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k(x - (t - u - m)\theta) \exp\left(-\int_0^{t-u-m} \mu_k(x - v\theta) dv\right) \\
&\quad \exp\left(-\int_0^m \mu_k(x - (t - u - m)\theta - v\theta_0) + \nu_k(x - (t - u - m)\theta - v\theta_0) dv\right) \\
&= \nu(x - (t - u - m)\theta) \exp\left(-\int_0^{t-u-m} \mu(x - v\theta) dv\right) \\
&\quad \exp\left(-\int_0^m \mu(x - (t - u - m)\theta - v\theta_0) + \nu(x - (t - u - m)\theta - v\theta_0) dv\right) \\
&\stackrel{\text{def}}{=} K_{t,u,m}(x, \theta, \theta_0).
\end{aligned}$$

Ferner erhalten wir durch eine weitere Anwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz

$$\begin{aligned}
&\lim_{k \rightarrow \infty} u_{t,k}^{\text{MDAS}}(x, \theta) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(2\lambda \int_0^t J_{t,u,k}^{\mu,\nu}(x, \theta) f(x - (t - u)\theta) du \right. \\
&\quad \left. + 2\lambda \int_{S^2} \int_0^t \int_0^{t-u} K_{t,u,m,k}(x, \theta, \theta_0) \zeta(\theta|\theta_0) f(x - m\theta_0 - (t - u - m)\theta) dm du d\Lambda(\theta_0) \right) \\
&= 2\lambda \int_0^t J_{t,u}^{\mu,\nu}(x, \theta) f(x - (t - u)\theta) du \\
&\quad + 2\lambda \int_{S^2} \int_0^t \int_0^{t-u} K_{t,u,m}(x, \theta, \theta_0) \zeta(\theta|\theta_0) f(x - m\theta_0 - (t - u - m)\theta) dm du d\Lambda(\theta_0).
\end{aligned}$$

Wir setzen für jedes $t > 0$

$$\begin{aligned}
&u_t^{\text{MSAS}}(x, \theta) \\
&\stackrel{\text{def}}{=} 2\lambda \int_0^t J_{t,u}^{\mu,\nu}(x, \theta) f(x - (t - u)\theta) du \\
&\quad + 2\lambda \int_{S^2} \int_0^t \int_0^{t-u} K_{t,u,m}(x, \theta, \theta_0) \zeta(\theta|\theta_0) f(x - m\theta_0 - (t - u - m)\theta) dm du d\Lambda(\theta_0) \\
&= u_t^{\text{MSAS},(1)}(x, \theta) + u_t^{\text{MSAS},(2)}(x, \theta)
\end{aligned}$$

und definieren das Diffusionsmaß $\mathcal{D}_t^{\text{MSAS}}$ zum Zeitpunkt t über die Q -Dichte $u_t^{\text{MSAS}}(x, \theta)$. Das Diffusionsmodell mit einfacher Streuung im PET-Zylinder bei stetiger Absorptionsraten- und Streuungsratenfunktion (MSAS) ist also das Limesmodell von MDAS für $k \rightarrow \infty$.

5.2.2 Bestimmung der Transportgleichung (MSAS)

Eine weitere Anwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz liefert für beliebige $t, s > 0$ die verallgemeinerte Transportgleichung

$$\begin{aligned}
&u_{t+s}^{\text{MSAS}}(x + s\theta, \theta) \\
&= u_t^{\text{MSAS}}(x, \theta) + \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\theta) d\tau \\
&\quad - \int_0^s \left(\mu(x + \tau\theta) u_{t+\tau}^{\text{MSAS}}(x + \tau\theta, \theta) + \nu(x + \tau\theta) u_{t+\tau}^{\text{MSAS},(1)}(x + \tau\theta, \theta) \right) d\tau
\end{aligned}$$

$$+ \int_0^s \int_{S^2} \nu(x + \tau\theta) \zeta(\theta|\theta_0) u_{t+\tau}^{\text{MSAS},(1)}(x + \tau\theta, \theta_0) d\Lambda(\theta_0) d\tau$$

der Q -Dichte des Diffusionsmaßes $\mathcal{D}_t^{\text{MSAS}}$. Im Dämpfungsterm und im Streuterm stehen hier anstatt der treppenförmigen Absorptionsratenfunktion μ_k die stetige Absorptionsratenfunktion μ und anstatt der treppenförmigen Streuungsratenfunktion ν_k die stetige Streuungsratenfunktion ν .

5.2.3 Stationäre Version des Diffusionsmaßes (MSAS)

Analog zu den Ausführungen früherer Abschnitte erhalten wir

$$\begin{aligned} & u^{\text{MSAS}}(x, \theta) \\ &= 2\lambda \int_0^t I_u^{\mu, \nu}(x, \theta) f(x - (t - u)\theta) du \\ &+ 2\lambda \int_{S^2} \int_0^t \int_0^{t-u} L_{u,m}(x, \theta, \theta_0) \zeta(\theta|\theta_0) f(x - m\theta_0 - (t - u - m)\theta) dm du d\Lambda(\theta_0) \\ &= u^{\text{MSAS},(1)}(x, \theta) + u^{\text{MSAS},(2)}(x, \theta) \end{aligned}$$

mit $I_u^{\mu, \nu}(x, \theta) = J_{t, t-u}^{\mu, \nu}(x, \theta)$ und $L_{u,m}(x, \theta, \theta_0) = K_{t, t-u, m}(x, \theta, \theta_0)$ (unabhängig von t) als Q -Dichte des stationären Diffusionsmaßes $\mathcal{D}^{\text{MSAS}}$, welche der verallgemeinerten zeitunabhängigen Transportgleichung

$$\begin{aligned} & u^{\text{MSAS}}(x + s\theta, \theta) \\ &= u^{\text{MSAS}}(x, \theta) + \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\theta) d\tau \\ &- \int_0^s \left(\mu(x + \tau\theta) u^{\text{MSAS}}(x + \tau\theta, \theta) + \nu(x + \tau\theta) u^{\text{MSAS},(1)}(x + \tau\theta, \theta) \right) d\tau \\ &+ \int_0^s \int_{S^2} \nu(x + \tau\theta) \zeta(\theta|\theta_0) u^{\text{MSAS},(1)}(x + \tau\theta, \theta_0) d\Lambda(\theta_0) d\tau \end{aligned}$$

genügt.

6 Diffusionsmodell mit ortsabhängiger Mehrfachstreuung

Der letzte Schritt, der uns noch zu einer vollständigen stochastischen Beschreibung des Diffusionsprozesses in der PET fehlt, ist die Verallgemeinerung des Diffusionsmodells MAMS mit mehrfacher Streuung in Bezug auf Ortsabhängigkeit. Glücklicherweise haben wir die komplette Vorarbeit bereits in den beiden vorangegangenen Abschnitten geleistet. Die Verallgemeinerung der Q -Dichte des Diffusionsmaßes und der entsprechenden Transportgleichung ergibt sich durch mehrfache Anwendung der im letzten Abschnitt benutzten mathematischen Hilfsmittel.

6.1 Der diskrete Ansatz mit treppenförmiger Absorptions- und Streuungsratenfunktion (Modell MDAMS)

Entsprechend der Ausführungen im letzten Abschnitt verallgemeinern wir für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ den in der Q -Dichte

$$\begin{aligned} & u_t^{\text{MAMS}}(x, \theta) \\ = & 2\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n \int_0^t \int_0^{t-u} \int_0^{t-u-m_1} \cdots \int_0^{t-u-\sum_{i=1}^{n-1} m_i} \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \prod_{i=1}^{n-1} \zeta(\theta_{i+1}|\theta_i) \zeta(\theta|\theta_n) \\ & e^{-(\mu+\nu)(t-u)} f\left(x - \left(t - u - \sum_{i=1}^n m_i\right)\theta - \sum_{i=1}^n m_i\theta_i\right) d\Lambda(\theta_n) \cdots d\Lambda(\theta_1) dm_n \dots dm_1 du \end{aligned}$$

des Diffusionsmaßes $\mathcal{D}_t^{\text{MAMS}}$ auftretenden Term

$$\nu^n e^{-(\mu+\nu)(t-u)} = e^{-\mu(t-u)} \nu^n e^{-\nu \sum_{i=1}^n m_i} e^{-\nu(t-u-\sum_{i=1}^n m_i)}$$

in Bezug auf ortsabhängige Absorption und Streuung. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} & I_{n,k}(t, u, x, m_1, \dots, m_n, \theta_1, \dots, \theta_n, \theta) \\ \stackrel{\text{def}}{=} & \prod_{i=1}^n \left[\nu_k \left(x - \left(t - u - \sum_{j=1}^n m_j \right) \theta - \sum_{j=i+1}^n m_j \theta_j \right) \right. \\ & \exp \left(- \int_0^{m_i} \mu_k \left(x - \left(t - u - \sum_{j=1}^n m_j \right) \theta - \sum_{j=i+1}^n m_j \theta_j - v \theta_i \right) \right. \\ & \left. \left. + \nu_k \left(x - \left(t - u - \sum_{j=1}^n m_j \right) \theta - \sum_{j=i+1}^n m_j \theta_j - v \theta_i \right) dv \right) \right] \\ & \exp \left(- \int_0^{t-u-\sum_{i=1}^n m_i} \mu_k(x - v\theta) + \nu_k(x - v\theta) dv \right) \\ = & \prod_{i=1}^{n+1} J_i^\mu(t, u, x, m_1, \dots, m_n, \theta_1, \dots, \theta_n, \theta) \prod_{i=1}^n J_i^\nu(t, u, x, m_1, \dots, m_n, \theta_1, \dots, \theta_n, \theta) \\ & \nu_k \left(x - \left(t - u - \sum_{j=1}^n m_j \right) \theta - \sum_{j=i+1}^n m_j \theta_j \right) J_{n+1}^\nu(t, u, x, m_1, \dots, m_n, \theta_1, \dots, \theta_n, \theta), \end{aligned} \tag{6}$$

wobei wir die übliche Konvention verwenden, dass leere Summen als 0 und leere Produkte als 1 definiert seien. Unter Benutzung der in den Abschnitten 3.5 und 4.1 eingeführten Notation gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ und $\beta \in \{\mu, \nu\}$

$$J_i^\beta(t, u, x, m_1, \dots, m_n, \theta_1, \dots, \theta_n, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} m^{(x - (t - u - \sum_{l=1}^n m_l)\theta - \sum_{l=i}^n m_l \theta_l, \theta_i, m_i)} \prod_{j=1}^n \exp\left(-\beta_{k,j-1}\left(x - \left(t - u - \sum_{l=1}^n m_l\right)\theta - \sum_{l=i}^n m_l \theta_l, \theta_i\right)(S_j(\dots, \theta_i) - S_{j-1}(\dots, \theta_i))\right) \exp\left(-\beta_{k,m(x - (t - u - \sum_{l=1}^n m_l)\theta - \sum_{l=i}^n m_l \theta_l, \theta_i, m_i)}(m_i - S_{m(\dots, \theta_i, m_i)}(\dots, \theta_i))\right),$$

wobei wir den Term $x - (t - u - \sum_{l=1}^n m_l)\theta - \sum_{l=i}^n m_l \theta_l$ aus Gründen der Übersichtlichkeit an einigen Stellen durch Fortsetzungspunkte ersetzt haben, sowie

$$J_{n+1}^\beta(t, u, x, m_1, \dots, m_n, \theta_1, \dots, \theta_n, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} m^{(x - (t - u - \sum_{l=1}^n m_l)\theta, \theta, t - u - \sum_{l=1}^n m_l)} \prod_{j=1}^n \exp\left(-\beta_{k,j-1}\left(x - \left(t - u - \sum_{l=1}^n m_l\right)\theta, \theta\right)(S_j(\dots, \theta) - S_{j-1}(\dots, \theta))\right) \exp\left(-\beta_{k,m(x - (t - u - \sum_{l=1}^n m_l)\theta, \theta, t - u - \sum_{l=1}^n m_l)}\left(t - u - \sum_{l=1}^n m_l - S_{m(\dots, \theta, t - u - \sum_{l=1}^n m_l)}(\dots, \theta)\right)\right),$$

wobei wir den Term $x - (t - u - \sum_{l=1}^n m_l)\theta$ durch Fortsetzungspunkte ersetzt haben. Für $n = 0$ und $\beta \in \{\mu, \nu\}$ erhalten wir ferner den durch Absorption und Streuung bedingten Term

$$J^\mu(x, t, u, \theta) J^\nu(x, t, u, \theta)$$

mit

$$\stackrel{\text{def}}{=} J^\beta(x, t, u, \theta) m^{(x - (t - u)\theta, \theta, t - u)} \prod_{j=1}^n \exp\left(-\beta_{k,j-1}(\dots, \theta)(S_j(\dots, \theta) - S_{j-1}(\dots, \theta))\right) \exp\left(-\beta_{k,m(x - (t - u)\theta, \theta, t - u)}\left(t - u - S_{m(x - (t - u)\theta, \theta, t - u)}(x - (t - u)\theta, \theta)\right)\right)$$

(wobei wir den Term $x - (t - u)\theta$ durch Fortsetzungspunkte ersetzt haben). Diese Notation entspricht dem folgenden Modell: Für jedes Teilchen beginnt sowohl bei Ablauf einer streuungsbedingten Lebensdauer (Streuereignis) als auch beim Übergang von einer Gewebegruppe in eine andere jeweils eine neue streuungsbedingte Lebensdauer. Die Parameter dieser exponentialverteilten Lebensdauern entsprechen dabei der Streuungsintensität der

jeweiligen Gewebegruppe. Für jedes $t > 0$ erhalten wir die Q -Dichte

$$\begin{aligned}
& u_{t,k}^{\text{MDAMS}}(x, \theta) \\
\stackrel{\text{def}}{=} & 2\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t-u} \int_0^{t-u-m_1} \cdots \int_0^{t-u-\sum_{i=1}^{n-1} m_i} \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \prod_{i=1}^{n-1} \zeta(\theta_{i+1}|\theta_i) \zeta(\theta|\theta_n) \\
& I_{n,k}(t, u, x, m_1, \dots, m_n, \theta_1, \dots, \theta_n, \theta) f\left(x - \left(t - u - \sum_{i=1}^n m_i\right)\theta - \sum_{i=1}^n m_i \theta_i\right) \\
& d\Lambda(\theta_n) \cdots d\Lambda(\theta_1) dm_n \dots dm_1 du \\
= & \sum_{n=0}^{\infty} u_{t,k}^{\text{MDAMS},(n)}(x, \theta)
\end{aligned}$$

des Diffusionsmaßes $\mathcal{D}_t^{\text{MDAMS}}$ zum Zeitpunkt t des Modells MDAMS mit k Gewebegruppen. Dabei bezeichnet $u_{t,k}^{\text{MDAMS},(n)}(x, \theta)$ die *Dichte der erwarteten Anzahl der genau n -fach gestreuten Teilchen*. Man beachte, dass die entsprechenden Teichenprozesse aufgrund der exponentialverteilten Zwischenstreuzeiten zeitstetige Markov-Prozesse darstellen, denn es gilt

$$\mathbb{P}(Y(t) \in A | Y(t_1) = (x_1, \theta_1), \dots, Y(t_n) = (x_n, \theta_n)) = \mathbb{P}(Y(t - t_n) \in A | Y(0) = (x_n, \theta_n))$$

für alle $A \in \mathbb{R}^3 \times S^2$ und $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$.

6.1.1 Bestimmung der Transportgleichung (MDAMS)

Zur Bestimmung der Transportgleichung für die Q -Dichte $u_{t,k}^{\text{MDAMS}}(x, \theta)$ wenden wir die gleichen mathematischen Hilfsmittel wie im Abschnitt 5.1.1 (Modell MDAS) an. Wir wählen erneut den Ansatz

$$u_{t+s,k}^{\text{MDAMS}}(x + s\theta, \theta) = u_{t,k}^{\text{MDAMS}}(x, \theta) + (u_{t+s,k}^{\text{MDAMS}}(x + s\theta, \theta) - u_{t,k}^{\text{MDAMS}}(x, \theta))$$

und bestimmen die Ableitung der Funktion $\tau \mapsto u_{t+\tau,k}^{\text{MDAMS}}(x + \tau\theta, \theta)$. Im ersten Schritt erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{d\tau} u_{t+\tau,k}^{\text{MDAMS}}(x + \tau\theta, \theta) \\
= & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d\tau} u_{t+\tau,k}^{\text{MDAMS},(n)}(x + \tau\theta, \theta) \\
= & 2\lambda \frac{d}{d\tau} \int_0^{t+\tau} \exp\left(-\int_0^{t+\tau-u} \mu_k(x - v\theta) + \nu_k(x - v\theta) dv\right) f(x - (t - u)\theta) du \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{d\tau} u_{t+\tau,k}^{\text{MDAMS},(n)}(x + \tau\theta, \theta) \\
= & 2\lambda f(x + \tau\theta) + 2\lambda \int_0^{t+\tau} \frac{d}{d\tau} \exp\left(-\int_0^{t+\tau-u} \mu_k(x - v\theta) + \nu_k(x - v\theta) dv\right) \\
& f(x - (t - u)\theta) du + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{d\tau} u_{t+\tau,k}^{\text{MDAMS},(n)}(x + \tau\theta, \theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\lambda f(x + \tau\theta) - (\mu_k(x + \tau\theta) + \nu_k(x + \tau\theta))u_{t+\tau,k}^{\text{MDAMS},(0)}(x + \tau\theta, \theta) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{d\tau} u_{t+\tau,k}^{\text{MDAMS},(n)}(x + \tau\theta, \theta),
\end{aligned}$$

wobei wir die fast sichere absolute Konvergenz der Reihe ausgenutzt haben (Der Emissionsprozess $(N(t))_{t \geq 0}$ ist zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ fast sicher endlich.). Mit $\alpha_k = \mu_k + \nu_k$ und durch mehrfache Anwendung der Differentiationsregel (5) erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\tau} u_{t+\tau,k}^{\text{MDAMS},(n)}(x + \tau\theta, \theta) \\
&= 2\lambda \frac{d}{d\tau} \int_0^{t+\tau} \int_0^{t+\tau-u} \int_0^{t+\tau-u-m_1} \cdots \int_0^{t+\tau-u-\sum_{i=1}^{n-1} m_i} \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \prod_{i=1}^{n-1} \zeta(\theta_{i+1}|\theta_i) \zeta(\theta|\theta_n) \\
&\quad I_{n,k}(t + \tau, u, x, m_1, \dots, m_n, \theta_1, \dots, \theta_n, \theta) f\left(x - \left(t - u - \sum_{i=1}^n m_i\right)\theta - \sum_{i=1}^n m_i \theta_i\right) \\
&\quad d\Lambda(\theta_n) \cdots d\Lambda(\theta_1) dm_n \dots dm_1 du \\
&\quad \vdots \\
&= 2\lambda \int_0^{t+\tau} \int_0^{t+\tau-u} \int_0^{t+\tau-u-m_1} \cdots \frac{d}{d\tau} \int_0^{t+\tau-u-\sum_{i=1}^{n-1} m_i} \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \prod_{i=1}^{n-1} \zeta(\theta_{i+1}|\theta_i) \zeta(\theta|\theta_n) \\
&\quad I_{n,k}(t + \tau, u, x + \tau\theta, m_1, \dots, m_n, \theta_1, \dots, \theta_n, \theta) \\
&\quad f\left(x + \tau\theta - \left(t + \tau - u - \sum_{i=1}^n m_i\right)\theta - \sum_{i=1}^n m_i \theta_i\right) d\Lambda(\theta_n) \cdots d\Lambda(\theta_1) dm_n \dots dm_1 du \\
&= 2\lambda \int_0^{t+\tau} \int_0^{t+\tau-u} \int_0^{t+\tau-u-m_1} \cdots \int_0^{t+\tau-u-\sum_{i=1}^{n-2} m_i} \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \prod_{i=1}^{n-1} \zeta(\theta_{i+1}|\theta_i) \zeta(\theta|\theta_n) \\
&\quad I_{n,k}\left(t + \tau, u, x + \tau\theta, m_1, \dots, m_{n-1}, t + \tau - u - \sum_{i=1}^{n-1} m_i, \theta_1, \dots, \theta_n, \theta\right) \\
&\quad f\left(x + \tau\theta - \left(t + \tau - u - \sum_{i=1}^{n-1} m_i\right)\theta_n - \sum_{i=1}^{n-1} m_i \theta_i\right) d\Lambda(\theta_n) \cdots d\Lambda(\theta_1) dm_n \dots dm_1 du \\
&+ 2\lambda \int_0^{t+\tau} \int_0^{t+\tau-u} \int_0^{t+\tau-u-m_1} \cdots \int_0^{t+\tau-u-\sum_{i=1}^{n-1} m_i} \frac{d}{d\tau} \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \prod_{i=1}^{n-1} \zeta(\theta_{i+1}|\theta_i) \zeta(\theta|\theta_n) \\
&\quad I_{n,k}(t + \tau, u, x + \tau\theta, m_1, \dots, m_n, \theta_1, \dots, \theta_n, \theta) f\left(x - \left(t - u - \sum_{i=1}^n m_i\right)\theta - \sum_{i=1}^n m_i \theta_i\right) \\
&\quad d\Lambda(\theta_n) \cdots d\Lambda(\theta_1) dm_n \dots dm_1 du \\
&= 2\lambda \int_0^{t+\tau} \int_0^{t+\tau-u} \int_0^{t+\tau-u-m_1} \cdots \int_0^{t+\tau-u-\sum_{i=1}^{n-2} m_i} \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \prod_{i=1}^{n-1} \zeta(\theta_{i+1}|\theta_i) \zeta(\theta|\theta_n) \\
&\quad \nu_k(x + \tau\theta) \prod_{i=1}^{n-1} \left[\nu_k\left(x + \tau\theta - \left(t + \tau - u - \sum_{j=1}^{n-1} m_j\right)\theta_n - \sum_{j=i+1}^{n-1} m_j \theta_j\right) \right. \\
&\quad \left. \exp\left(- \int_0^{m_i} \alpha_k\left(x + \tau\theta - \left(t + \tau - u - \sum_{j=1}^{n-1} m_j\right)\theta_n - \sum_{j=i+1}^{n-1} m_j \theta_j - v\theta_i\right) dv\right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \exp\left(-\int_0^{t+\tau-u-\sum_{i=1}^{n-1} m_i} \alpha_k(x + \tau\theta - v\theta_n) dv\right) \\
& f\left(x + \tau\theta - \left(t + \tau - u - \sum_{i=1}^{n-1} m_i\right)\theta_n - \sum_{i=1}^{n-1} m_i\theta_i\right) d\Lambda(\theta_n) \cdots d\Lambda(\theta_1) dm_n \dots dm_1 du \\
+ & 2\lambda \int_0^{t+\tau} \int_0^{t+\tau-u} \int_0^{t+\tau-u-m_1} \cdots \int_0^{t+\tau-u-\sum_{i=1}^{n-1} m_i} \\
& \frac{d}{d\tau} \left[\exp\left(-\int_0^{t+\tau-u-\sum_{i=1}^n m_i} \alpha_k\left(x - \left(t - u - \sum_{i=1}^n m_i\right)\theta + v\theta\right) dv\right) \right] \\
& \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \prod_{i=1}^{n-1} \zeta(\theta_{i+1}|\theta_i) \zeta(\theta|\theta_n) \prod_{i=1}^n \left[\nu_k\left(x - \left(t - u - \sum_{j=1}^n m_j\right)\theta - \sum_{j=i+1}^n m_j\theta_j\right) \right. \\
& \left. \exp\left(-\int_0^{m_i} \alpha_k\left(x - \left(t - u - \sum_{j=1}^n m_j\right)\theta - \sum_{j=i+1}^n m_j\theta_j - v\theta_i\right) dv\right) \right] \\
& f\left(x - \left(t - u - \sum_{i=1}^n m_i\right)\theta - \sum_{i=1}^n m_i\theta_i\right) d\Lambda(\theta_n) \cdots d\Lambda(\theta_1) dm_n \dots dm_1 du \\
= & \int_{S^2} \nu_k(x + \tau\theta) \zeta(\theta|\theta') u_{t+\tau,k}^{\text{MDAMS},(n-1)}(x + \tau\theta, \theta') d\Lambda(\theta') \\
+ & 2\lambda \int_0^{t+\tau} \int_0^{t+\tau-u} \int_0^{t+\tau-u-m_1} \cdots \int_0^{t+\tau-u-\sum_{i=1}^{n-1} m_i} \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \prod_{i=1}^{n-1} \zeta(\theta_{i+1}|\theta_i) \zeta(\theta|\theta_n) \\
& -\alpha_k(x + \tau\theta) \exp\left(-\int_0^{t+\tau-u-\sum_{i=1}^n m_i} \alpha_k(x + \tau\theta - v\theta) dv\right) \\
& \prod_{i=1}^n \left[\nu_k\left(x - \left(t - u - \sum_{j=1}^n m_j\right)\theta - \sum_{j=i+1}^n m_j\theta_j\right) \right. \\
& \left. \exp\left(-\int_0^{m_i} \alpha_k\left(x - \left(t - u - \sum_{j=1}^n m_j\right)\theta - \sum_{j=i+1}^n m_j\theta_j - v\theta_i\right) dv\right) \right] \\
& f\left(x - \left(t - u - \sum_{i=1}^n m_i\right)\theta - \sum_{i=1}^n m_i\theta_i\right) d\Lambda(\theta_n) \cdots d\Lambda(\theta_1) dm_n \dots dm_1 du \\
= & \int_{S^2} \nu_k(x + \tau\theta) \zeta(\theta|\theta') u_{t+\tau,k}^{\text{MDAMS},(n-1)}(x + \tau\theta, \theta') d\Lambda(\theta') \\
+ & -(\mu_k(x + \tau\theta) + \nu_k(x + \tau\theta)) u_{t+\tau,k}^{\text{MDAMS},(n)}(x + \tau\theta, \theta),
\end{aligned}$$

wobei wir beim vorletzten Gleichheitszeichen im ersten Summanden θ_n durch θ' ersetzt und im zweiten Summanden verwendet haben, dass die Funktionen $v \mapsto \mu_k(x + \tau\theta)$ und $v \mapsto \nu_k(x + \tau\theta)$ stückweise konstant sind (Der Pfad $\{v \mapsto x - (t - u - \sum_{i=1}^n m_i)\theta + v\theta | v \in [0, t + \tau - u - \sum_{i=1}^n m_i]\}$ durchläuft höchstens endlich viele Gewebegruppen.). Mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung und Summation über $n \in \mathbb{N}_0$ erhalten

wir schließlich für alle $t, s > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ die Transportgleichung

$$\begin{aligned} u_{t+s,k}^{\text{MDAMS}}(x + s\theta, \theta) &= u_{t,k}^{\text{MDAMS}}(x, \theta) - \int_0^s (\mu_k(x + \tau\theta) + \nu_k(x + \tau\theta)) u_{t+\tau,k}^{\text{MDAMS}}(x + \tau\theta, \theta) d\tau \\ &+ \int_0^s \int_{S^2} \nu_k(x + \tau\theta) \zeta(\theta|\theta') u_{t+\tau,k}^{\text{MDAMS}}(x + \tau\theta, \theta') d\Lambda(\theta') d\tau \\ &+ \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\theta) d\tau. \end{aligned}$$

Auch diese geht wieder aus der Gleichung des Modells mit konstanten Absorptions- und Streuraten (Modell MAMS) hervor, indem wir die Absorptions- und die Streuraten durch die entsprechenden Treppenfunktionen ersetzen.

6.1.2 Stationäre Version des Diffusionsmaßes

Durch Substitution von $t-u$ durch u unter dem ersten Integral der geschlossenen Form der Dichte $u_{t,k}^{\text{MDAMS}}(x, \theta)$ sieht man leicht ein, dass der Integrand genau wie bei den Dichten der anderen Modelle wieder unabhängig von t ist. Die Grenzwertbetrachtung $t \rightarrow \infty$ liefert daher

$$\begin{aligned} &u_k^{\text{MDAMS}}(x, \theta) \\ \stackrel{\text{def}}{=} &2\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^u \int_0^{u-m_1} \cdots \int_0^{u-\sum_{i=1}^{n-1} m_i} \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \prod_{i=1}^{n-1} \zeta(\theta_{i+1}|\theta_i) \zeta(\theta|\theta_n) \\ &I_{n,k}(u, x, m_1, \dots, m_n, \theta_1, \dots, \theta_n, \theta) f(x - (u - \sum_{i=1}^n m_i)\theta - \sum_{i=1}^n m_i\theta_i) \\ &d\Lambda(\theta_n) \cdots d\Lambda(\theta_1) dm_n \cdots dm_1 du \end{aligned}$$

als Q -Dichte des stationären Diffusionsmaßes $\mathcal{D}_k^{\text{MDAMS}}$ des Modells MDAMS mit k Gewebegruppen, wobei der durch Absorption und Streuung bedingte Term

$$I_{n,k}(u, x, m_1, \dots, m_n, \theta_1, \dots, \theta_n, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} I_{n,k}(t, t-u, x, m_1, \dots, m_n, \theta_1, \dots, \theta_n, \theta)$$

unabhängig von t ist. Diese Dichte genügt der zeitunabhängigen Transportgleichung

$$\begin{aligned} u_k^{\text{MDAMS}}(x + s\theta, \theta) &= u_k^{\text{MDAMS}}(x, \theta) - \int_0^s (\mu_k(x + \tau\theta) + \nu_k(x + \tau\theta)) u_k^{\text{MDAMS}}(x + \tau\theta, \theta) d\tau \\ &+ \int_0^s \int_{S^2} \nu_k(x + \tau\theta) \zeta(\theta|\theta') u_k^{\text{MDAMS}}(x + \tau\theta, \theta') d\Lambda(\theta') d\tau \\ &+ \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\theta) d\tau. \end{aligned}$$

6.2 Diffusionsmodell mit Mehrfachstreuung bei stetiger Absorptions- und Streuratenfunktion (Modell MSAMS)

6.2.1 Berechnung der Dichte des Diffusionsmaßes (MSAMS)

Um ein vollständiges stochastisches Modell der Diffusion der Photonen im PET-Scanner zu erhalten, approximieren wir genau wie im Abschnitt 5.2 die stetige Streuratenfunk-

tion $\nu : C \rightarrow [0, \infty)$, $x \mapsto \nu(x)$ monoton durch eine Familie $(\nu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von treppenförmigen Streuungsratenfunktionen. Gleiches gilt für die stetige Absorptionsratenfunktion. Gelte also im Folgenden für jedes $x \in C$ wieder

$$\nu(x) = \lim_{k \uparrow \infty} \nu_k(x) \quad \text{und} \quad \mu(x) = \lim_{k \uparrow \infty} \mu_k(x).$$

Dann erhalten wir für jedes $t > 0$ mithilfe von (6) und dem Satz von der monotonen Konvergenz die Q -Dichte

$$\begin{aligned} & u_t^{\text{MSAMS}}(x, \theta) \\ = & 2\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t-u} \int_0^{t-u-m_1} \cdots \int_0^{t-u-\sum_{i=1}^{n-1} m_i} \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \prod_{i=1}^{n-1} \zeta(\theta_{i+1}|\theta_i) \zeta(\theta_n) \\ & I_n(t, u, x, m_1, \dots, m_n, \theta_1, \dots, \theta_n, \theta) f\left(x - \left(t - u - \sum_{i=1}^n m_i\right)\theta - \sum_{i=1}^n m_i \theta_i\right) \\ & d\Lambda(\theta_n) \cdots d\Lambda(\theta_1) dm_n \dots dm_1 du \end{aligned}$$

des Diffusionsmaßes $\mathcal{D}_t^{\text{MSAMS}}$ zum Zeitpunkt t , wobei wir

$$\begin{aligned} & I_n(t, u, x, m_1, \dots, m_n, \theta_1, \dots, \theta_n, \theta) \\ \stackrel{\text{def}}{=} & \prod_{i=1}^n \left[\nu\left(x - \left(t - u - \sum_{j=1}^n m_j\right)\theta - \sum_{j=i+1}^n m_j \theta_j\right) \right. \\ & \exp\left(-\int_0^{m_i} \mu\left(x - \left(t - u - \sum_{j=1}^n m_j\right)\theta - \sum_{j=i+1}^n m_j \theta_j - v\theta_i\right) \right. \\ & \left. \left. + \nu\left(x - \left(t - u - \sum_{j=1}^n m_j\right)\theta - \sum_{j=i+1}^n m_j \theta_j - v\theta_i\right) dv\right) \right] \\ & \exp\left(-\int_0^{t-u-\sum_{i=1}^n m_i} \mu(x - v\theta) + \nu(x - v\theta) dv\right) \end{aligned}$$

gesetzt haben. Das Diffusionsmaß $\mathcal{D}_t^{\text{MSAMS}}$ ist also die Grenzverteilung der Folge $(\mathcal{D}_{t,k}^{\text{MDAMS}})_{k \in \mathbb{N}}$. Insbesondere sind die entsprechenden Teilchenprozesse, genau wie jene des Modells MDAMS, zeitstetige Markov-Prozesse.

6.2.2 Bestimmung der Transportgleichung (MSAMS)

Eine weitere Anwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz liefert für beliebige $t, s > 0$ die Transportgleichung

$$\begin{aligned} u_{t+s}^{\text{MSAMS}}(x + s\theta, \theta) &= u_t^{\text{MSAMS}}(x, \theta) - \int_0^s (\mu(x + \tau\theta) + \nu(x + \tau\theta)) u_{t+\tau}^{\text{MSAMS}}(x + \tau\theta, \theta) d\tau \\ &+ \int_0^s \int_{S^2} \nu(x + \tau\theta) \zeta(\theta|\theta') u_{t+\tau}^{\text{MSAMS}}(x + \tau\theta, \theta') d\Lambda(\theta') d\tau \\ &+ \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\theta) d\tau \end{aligned}$$

der Q -Dichte des Diffusionsmaßes des Modells MSAMS. Im Dämpfungsterm und im Streutermin steht hier anstatt der treppenförmigen Absorptionsratenfunktion μ_k die stetige Absorptionsratenfunktion μ und anstatt der treppenförmigen Streuungsratenfunktion ν_k die stetige Streuungsratenfunktion ν .

6.2.3 Stationäre Version des Diffusionsmaßes (MSAMS)

Mithilfe derselben Schlüsse, die wir in den vorherigen Abschnitten zur Bestimmung der jeweiligen stationären Diffusionsmaße verwendet haben, erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
u^{\text{MSAMS}}(x, \theta) &= 2\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^u \int_0^{u-m_1} \cdots \int_0^{u-\sum_{i=1}^{n-1} m_i} \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \prod_{i=1}^{n-1} \zeta(\theta_{i+1}|\theta_i) \zeta(\theta|\theta_n) \\
&\quad I_n(u, x, m_1, \dots, m_n, \theta_1, \dots, \theta_n, \theta) f\left(x - \left(u - \sum_{i=1}^n m_i\right)\theta - \sum_{i=1}^n m_i \theta_i\right) \\
&\quad d\Lambda(\theta_n) \cdots d\Lambda(\theta_1) dm_n \dots dm_1 du
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
&I_n(u, x, m_1, \dots, m_n, \theta_1, \dots, \theta_n, \theta) \\
\stackrel{\text{def}}{=} &\prod_{i=1}^n \left[\nu\left(x - \left(u - \sum_{j=1}^n m_j\right)\theta - \sum_{j=i+1}^n m_j \theta_j\right) \right. \\
&\exp\left(-\int_0^{m_i} \mu\left(x - \left(u - \sum_{j=1}^n m_j\right)\theta - \sum_{j=i+1}^n m_j \theta_j - v\theta_i\right) \right. \\
&\left. \left. + \nu\left(x - \left(u - \sum_{j=1}^n m_j\right)\theta - \sum_{j=i+1}^n m_j \theta_j - v\theta_i\right) dv\right) \right] \\
&\exp\left(-\int_0^{u-\sum_{i=1}^n m_i} \mu(x - v\theta) + \nu(x - v\theta) dv\right)
\end{aligned}$$

als Q -Dichte des stationären Diffusionsmaßes $\mathcal{D}^{\text{MSAMS}}$, welche der zeitunabhängigen Transportgleichung

$$\begin{aligned}
u^{\text{MSAMS}}(x + s\theta, \theta) &= u^{\text{MSAMS}}(x, \theta) - \int_0^s (\mu(x + \tau\theta) + \nu(x + \tau\theta)) u^{\text{MSAMS}}(x + \tau\theta, \theta) d\tau \\
&+ \int_0^s \int_{S^2} \nu(x + \tau\theta) \zeta(\theta|\theta') u^{\text{MSAMS}}(x + \tau\theta, \theta') d\Lambda(\theta') d\tau \\
&+ \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\theta) d\tau
\end{aligned}$$

genügt.

7 Übertragung der Ergebnisse auf den zweidimensionalen Fall

Im Hinblick auf diverse praktische Anwendungen ist es sinnvoll, die stochastische Modellierung des Diffusionsprozesses der PET auch für den zweidimensionalen Fall durchzuführen. Die Implementierung eines bildgebenden Verfahrens auf der Basis des dreidimensionalen Modells ist ungleich komplizierter als auf der Basis des zweidimensionalen Modells, wobei gerade die Berechnung der Integrale über die zweidimensionale Menge S^2 eine unverhältnismäßig lange Rechenzeit erfordert. Zudem besitzen viele moderne PET-Scanner sowohl einen 3D- als auch einen 2D-Modus (siehe Kapitel 2). Bei letzterem werden durch die technische Abschirmung der Detektoren durch so genannte Septen (massive Blenden) ausschließlich Koinzidenzen von Detektorenpaaren registriert, die sich auf demselben Detektorring des Scanners, das heißt in derselben transaxialen Ebene, befinden. Bei der Auswertung der Messdaten der einzelnen Detektorringe werden die zugehörigen Schichtaufnahmen zu einem dreidimensionalen Bild verrechnet. Einer der wichtigsten technischen Vorteilen des 2D-Modus gegenüber dem 3D-Modus ist eine deutliche Verringerung des Streuanteils in den Messdaten. Weiterführende Informationen zu den technischen Besonderheiten der spezifischen PET-Scanner und der Verarbeitung der Messdaten in den beiden Modi findet man in den Arbeiten [Ber] und [Wer1].

7.1 Anpassung der Diffusionsmodelle

Die Übertragung der Ergebnisse für die komplexen dreidimensionalen Modelle auf den zweidimensionalen Fall stellt uns vor keine größeren Probleme. Der PET-Zylinder C , der den Grundraum des Diffusionsprozesses darstellt, ist im zweidimensionalen Fall ein beschränktes zusammenhängendes Objekt in der Ebene, das heißt eine beschränkte Teilmenge des \mathbb{R}^2 wie beispielsweise ein Kreis oder ein Rechteck. Demnach besitzt die (\mathbb{R}^2 -)Quelldichte f den nun zweidimensionalen Träger C . Die *Emissions-Richtung* sei gegeben durch die Verknüpfung $\rho \circ \Theta$ der (messbaren) Funktion $\rho : [0, 2\pi] \rightarrow S^1$,

$$\rho(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} (\cos(\theta), \sin(\theta)) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2$$

mit der Zufallsgröße $\Theta \sim U(0, 2\pi)$. Für die Verteilung Φ des Streuwinkels verwenden wir die $\mathbb{R}_{[0, \pi]}$ -Dichte h aus den dreidimensionalen Modellen. Die für die Modellierung der Emission, Absorption und Streuung benötigten Prozesse und Zufallsvariablen $(N(t))_{t \geq 0}$, $(M(t))_{t \geq 0}$, T , B und L übertragen wir ebenfalls unverändert vom dreidimensionalen auf den zweidimensionalen Fall. Einzig die Hilfsgröße Y , die wir für die Modellierung der neuen Richtung unmittelbar nach einem Streuereignis verwendet haben, besitzt im zweidimensionalen Fall anstatt einer $U(0, 2\pi)$ -Verteilung eine Laplace-Verteilung auf $\{1, 2\}$ - es gilt also $\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(Y = 1)$. Sie entscheidet darüber, ob ein Teilchen nach der Streuung um den Winkel Φ nach rechts oder nach links abgelenkt wird. Die neue Richtung $\rho(\Theta)$

ergibt sich dabei aus der alten Richtung $\rho(\Theta_0)$ durch $\Theta = H(\Theta_0, \Phi, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \Theta_0 + (-1)^Y \Phi$. Für ein festes $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ und ein beliebiges messbares $A \subset [\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi]$ gilt dann

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{\theta_0 + (-1)^Y \Phi}(A) &= \frac{1}{2}(\mathbb{P}(\Phi \in A - \theta_0) + \mathbb{P}(\Phi \in \theta_0 - A)) \\ &= \frac{1}{2} \int_A h(z - \theta_0) + h(\theta_0 - z) dz \end{aligned}$$

wodurch $H(\theta_0, \Phi, Y)$ wegen $\langle \rho(\theta_0), \rho(\theta) \rangle = \cos(\theta_0 - \theta) = \cos(\theta - \theta_0)$ die Lebesgue-Dichte

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}(\theta|\theta_0) &= \frac{1}{2}(h(\theta_0 - \theta) + h(\theta - \theta_0))\mathbf{1}_{[\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi]}(\theta) \\ &= \frac{1}{2}h(\arccos \langle \rho(\theta), \rho(\theta_0) \rangle)\mathbf{1}_{[\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi]}(\theta) \\ &= \frac{1}{2}h(\phi_{\theta, \theta_0})\mathbf{1}_{[\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi]}(\theta) \end{aligned}$$

mit dem (Streu-)Winkel ϕ_{θ, θ_0} zwischen den Vektoren $\rho(\theta)$ und $\rho(\theta_0)$ besitzt. Dabei haben wir beachtet, dass für ein beliebiges $\theta \in [\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi]$ (wegen $\Phi \in [0, \pi]$) entweder $h(\theta_0 - \theta) = 0$ oder $h(\theta - \theta_0) = 0$ gilt. Unter Beachtung von $\{\rho(y)|y \in [\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi]\} = \{\rho(y)|y \in [0, 2\pi]\} = S^1$ erhalten wir damit die $U(0, 2\pi)$ -Dichte

$$\zeta(\theta|\theta_0) = \pi h(\phi_{\theta, \theta_0})$$

von $H(\theta_0, \Phi, Y)$. Sei im Folgenden $Q = \mathbb{X}^2 \otimes U(0, 2\pi)$ und $A \subset \mathbb{R}^2 \times [0, 2\pi]$ eine beliebige Q -messbare Menge. Dann ergibt die exemplarische Rechnung

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathcal{N}_t^M(A)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(t) = n) \mathbb{E}(\mathcal{N}_t^M(A) | N(t) = n) \\ &= 2\lambda t \mathbb{P}((X + (t - T)\rho(\Theta), \Theta) \in A) \\ &= 2\lambda \int_0^t \mathbb{P}((X + (t - u)\rho(\Theta), \Theta) \in A) du \\ &= 2\lambda \int_0^t \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{A_\theta} f(x - (t - u)\rho(\theta)) d\mathbb{X}^2(x) d\theta du \\ &= \int_A 2\lambda \int_0^t f(x - (t - u)\rho(\theta)) du dQ(x, \theta) \\ &= \int_A u_t^M(x, \theta) dQ(x, \theta) \end{aligned}$$

das Diffusionsmaß zum Zeitpunkt $t > 0$ für M analog zu den Ausführungen im dritten Abschnitt, wobei wir $A_\theta = \{x \in \mathbb{R}^2 | (x, \theta) \in A\}$ gesetzt haben. Für die anderen Modelle erhalten wir mithilfe ähnlicher Rechnungen wie die für die entsprechenden dreidimensionalen Gegenstücke die folgenden Q -Dichten der Diffusionsmaße zum Zeitpunkt $t > 0$:

- Für MA erhalten wir die Dichte

$$u_t^{MA}(x, \theta) = 2\lambda \int_0^t e^{-\mu(t-u)} f(x - (t - u)\rho(\theta)) du,$$

- für MASE die Dichte

$$\begin{aligned}
u_t^{\text{MASE}}(x, \theta) &= 2\lambda(1-p) \int_0^t e^{-\mu(t-u)} f(x - (t-u)\rho(\theta)) du \\
&\quad + 2\lambda p \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^t \zeta(\theta|\theta_0) e^{-\mu(t-u)} f(x - (t-u)\rho(\theta)) du d\theta_0,
\end{aligned}$$

- für MAS die Dichte

$$\begin{aligned}
&u_t^{\text{MAS}}(x, \theta) \\
&= 2\lambda \int_0^t e^{-(\mu+\nu)(t-u)} f(x - (t-u)\rho(\theta)) du \\
&+ 2\lambda \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_0^{t-u} \nu e^{-\nu m} e^{-\mu(t-u)} \zeta(\theta|\theta_0) f(x - m\rho(\theta_0) - (t-u-m)\rho(\theta)) \\
&\quad dm du d\theta_0,
\end{aligned}$$

- für MAMS die Dichte

$$\begin{aligned}
&u_t^{\text{MAMS}}(x, \theta) \\
&= 2\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n \int_0^t \int_0^{t-u} \int_0^{t-u-m_1} \cdots \int_0^{t-u-\sum_{k=1}^{n-1} m_k} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \frac{1}{(2\pi)^n} \\
&\quad \prod_{k=1}^{n-1} \zeta(\theta_{k+1}|\theta_k) \zeta(\theta|\theta_n) e^{-(\mu+\nu)(t-u)} f\left(x - \sum_{k=1}^n m_k \rho(\theta_k) - \left(t-u - \sum_{k=1}^n m_k\right) \rho(\theta)\right) \\
&\quad d\theta_n \cdots d\theta_1 dm_n \cdots dm_1 du,
\end{aligned}$$

- für MDA (mit k Gewebegruppen) die Dichte

$$u_{t,k}^{\text{MDA}}(x, \theta) = 2\lambda \int_0^t J_{t,u,k}^{\mu}(x, \theta) f(x - (t-u)\rho(\theta)) du$$

- für MDAS (mit k Gewebegruppen) die Dichte

$$\begin{aligned}
&u_{t,k}^{\text{MDAS}}(x, \theta) \\
&= 2\lambda \int_0^t J_{t,u,k}^{\mu,\nu}(x, \theta) f(x - (t-u)\rho(\theta)) du \\
&+ 2\lambda \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_0^{t-u} K_{t,u,m,k}(x, \theta, \theta_0) \zeta(\theta|\theta_0) f(x - m\rho(\theta_0) - (t-u-m)\rho(\theta)) \\
&\quad dm du d\theta_0,
\end{aligned}$$

- für MDAMS (mit k Gewebegruppen) die Dichte

$$\begin{aligned}
&u_{t,k}^{\text{MDAMS}}(x, \theta) \\
&= 2\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t-u} \int_0^{t-u-m_1} \cdots \int_0^{t-u-\sum_{i=1}^{n-1} m_i} \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \prod_{i=1}^{n-1} \zeta(\theta_{i+1}|\theta_i) \zeta(\theta|\theta_n) \\
&\quad I_{n,k}(t, u, x, m_1, \dots, m_n, \theta_1, \dots, \theta_n, \theta) f\left(x - \left(t-u - \sum_{i=1}^n m_i\right) \rho(\theta) - \sum_{i=1}^n m_i \rho(\theta_i)\right) \\
&\quad d\Lambda(\theta_n) \cdots d\Lambda(\theta_1) dm_n \cdots dm_1 du,
\end{aligned}$$

- für MSA die Dichte

$$u_t^{\text{MSA}}(x, \theta) = 2\lambda \int_0^t J_{t,u}^\mu(x, \theta) f(x - (t - u)\rho(\theta)) du,$$

- für MSAS die Dichte

$$\begin{aligned} & u_t^{\text{MSAS}}(x, \theta) \\ = & 2\lambda \int_0^t I_u^{\mu, \nu}(x, \theta) f(x - (t - u)\rho(\theta)) du \\ + & 2\lambda \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_0^{t-u} L_{u,m}(x, \theta, \theta_0) \zeta(\theta|\theta_0) f(x - m\rho(\theta_0) - (t - u - m)\rho(\theta)) \\ & dm du d\theta_0, \end{aligned}$$

- und schließlich für MSAMS die Dichte

$$\begin{aligned} & u_t^{\text{MSAMS}}(x, \theta) \\ = & 2\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t-u} \int_0^{t-u-m_1} \cdots \int_0^{t-u-\sum_{i=1}^{n-1} m_i} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \frac{1}{(2\pi)^n} \prod_{i=1}^{n-1} \zeta(\theta_{i+1}|\theta_i) \\ & \zeta(\theta|\theta_n) I_n(t, u, x, m_1, \dots, m_n, \theta_1, \dots, \theta_n, \theta) \\ & f\left(x - \left(t - u - \sum_{k=1}^n m_k\right)\rho(\theta) - \sum_{i=1}^n m_i\rho(\theta_i)\right) d\theta_n \cdots d\theta_1 dm_n \cdots dm_1 du. \end{aligned}$$

Die Definitionen aller auftretenden absorptions- und streuungsbedingten Terme stimmen mit denen der entsprechenden dreidimensionalen Gegenstücke überein, wobei wir lediglich θ durch $\rho(\theta)$ ersetzt haben. Die stationären Diffusionsmaße ergeben sich analog zu den Ausführungen im dreidimensionalen Fall durch Substitution von $t - u$ durch u unter dem ersten Integral und anschließender Grenzwertbetrachtung für $t \rightarrow \infty$.

7.2 Die Transportgleichung im zweidimensionalen Fall

Die Transportgleichung (1) vereinfacht sich im zweidimensionalen Fall zu

$$\begin{aligned} u_{t+s}(x + s\rho(\theta), \theta) &= u_t(x, \theta) + \int_0^s q(x + \tau\rho(\theta), \theta) d\tau \\ &\quad - \int_0^s a(x + \tau\rho(\theta), \theta) u_{t+\tau}(x + \tau\rho(\theta), \theta) d\tau \\ &\quad + \int_0^s \int_0^{2\pi} p(x + \tau\rho(\theta), \theta, \theta_0) u_{t+\tau}(x + \tau\rho(\theta), \theta_0) d\theta_0 d\tau, \end{aligned} \tag{7}$$

wobei sich an der Bedeutung der auftretenden Terme nichts ändert. Gleiches gilt für die zeitunabhängige Transportgleichung (3). Für diese erhalten wir im zweidimensionalen Fall

$$\begin{aligned} u(x + s\rho(\theta), \theta) &= u(x, \theta) + \int_0^s q(x + \tau\rho(\theta), \theta) d\tau \\ &\quad - \int_0^s a(x + \tau\rho(\theta), \theta) u(x + \tau\rho(\theta), \theta) d\tau \\ &\quad + \int_0^s \int_0^{2\pi} p(x + \tau\rho(\theta), \theta, \theta_0) u(x + \tau\rho(\theta), \theta_0) d\theta_0 d\tau. \end{aligned} \tag{8}$$

Mit analoger Notation zu den Abschnitten 3 bis 6 gelten für beliebige $t, s > 0$ die (verallgemeinerten) Transportgleichungen

- (M)

$$u_{t+s}^M(x + s\rho(\theta), \theta) = u_t^M(x, \theta) + \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\rho(\theta)) d\tau$$

für die Q -Dichte des zeitabhängigen Diffusionsmaßes im Modell M und

$$u^M(x + s\rho(\theta), \theta) = u^M(x, \theta) + \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\rho(\theta)) d\tau$$

für die Dichte des entsprechenden stationären Diffusionsmaßes,

- (MA)

$$\begin{aligned} u_{t+s}^{MA}(x + s\rho(\theta), \theta) &= u_t^{MA}(x, \theta) - \int_0^s \mu u_{t+\tau}^{MA}(x + \tau\rho(\theta), \theta) d\tau \\ &+ 2\lambda \int_0^s f(x + \tau\rho(\theta)) d\tau \end{aligned}$$

für die Q -Dichte des zeitabhängigen Diffusionsmaßes im Modell MA und

$$\begin{aligned} u^{MA}(x + s\rho(\theta), \theta) &= u^{MA}(x, \theta) - \int_0^s \mu u^{MA}(x + \tau\rho(\theta), \theta) d\tau \\ &+ 2\lambda \int_0^s f(x + \tau\rho(\theta)) d\tau \end{aligned}$$

für die Dichte des entsprechenden stationären Diffusionsmaßes,

- (MASE)

$$\begin{aligned} &u_{t+s}^{\text{MASE}}(x + s\rho(\theta), \theta) \\ &= u_t^{\text{MASE}}(x, \theta) - \int_0^s (\mu u_{t+\tau}^{\text{MASE}}(x + \tau\rho(\theta), \theta) + 2\lambda p f(x + \tau\rho(\theta))) d\tau \\ &+ \int_0^s 2\lambda p \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \zeta(\theta|\theta_0) f(x + \tau\rho(\theta)) d\theta_0 d\tau + \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\rho(\theta)) d\tau \end{aligned}$$

für die Q -Dichte des zeitabhängigen Diffusionsmaßes im Modell MASE und

$$\begin{aligned} &u^{\text{MASE}}(x + s\rho(\theta), \theta) \\ &= u^{\text{MASE}}(x, \theta) - \int_0^s (\mu u^{\text{MASE}}(x + \tau\rho(\theta), \theta) + 2\lambda p f(x + \tau\rho(\theta))) d\tau \\ &+ \int_0^s 2\lambda p \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \zeta(\theta|\theta_0) f(x + \tau\rho(\theta)) d\theta_0 d\tau + \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\rho(\theta)) d\tau \end{aligned}$$

für die Dichte des entsprechenden stationären Diffusionsmaßes,

- (MAS)

$$\begin{aligned}
& u_{t+s}^{\text{MAS}}(x + s\rho(\theta), \theta) \\
&= u_t^{\text{MAS}}(x, \theta) - \int_0^s \left(\mu u_{t+\tau}^{\text{MAS}}(x + \tau\rho(\theta), \theta) + \nu u_{t+\tau}^{\text{MAS},(1)}(x + \tau\rho(\theta), \theta) \right) d\tau \\
&+ \int_0^s \int_0^{2\pi} \frac{\nu}{2\pi} \zeta(\theta|\theta_0) u_{t+\tau}^{\text{MAS},(1)}(x + \tau\rho(\theta), \theta_0) d\theta_0 d\tau \\
&+ \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\rho(\theta)) d\tau
\end{aligned}$$

für die Q -Dichte des zeitabhängigen Diffusionsmaßes im Modell MAS und

$$\begin{aligned}
& u^{\text{MAS}}(x + s\rho(\theta), \theta) \\
&= u^{\text{MAS}}(x, \theta) - \int_0^s \left(\mu u^{\text{MAS}}(x + \tau\rho(\theta), \theta) + \nu u^{\text{MAS},(1)}(x + \tau\rho(\theta), \theta) \right) d\tau \\
&+ \int_0^s \int_0^{2\pi} \frac{\nu}{2\pi} \zeta(\theta|\theta_0) u^{\text{MAS},(1)}(x + \tau\rho(\theta), \theta_0) d\theta_0 d\tau \\
&+ \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\rho(\theta)) d\tau
\end{aligned}$$

für die Dichte des entsprechenden stationären Diffusionsmaßes,

- (MAMS)

$$\begin{aligned}
u_{t+s}^{\text{MAMS}}(x + s\rho(\theta), \theta) &= u_t^{\text{MAMS}}(x, \theta) - \int_0^s (\mu + \nu) u_{t+\tau}^{\text{MAMS}}(x + \tau\rho(\theta), \theta) d\tau \\
&+ \int_0^s \int_0^{2\pi} \frac{\nu}{2\pi} \zeta(\theta|\theta_0) u_{t+\tau}^{\text{MAMS}}(x + \tau\rho(\theta), \theta_0) d\theta_0 d\tau \\
&+ \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\rho(\theta)) d\tau
\end{aligned}$$

für die Q -Dichte des zeitabhängigen Diffusionsmaßes im Modell MAMS und

$$\begin{aligned}
u^{\text{MAMS}}(x + s\rho(\theta), \theta) &= u^{\text{MAMS}}(x, \theta) - \int_0^s (\mu + \nu) u^{\text{MAMS}}(x + \tau\rho(\theta), \theta) d\tau \\
&+ \int_0^s \int_0^{2\pi} \frac{\nu}{2\pi} \zeta(\theta|\theta_0) u^{\text{MAMS}}(x + \tau\rho(\theta), \theta_0) d\theta_0 d\tau \\
&+ \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\rho(\theta)) d\tau
\end{aligned}$$

für die Dichte des entsprechenden stationären Diffusionsmaßes,

- (MDA)

$$\begin{aligned}
u_{t+s,k}^{\text{MDA}}(x + s\rho(\theta), \theta) &= u_{t,k}^{\text{MDA}}(x, \theta) + \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\rho(\theta)) d\tau \\
&- \int_0^s \mu_k(x + \tau\rho(\theta)) u_{t+\tau,k}^{\text{MDA}}(x + \tau\rho(\theta), \theta) d\tau
\end{aligned}$$

für die Q -Dichte des zeitabhängigen Diffusionsmaßes im Modell MDA (mit k Gewebegruppen) und

$$\begin{aligned} u_k^{\text{MDA}}(x + s\rho(\theta), \theta) &= u_k^{\text{MDA}}(x, \theta) + \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\rho(\theta)) d\tau \\ &\quad - \int_0^s \mu_k(x + \tau\rho(\theta)) u_k^{\text{MDA}}(x + \tau\rho(\theta), \theta) d\tau \end{aligned}$$

für die Dichte des entsprechenden stationären Diffusionsmaßes,

- (MDAS)

$$\begin{aligned} &u_{t+s,k}^{\text{MDAS}}(x + s\rho(\theta), \theta) \\ &= u_{t,k}^{\text{MDAS}}(x, \theta) + \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\rho(\theta)) d\tau - \int_0^s \left(\mu_k(x + \tau\rho(\theta)) u_{t+\tau,k}^{\text{MDAS}}(x + \tau\rho(\theta), \theta) \right. \\ &\quad \left. + \nu_k(x + \tau\rho(\theta)) u_{t+\tau,k}^{\text{MDAS},(1)}(x + \tau\rho(\theta), \theta) \right) d\tau \\ &\quad + \int_0^s \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \nu_k(x + \tau\rho(\theta)) \zeta(\theta|\theta_0) u_{t+\tau,k}^{\text{MDAS},(1)}(x + \tau\rho(\theta), \theta_0) d\theta_0 d\tau \end{aligned}$$

für die Q -Dichte des zeitabhängigen Diffusionsmaßes im Modell MDAS (mit k Gewebegruppen) und

$$\begin{aligned} &u_k^{\text{MDAS}}(x + s\rho(\theta), \theta) \\ &= u_k^{\text{MDAS}}(x, \theta) + \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\rho(\theta)) d\tau - \int_0^s \left(\mu_k(x + \tau\rho(\theta)) u_{t+\tau,k}^{\text{MDAS}}(x + \tau\rho(\theta), \theta) \right. \\ &\quad \left. + \nu_k(x + \tau\rho(\theta)) u_{t+\tau,k}^{\text{MDAS},(1)}(x + \tau\rho(\theta), \theta) \right) d\tau \\ &\quad + \int_0^s \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \nu_k(x + \tau\rho(\theta)) \zeta(\theta|\theta_0) u_{t+\tau,k}^{\text{MDAS},(1)}(x + \tau\rho(\theta), \theta_0) d\theta_0 d\tau \end{aligned}$$

für die Dichte des entsprechenden stationären Diffusionsmaßes,

- (MDAMS)

$$\begin{aligned} &u_{t+s,k}^{\text{MDAMS}}(x + s\rho(\theta), \theta) \\ &= u_{t,k}^{\text{MDAMS}}(x, \theta) - \int_0^s (\mu_k(x + \tau\rho(\theta)) + \nu_k(x + \tau\rho(\theta))) u_{t+\tau,k}^{\text{MDAMS}}(x + \tau\rho(\theta), \theta) d\tau \\ &\quad + \int_0^s \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \nu_k(x + \tau\rho(\theta)) \zeta(\theta|\theta_0) u_{t+\tau,k}^{\text{MDAMS}}(x + \tau\rho(\theta), \theta_0) d\theta_0 d\tau \\ &\quad + \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\rho(\theta)) d\tau \end{aligned}$$

für die Q -Dichte des zeitabhängigen Diffusionsmaßes im Modell MDAMS (mit k Gewebegruppen) und

$$\begin{aligned} &u_k^{\text{MDAMS}}(x + s\rho(\theta), \theta) \\ &= u_k^{\text{MDAMS}}(x, \theta) - \int_0^s (\mu_k(x + \tau\rho(\theta)) + \nu_k(x + \tau\rho(\theta))) u_k^{\text{MDAMS}}(x + \tau\rho(\theta), \theta) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^s \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \nu_k(x + \tau\rho(\theta)) \zeta(\theta|\theta_0) u_k^{\text{MDAMS}}(x + \tau\rho(\theta), \theta_0) d\theta_0 d\tau \\
& + \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\rho(\theta)) d\tau
\end{aligned}$$

für die Dichte des entsprechenden stationären Diffusionsmaßes,

- (MSA)

$$\begin{aligned}
u_{t+s}^{\text{MSA}}(x + s\rho(\theta), \theta) & = u_t^{\text{MSA}}(x, \theta) + \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\rho(\theta)) d\tau \\
& - \int_0^s \mu(x + \tau\rho(\theta)) u_{t+\tau}^{\text{MSA}}(x + \tau\rho(\theta), \theta) d\tau
\end{aligned}$$

für die Q -Dichte des zeitabhängigen Diffusionsmaßes im Modell MSA und

$$\begin{aligned}
u^{\text{MSA}}(x + s\rho(\theta), \theta) & = u^{\text{MSA}}(x, \theta) + \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\rho(\theta)) d\tau \\
& - \int_0^s \mu(x + \tau\rho(\theta)) u^{\text{MSA}}(x + \tau\rho(\theta), \theta) d\tau
\end{aligned}$$

für die Dichte des entsprechenden stationären Diffusionsmaßes,

- (MSAS)

$$\begin{aligned}
& u_{t+s}^{\text{MSAS}}(x + s\rho(\theta), \theta) \\
& = u_t^{\text{MSAS}}(x, \theta) + \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\rho(\theta)) d\tau - \int_0^s \left(\mu(x + \tau\rho(\theta)) u_{t+\tau}^{\text{MSAS}}(x + \tau\rho(\theta), \theta) \right. \\
& \quad \left. + \nu(x + \tau\rho(\theta)) u_{t+\tau}^{\text{MSAS},(1)}(x + \tau\rho(\theta), \theta) \right) d\tau \\
& + \int_0^s \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \nu(x + \tau\rho(\theta)) \zeta(\theta|\theta_0) u_{t+\tau}^{\text{MSAS},(1)}(x + \tau\rho(\theta), \theta_0) d\theta_0 d\tau
\end{aligned}$$

für die Q -Dichte des zeitabhängigen Diffusionsmaßes im Modell MSAS und

$$\begin{aligned}
& u^{\text{MSAS}}(x + s\rho(\theta), \theta) \\
& = u^{\text{MSAS}}(x, \theta) + \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\rho(\theta)) d\tau - \int_0^s \left(\mu(x + \tau\rho(\theta)) u^{\text{MSAS}}(x + \tau\rho(\theta), \theta) \right. \\
& \quad \left. + \nu(x + \tau\rho(\theta)) u^{\text{MSAS},(1)}(x + \tau\rho(\theta), \theta) \right) d\tau \\
& + \int_0^s \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \nu(x + \tau\rho(\theta)) \zeta(\theta|\theta_0) u^{\text{MSAS},(1)}(x + \tau\rho(\theta), \theta_0) d\theta_0 d\tau
\end{aligned}$$

für die Dichte des entsprechenden stationären Diffusionsmaßes,

- (MSAMS) und schließlich

$$\begin{aligned}
& u_{t+s}^{\text{MSAMS}}(x + s\rho(\theta), \theta) \\
& = u_t^{\text{MSAMS}}(x, \theta) - \int_0^s (\mu(x + \tau\rho(\theta)) + \nu(x + \tau\rho(\theta))) u_{t+\tau}^{\text{MSAMS}}(x + \tau\rho(\theta), \theta) d\tau \\
& + \int_0^s \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \nu(x + \tau\rho(\theta)) \zeta(\theta|\theta_0) u_{t+\tau}^{\text{MSAMS}}(x + \tau\rho(\theta), \theta_0) d\theta_0 d\tau \\
& + \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\rho(\theta)) d\tau
\end{aligned}$$

für die Q -Dichte des zeitabhängigen Diffusionsmaßes im Modell MSAMS und

$$\begin{aligned}
& u^{\text{MSAMS}}(x + s\rho(\theta), \theta) \\
= & u^{\text{MSAMS}}(x, \theta) - \int_0^s (\mu(x + \tau\rho(\theta)) + \nu(x + \tau\rho(\theta))) u^{\text{MSAMS}}(x + \tau\rho(\theta), \theta) d\tau \\
& + \int_0^s \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \nu(x + \tau\rho(\theta)) \zeta(\theta|\theta_0) u^{\text{MSAMS}}(x + \tau\rho(\theta), \theta_0) d\theta_0 d\tau \\
& + \int_0^s 2\lambda f(x + \tau\rho(\theta)) d\tau
\end{aligned}$$

für die Dichte des entsprechenden stationären Diffusionsmaßes.

8 Statistische Auswertung von PET-Daten

Nachdem wir nun den Diffusionsprozess in der PET vollständig und in Übereinstimmung mit der Transportgleichung modelliert haben, können wir uns im nächsten Schritt der statistischen Auswertung gewonnener Messdaten widmen. Die stationären Diffusionsmaße der zuvor vorgestellten Modelle erlauben uns die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit der Photonen-Messungen in den einzelnen Detektoren in Abhängigkeit von der Quelldichte f und den Ratenfunktionen μ und ν . Wir gehen in unserem Modell davon aus, dass ein aus dem Inneren des Scanners auf die Oberfläche eines Detektors treffendes Teilchen umgehend von diesem registriert wird. In der Realität sind die Detektoren dagegen dreidimensionale Gebilde mit unterschiedlich großer Sensitivität. Außerdem treten dort häufig zufällige Koinzidenzen (so genannte Randoms, die Hauptursache für Streuung innerhalb der Detektoren) auf. Diese Einflussgrößen werden wir an späterer Stelle durch Hinzufügen eines Fehlerterms im linearen Gleichungssystem für die Quelldichte berücksichtigen.

Wir beschreiben die Detektoren des PET-Scanners als Teilmengen der Oberfläche ∂C des PET-Zylinders. Ort und Richtung eines Teilchens, das im Detektor $A \subset \partial C$ registriert worden ist, liegen nach der Registrierung in einer durch A festgelegten Teilmenge $A' \subset C^c \times S^2$, die wir als den zu A gehörenden *Detektionsraum* bezeichnen. Wir definieren A' als

$$A' \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, \theta) \in C^c \times S^2 \mid \text{Der erste Schnittpunkt von } a \mapsto x - a\theta \text{ und } \partial C \text{ liegt in } A\}.$$

Außerhalb des Zylinders C findet in unserem Modell keine Absorption und Streuung statt, so dass im Gleichgewichtszustand des Diffusionsprozesses die erwartete Anzahl der in A registrierten Teilchen durch $\mathcal{D}^{\text{MSAMS}}(A')$ gegeben ist. Daher stellt der Quotient der Masse von A' geteilt durch die Masse der Gesamtheit sämtlicher zu den Detektoren gehörenden Detektionsräume die Wahrscheinlichkeit für eine Messung im Detektor A dar. Aus Vereinfachungsgründen verwenden wir im Folgenden die Bezeichnungen A, B sowohl für Detektoren als auch für ihre jeweiligen Detektionsräume. Wir schreiben also beispielsweise $\mathcal{D}(A)$ anstelle von $\mathcal{D}(A')$. Mit unseren bisherigen Ergebnissen sind wir in der Lage, eine Methode zur statistischen Datenauswertung für solche bildgebende Verfahren anzugeben, die auf der Registrierung einzelner Photonen (anstatt Photonenpaaren) basieren. Das berühmteste Beispiel für ein solches Verfahren ist die Single-Photon-Emissions-Computertomographie (SPECT).

8.1 Auswertung im Ein-Teilchen-Modell (SPECT)

In diesem Abschnitt entwickeln wir eine Methode zur Schätzung der unbekanntes λ^3 -Quelldichte f des in der SPECT verwendeten Tracers auf der Basis realer beziehungsweise simulierter Messdaten und der in den vorherigen Abschnitten entwickelten Diffusionsmaße. Die SPECT basiert auf dem Prinzip der Szintigrafie: Dem Patienten wird zu Beginn der Untersuchung genau wie bei der PET ein Radiopharmakon (ein Radionuklid oder

eine mit einem Radionuklid markierte Substanz) verabreicht. Das verwendete Radionuklid emittiert Gammastrahlung, die mithilfe von Gamma-Kameras detektiert wird. Eine oder mehrere solcher Kameras rotieren um den Körper und registrieren die emittierte Strahlung aus unterschiedlichen Richtungen. Dabei entstehen planare Aufnahmen (Projektionen), aus denen mithilfe inverser Radontransformation im zweiten Arbeitsschritt auf die Verteilung des Radiopharmakons im Körper des Patienten zurück geschlossen wird.

Der wesentliche technische Unterschied zur PET ist die Tatsache, dass hier einzelne Photonen (Gammateilchen) anstelle von Photonenpaaren registriert werden. Daher lassen sich im Gegensatz zur Auswertung von PET-Daten unsere Ergebnisse bezüglich des Diffusionsmodells bereits direkt anwenden. Wir können ohne weitere Vorarbeit ein Integralgleichungssystem für die unbekannte Quelldichte f des Tracers basierend auf einem beliebigen der zuvor entwickelten stationären Diffusionsmaße \mathcal{D} und der zugehörigen Q -Dichte $u(x, \theta)$ angeben. Für die Schätzung der unbekanntenen Quelldichte f wählen wir eine Vorgehensweise, die schon in der Arbeit [Nat1] angesprochen wurde: Wir ersetzen f durch die Dichte g_z der Annihilationsorte der Positronen (=Emissionsorte der Photonenpaare) bei Annahme einer Positronen-Punktquelle $z \in C$. Dabei bedienen wir uns einer bisher noch nicht berücksichtigten physikalischen Eigenschaft des Diffusionsprozesses: Nach seiner Emission legt ein Positron bis zur Annihilation eine kurze Wegstrecke zurück (Positronen-Reichweite). Dabei wird es mit so genannter Bremsstrahlung konfrontiert, die sein Energieniveau mit der Zeit auf wenige Elektronenvolt schrumpfen lässt. Dieser Vorgang verläuft relativ gleichmäßig und so lange, bis das Positron mit einem Elektron annihilieren kann. Die Reichweite der emittierten Positronen ist abhängig von ihrem Energieniveau (das bei unterschiedlichen Tracer-Substanzen variiert) und der Materialdichte des Untersuchungsmediums (vergleiche [Wer1]). Ausführliche Erläuterungen zum Positronen-Bremsprozess findet man unter anderem in der Arbeit [Hen2]. Für die Reichweite der Positronen wählen wir in Anlehnung an die Ergebnisse in [Wer1] eine $U(r, R)$ -Verteilung (Gleichverteilung auf dem Intervall (r, R) mit der abhängig von den oben genannten Faktoren minimalen Reichweite $r > 0$ und der maximale Reichweite $R > r$). Da wir davon ausgehen, dass keine Präferenzen für die Richtung der Positronen existieren, resultiert daraus die \mathbb{K}^3 -Dichte

$$g_z(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{1}_{K_R(z) \setminus K_r(z)}(x)}{\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)}$$

für den Emissionsort der Annihilationsphotonen, wobei $K_R(z)$ die Kugel mit Mittelpunkt z und Radius R bezeichne. Die *Quellverteilung* der Annihilationsphotonen ist also die Gleichverteilung auf der Kugelschale $K_R(z) \setminus K_r(z)$. Ebenfalls sinnvoll ist die Verwendung einer bivariaten Normalverteilung mit Mittelwert z und sehr kleiner Varianz für die Positronen-Annihilationsorte. In diesem Fall ist das Quadrat der Reichweite der Positronen (der Abstand vom Mittelwert der Normalverteilung) exponentialverteilt (vergleiche Kapitel 31 in [Als1]).

8.1.1 Entwicklung des Ein-Teilchen-Detektionsmodells

In den vorherigen Abschnitten haben wir unterschiedliche Diffusionsmaße auf der Basis der *Quelldichte* f des im Körper des Patienten verteilten Radiopharmakons bestimmt. Dabei haben wir die Reichweite der Positronen zunächst vernachlässigt. Die Quelldichte f repräsentiert dort sowohl die Dichte des Tracers (also die Dichte der Positronen-Emissionsorte) als auch die Dichte der Emissionsorte der Photonenpaare. Unter Berücksichtigung der Positronen-Reichweite müssen wir jedoch zwischen der Dichte f des Tracers und der *Dichte* \hat{f} der *Photonenpaar-Emissionsorte* unterscheiden. Für diese gilt mit obiger Notation offenbar

$$\hat{f}(x) = \int_C f(z)g_z(x) d\mathbb{L}^3(z).$$

Im umfassenden Modell MSAMS besitzt das stationäre Diffusionsmaß $\mathcal{D}^{\text{MSAMS}}$ die Q -Dichte

$$\begin{aligned} u^{\text{MSAMS}}(x, \theta) &= 2\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^u \int_0^{u-m_1} \cdots \int_0^{u-\sum_{i=1}^{n-1} m_i} \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \prod_{i=1}^{n-1} \zeta(\theta_{i+1}|\theta_i)\zeta(\theta|\theta_n) \\ &\quad I_n(u, x, m_1, \dots, m_n, \theta_1, \dots, \theta_n, \theta) \hat{f}\left(x - \left(u - \sum_{i=1}^n m_i\right)\theta - \sum_{i=1}^n m_i\theta_i\right) \\ &\quad d\Lambda(\theta_n) \cdots d\Lambda(\theta_1) dm_n \dots dm_1 du \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} &I_n(u, x, m_1, \dots, m_n, \theta_1, \dots, \theta_n, \theta) \\ \stackrel{\text{def}}{=} &\prod_{i=1}^n \left[\nu\left(x - \left(u - \sum_{j=1}^n m_j\right)\theta - \sum_{j=i+1}^n m_j\theta_j\right) \right. \\ &\left. \exp\left(-\int_0^{m_i} \alpha\left(x - \left(u - \sum_{j=1}^n m_j\right)\theta - \sum_{j=i+1}^n m_j\theta_j - v\theta_i\right) dv\right) \right] \\ &\exp\left(-\int_0^{u-\sum_{i=1}^n m_i} \alpha(x - v\theta) dv\right), \end{aligned}$$

wobei an $Q = \mathbb{L}^3 \otimes \Lambda$ und $\alpha = \mu + \nu$ erinnert sei. Durch Ersetzen der Photonenpaar-Quelldichte \hat{f} durch die Dichte g_z erhalten wir die Q -Dichte des stationären Diffusionsmaßes bei Restriktion auf die Positronen-Punktquelle z .

Im Folgenden bezeichne daher \mathcal{D} ein beliebiges der in den vorherigen Abschnitten entwickelten *stationären Diffusionsmaße* bei Annahme einer beliebigen stetigen Photonenpaar-Quelldichte \hat{f} . Wenn wir dagegen von einer konstanten Positronen-Punktquelle z ausgehen (was der Photonen-Quelldichte g_z entspricht), bezeichnen wir das zugehörige Diffusionsmaß mit \mathcal{D}_z . Seien u und u_z die entsprechenden Q -Dichten. Wie man leicht einsieht, gilt dann

$$u(x, \theta) = \int_C f(z)u_z(x, \theta) d\mathbb{L}^3(z).$$

Insbesondere basieren beide Dichten auf derselben Emissionsrate λ , was der natürlichen Anschauung zunächst zu widersprechen scheint, denn schließlich umfasst der Träger der

Dichte g_z nur einen sehr kleinen Abschnitt des PET-Zylinders. Die Unterschiede zwischen den absoluten Anzahlen der emittierten Teilchen in den beiden betrachteten Fällen sind jedoch in der Dichte f codiert, die bei obigem Maß-Mittel Verwendung findet. Im Gleichgewichtszustand des Systems und bei Annahme der Positronen-Punktquelle $z \in C$ ist die erwartete Anzahl der von einem bestimmten Detektor registrierten Teilchen gleich dem stationären Diffusionsmaß $\mathcal{D}_z(A)$ des zugehörigen Detektionsraumes A . Daher können wir für die unbekannte Quelldichte f des Tracers das Integralgleichungssystem

$$M(A) = \int f(z) \mathcal{D}_z(A) d\mathbb{K}^3(z), \quad A \in \mathbb{D}$$

aufstellen, wobei $M(A)$ die (gewonnene oder simulierte) Anzahl der Messungen im Detektor A und \mathbb{D} die Menge der Detektoren bezeichne. Durch Diskretisierung erhalten wir daraus ein lineares Gleichungssystem

$$m = Hf,$$

wobei die Systemmatrix H mithilfe der $\mathcal{D}_z(A)$ für alle Voxel $z \in C$ und Detektoren A gebildet wird und daher sämtliche Informationen bezüglich Absorption und Streuung enthält. Dieses Gleichungssystem kann mit den in der Einleitung dieser Arbeit vorgestellten Methoden OSEM, MLEM und KQS ausgewertet werden. Auf den genauen Ablauf der Diskretisierung gehen wir aufgrund der Zielsetzung dieser Arbeit erst weiter unten beim entsprechenden Integralgleichungssystem für die Auswertung von PET-Daten ein. Diese verläuft hier jedoch sehr ähnlich, so dass die Ergebnisse für das Gleichungssystem der PET-Daten ohne große Mühen auf den Fall der SPECT übertragen werden können.

8.1.2 Problematik des Ein-Teilchen-Modells

Bei der SPECT wird neben dem Detektionsort auch die Richtungsinformation der registrierten Teilchen verarbeitet. Dieses Vorgehen hat einen mathematischen Hintergrund: Die Messdaten, das heißt die Anzahl der registrierten Teilchen der einzelnen Detektoren, besitzen die Dimension 2 (Oberfläche des SPECT-Zylinders). Dagegen besitzt die zu schätzende Quelldichte f die Dimension 3 (das Innere des SPECT-Zylinders). Würde man sich also bei der Auswertung wie oben beschrieben nur auf den Detektionsort beschränken, so erhielte man ein stark unterbestimmtes lineares Gleichungssystem. Wir haben $|\mathbb{D}| = \mathcal{O}(n^2)$ Detektoren, teilen aber das Innere des Scanners bei dessen Diskretisierung in $\mathcal{O}(n^3)$ Voxel (repräsentiert durch entsprechende Punktquellen), für die wir die Dichte des Tracers statistisch schätzen wollen. Im Allgemeinen können wir also das Gleichungssystem ohne Berücksichtigung der Richtungsdaten der registrierten Teilchen nicht lösen. Im Zwei-Teilchen-Modell (PET) tritt dieses Problem dagegen nicht auf, da wir dort Messdaten von registrierten *Teilchenpaaren* (Koinzidenzen) zur Verfügung haben, deren Anzahl von der Ordnung $\mathcal{O}(n^4)$ ist. In diesem Fall erhalten wir nach der Diskretisierung des entsprechenden Integralgleichungssystems ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem für die Werte der Quelldichte in den $\mathcal{O}(n^3)$ Voxeln und damit eine mathematische gangbare Methode zur statistischen Schätzung.

8.2 Auswertung im Zwei-Teilchen-Modell (PET)

Bei der Entwicklung des Diffusionsmodells interessieren wir uns ausschließlich für die Bestimmung der absoluten erwarteten Anzahl von Annihilationsphotonen in (Q -messbaren) Teilbereichen des Raumes $\mathbb{R}^3 \times S^2$ (Dabei bildete \mathbb{R}^3 die Orts- und die Einheitssphäre S^2 die Richtungskomponente der beobachteten Photonen.). Zu diesem Zweck entwickelten wir stationäre Diffusionsmaße auf der Basis der Emissionsrate der Teilchen sowie der Absorptions- und Streuungsratenfunktion des Untersuchungsmediums und zeigten deren Kompatibilität mit der Transportgleichung der Teilchenphysik, welche die Diffusion von Photonen in leichten Medien physikalisch beschreibt. Um jedoch den auf Koinzidenzen basierenden Detektionsprozess der PET korrekt abbilden zu können, ist das alleinige Zählen der registrierten Teilchen unzureichend. Aus diesem Grund betrachten wir im Folgenden die *erwartete Anzahl von Teilchenpaaren* innerhalb von (Q^2 -messbaren) Teilmengen $A \times B \subset (\mathbb{R}^3 \times S^2)^2$ unter Berücksichtigung sämtlicher oben genannten physikalischen Effekte.

8.2.1 Ein Integralgleichungssystem zur Auswertung der Messdaten

Für die Auswertung von real gewonnenen oder simulierten PET-Messdaten benötigen wir zunächst weitere Vorarbeit: Die Anzahl der tatsächlich gemessenen Koinzidenzen für die Detektorenpaare $(A, B) \in \mathbb{D}$ bezeichnen wir mit $M(A, B)$. Die Menge \mathbb{D} enthalte dabei alle zulässigen Detektorenpaare, welche für PET-Scanner unterschiedlicher Bauart variieren kann. Ferner ersetzen wir die Quelldichte f durch die Dichte g_z der Annihilationsorte der Positronen (= Emissionsorte der Photonenpaare) bei Annahme einer Positronen-Punktquelle $z \in C$.

Für die tatsächlich gewonnenen Messdaten erhalten wir dadurch das Integralgleichungssystem

$$M(A, B) = \int_C f(z) M_z(A, B) d\mathbb{M}^3(z), \quad (A, B) \in \mathbb{D},$$

wobei $M_z(A, B)$ für die erwartete Anzahl der Messungen im Detektorenpaar (A, B) bei Annahme der Positronen-Punktquelle z steht. Durch Diskretisierung erhält man schließlich ein lineares Gleichungssystem

$$m = Hf$$

für die unbekannte Quelldichte f , dessen Systemmatrix H aus den $M_z(A, B)$ (für alle $z \in C$ und $(A, B) \in \mathbb{D}$) gebildet wird und sämtliche Informationen über Absorption und Streuung enthält. Die bisher in unserem Modell nicht berücksichtigte Streuung innerhalb der Detektoren, welche insbesondere bei PET-Scannern kleinerer Bauart (wie beispielsweise der Kleintier-PET-Scanner quadHIDAC) den größten Störfaktor darstellt, kann durch einen zusätzlichen Fehlerterm n modelliert werden. Man erhält dann das lineare Gleichungssystem

$$m = Hf + n.$$

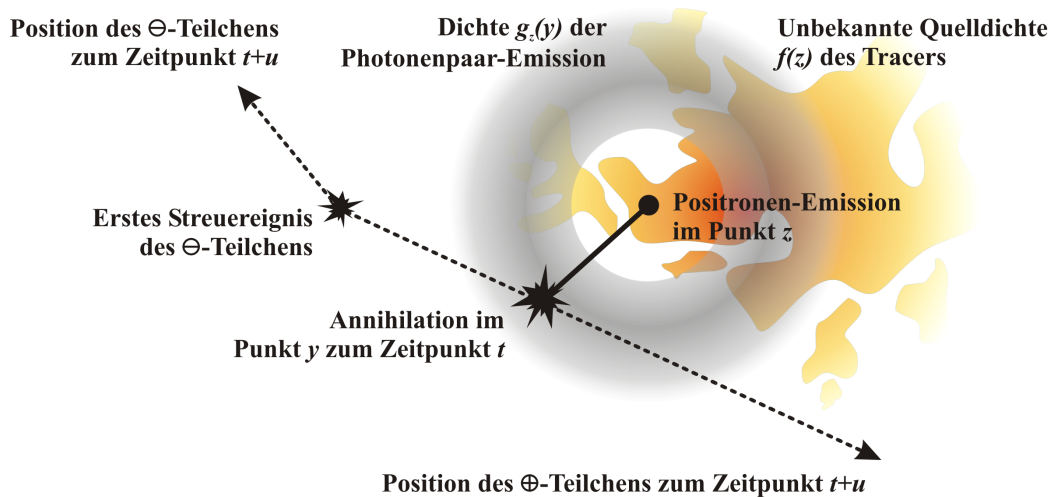


Abbildung 10: Zusammenhang zwischen der unbekanntem Quelldichte f der Positronen-Emissionen, der Dichte g_z der Emissionsorte der Annihilationsphotonen für die Positronen-Punktquelle z und dem Diffusionsprozess.

In der Regel wird hierbei von stochastisch unabhängigen, identisch normalverteilten Einträgen $n_1, \dots, n_{|\mathbb{D}|}$ ausgegangen (homoskedastisches lineares Modell).

Das größte noch zu lösende Modellierungsproblem beruht auf dem speziellen Prinzip der PET. Es werden nämlich nicht einzelne Teilchen, sondern jeweils Teilchenpaare registriert. In der Arbeit [Nat1] wird vermutet, dass die erwartete Anzahl $M_z(A, B)$ der Messungen für ein Detektorenpaar (A, B) durch $\mathcal{D}_z(A)\mathcal{D}_z(B)$ gegeben ist, da sich die Teilchen nach ihrer Emission unabhängig voneinander bewegen (Dabei bezeichne \mathcal{D}_z das stationäre Diffusionsmaß, bei dem wir anstelle der unbekanntem Quelldichte f die (bekannte) Dichte g_z der Photonen-Emissionen verwenden.). Die beiden Pfade eines Paares von Annihilationsphotonen sind jedoch stochastisch abhängig, da die Teilchen denselben Emissionsort und dieselbe Emissionszeit, sowie zu Beginn genau entgegengesetzte Richtungen besitzen. Am besten kann man dies anhand des einfachen Modells M ohne Streuung veranschaulichen, da hier der Emissionszeitpunkt, der Emissionsort und die Richtung des einen Teilchenpartners die Position und die Richtung des anderen Teilchenpartners bereits exakt festlegen. Bei der Bestimmung der erwarteten Anzahl $M_z(A, B)$ der Messungen für ein Detektorenpaar (A, B) müssen wir daher die stochastische Abhängigkeit der Pfade der einzelnen Teilchenpaare berücksichtigen.

8.2.2 Berechnung der erwarteten Anzahl von Teilchenpaaren bei gegebener Punktquelle

Grundlage für die Bestimmung der erwarteten Anzahl von Teilchenpaaren $M_z(A, B)$ sind unsere Ergebnisse bezüglich des (Ein-Teilchen-)Diffusionsmodells. Die direkte Verallgemei-

nerung auf ein Zwei-Teilchen-Modell geht mit einem enormen Anstieg der Komplexität einher, da wir ohne weitere Vorarbeit Terme erhalten würden, welche verglichen mit den ohnehin schon komplexen Q -Dichten $u(x, \theta)$ der stationären (Ein-Teilchen-)Diffusionsmaße die doppelte Anzahl von Integralen besitzen. Gerade bei den umfassenden Modellen mit mehrfacher Streuung ist dies im Hinblick auf die spätere numerische Auswertung kaum hinnehmbar. Um einen inakzeptablen Anstieg der Komplexität (und der benötigten Rechenzeit) zu vermeiden, werden wir zunächst ein wichtiges Zwischenergebnis herleiten: die mathematische Verschmelzung der beiden stochastisch abhängigen Pfade eines Teilchenpaares.

Als anschauliche Motivation betrachten wir die folgende Ausgangssituation: Ein im Punkt z in eine beliebige Richtung emittiertes Positron annihiliert zusammen mit einem Elektron im Punkt y innerhalb des Trägers von g_z und setzt dabei zwei sich in entgegengesetzte Richtungen bewegend Photonen frei. Diese durchwandern den PET-Zylinder gemäß des stochastischen Diffusionsmodells, bis sie auf ein zulässiges Detektorenpaar (A, B) treffen, das sie als Koinzidenz registriert. Sei $u > 0$ so gewählt, dass sich das Photonenpaar $\frac{u}{2}$ Zeiteinheiten nach seiner Emission in den jeweiligen Detektorräumen befindet. Gemäß unserem Diffusionsmodell werden beide Pfade mit $g_z(y)$ gewichtet. Zur Veranschaulichung dient die folgende Abbildung:

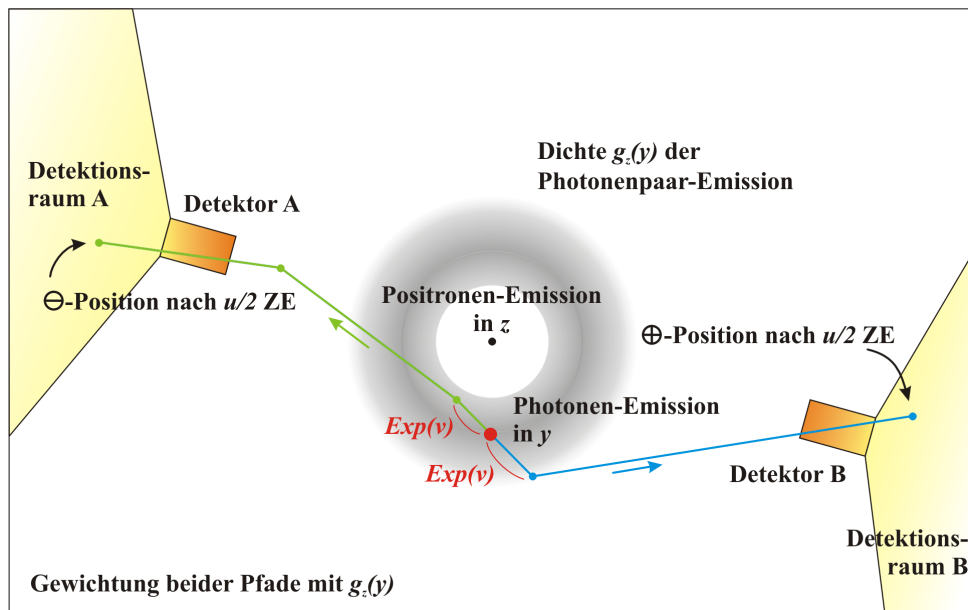


Abbildung 11: Die Pfade eines im Punkt y emittierten Teilchenpaares mit den ersten Teilchenlebensdauern bezüglich des Streuungsprozesses und ihrer Position nach $\frac{u}{2}$ Zeiteinheiten bei Annahme treppenförmiger Absorptionsraten- und Steuungsintensitätsfunktionen.

Die Pfade der beiden Teilchenpartner können wir als einen einzigen Pfad interpretieren, indem wir die folgenden Überlegungen anstellen: Aufgrund der Symmetrie des Diffusionsmodells gelten für beide Pfadrichtungen der gleiche Absorptions- und Streuungs-

prozess, da diese lediglich von den Pfadintegralen der Absorptionsratenfunktion μ beziehungsweise der Streuungsratenfunktion ν und der Verteilung der Streuwinkel abhängen, welche von der Flugrichtung der Teilchen unabhängig sind. Nach dem Umkehren einer der beiden Teilchenpfade lassen sich diese problemlos verbinden, da für beide Teilstücke die gleiche Dynamik des Diffusionsprozesses gilt. Im Fall von treppenförmigen Absorptionsraten- und Streuungsratenfunktionen nutzen wir im Verbindungspunkt der beiden Pfade die Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung (Eine Zufallsgröße X ist genau dann exponentialverteilt, wenn für alle $s, t > 0$ die Eigenschaft $\mathbb{P}(X - t > s | X > t) = \mathbb{P}(X > s)$ gilt (vergleiche Satz 31.6 in [Als1]).), um die jeweiligen beiden (Teil-)Lebensdauern des Absorptions- und des Streuungsprozesses beider ursprünglicher Teilchenpfade zu jeweils einer (Teil-)Lebensdauer zu verschmelzen. Mathematisch präzisiert wird dies durch die Rechnung am Ende des Abschnitts 8.2. Als Ergebnis erhalten wir einen Pfad der Länge u , der im Detektionsraum A startet, im Detektionsraum B endet und dessen Mittelpunkt y im Träger von g_z liegt. Dieser Pfad wird genau wie seine beiden Pfadkomponenten mit $g_z(y)$ gewichtet. Wir ordnen also jedem Pfadpaar den entsprechend der obigen Überlegung eindeutig bestimmten zusammengesetzten Pfad zu. Zur Veranschaulichung dieser Interpretation dient die folgende Abbildung:

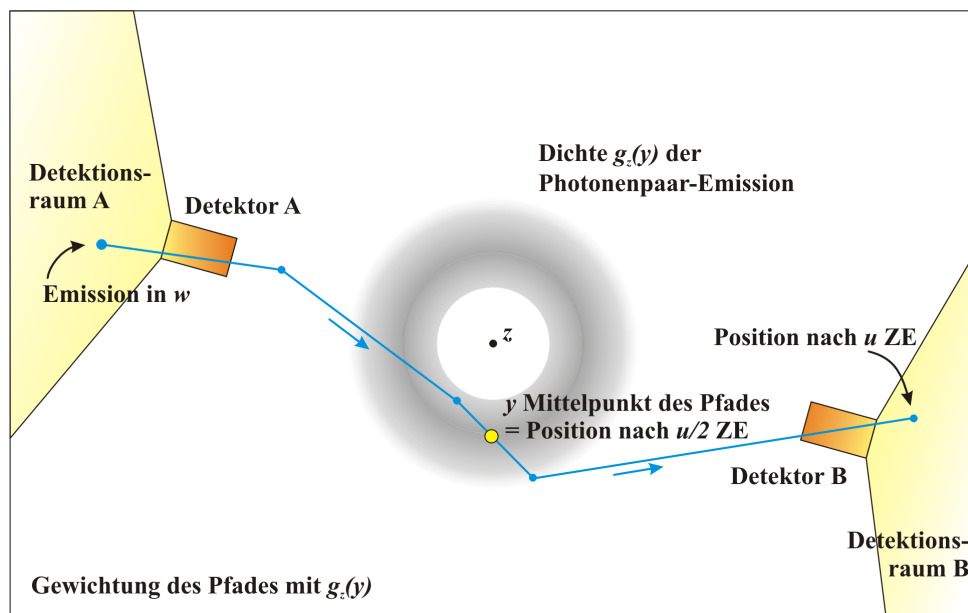


Abbildung 12: Interpretation der beiden Teilchenpfade als ein einzelner Teilchenpfad der Länge u mit Mittelpunkt y .

Die oben ausgeführte Überlegung werden wir im Folgenden mathematisch präzisieren. Obwohl wir uns letztendlich für die erwartete Anzahl $M_z(A, B)$ von Teilchenpaaren in (A, B) für das umfassende Modell MSAMS interessieren, betrachten wir aus Gründen der besseren Nachvollziehbarkeit zunächst die erwartete Anzahl $M_{z,t}^{\text{MAMS}}(A, B)$ von Teilchenpaaren in (A, B) zum Zeitpunkt $t > 0$ bei konstanter Positronenquelle $z \in C$ im Modell MAMS. Zur Erinnerung: Im Modell MAMS (vergleiche Abschnitt 3.5) ist zum Zeitpunkt $t > T_n$

die Position des n -ten \oplus - beziehungsweise \ominus -Teilchens gegeben durch

$$X_n^\pm(t) = X_n + \sum_{k=1}^{M_n^\pm(t-T_n)} \Delta S_{n,k}^\pm \Theta_{n,k-1}^\pm + (t - T_n - S_{n,M_n^\pm(t-T_n)}^\pm) \Theta_{n,M_n^\pm(t-T_n)}^\pm$$

und die Richtung durch

$$\Theta_n^\pm(t) = \Theta_{n,M_n^\pm(t-T_n)}^\pm.$$

Dabei ist $\Theta_{n,0}^\pm$ gleichverteilt auf S^2 die Richtung des n -ten \oplus - beziehungsweise \ominus -Teilchens unmittelbar nach der Emission mit $\Theta_{n,0}^- = -\Theta_{n,0}^+$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für die Teilchenprozesse $Y_n^\pm(t) = (X_n^\pm(t), \Theta_n^\pm(t))$ betrachten wir das zufällige Punktmaß

$$\mathcal{N}_{z,t}^{\text{MAMS}}(C) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{N(t)} \mathbf{1}_C(Y_n^+(t), Y_n^-(t)) \mathbf{1}_{(t-T_n, \infty)^2}(L_n^+, L_n^-),$$

auf $(\mathbb{R}^3 \times S^2)^2$ mit dem Emissionsprozess $(N(t))_{t>0}$, dem Ort $X_n^\pm(t)$ und der Richtung $\Theta_n^\pm(t)$ zum Zeitpunkt $t > 0$, sowie der Lebensdauer L_n^\pm bezüglich des Absorptionsprozesses des n -ten \oplus - beziehungsweise \ominus -Teilchens (für $n \in \mathbb{N}$). Durch Anwendung derselben Schlüsse wie im dritten Abschnitt auf den Teilchenprozess des \oplus -Teilchens erhalten wir

$$\begin{aligned} & M_{z,t}^{\text{MAMS}}(A, B) \\ &= 2 \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(t) = m) \mathbb{E}(\mathcal{N}_{z,t}^{\text{MAMS}}(A \times B) | N(t) = m) \\ &= 2 \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!} \sum_{n=1}^m \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A \times B}(Y_n^+(t), Y_n^-(t)) \mathbf{1}_{(t-T_n, \infty)^2}(L_n^+, L_n^-) | N(t) = m) \\ &= 2\lambda t \sum_{n=0}^{\infty} \left[\mathbb{P}\left(M^+(t-T) = n, \left(X + \sum_{k=1}^n \Delta S_k^+ \Theta_{k-1}^+ + (t-T - S_n^+) \Theta_n^+, \Theta_n^+\right) \in A, \right. \right. \\ & \quad \left. \left. L^+ > t-T, Y_n^-(t) \in B, L^- > t-T\right) \right] \\ &= 2\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t-u} \int_0^{t-u-m_1} \dots \int_0^{t-u-\sum_{k=1}^{n-1} m_k} \nu^n e^{-(\mu+\nu)(t-u)} \\ & \quad \mathbb{P}\left(\left(X + \sum_{k=1}^n m_k \Theta_{k-1}^+ + \left(t-u - \sum_{k=1}^n m_k\right) \Theta_n^+, \Theta_n^+\right) \in A, Y_n^-(t) \in B, L^- > t-T | T = u\right) \\ & \quad dm_n \dots dm_1 du. \\ &= 2\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t-u} \int_0^{t-u-m_1} \dots \int_0^{t-u-\sum_{k=1}^{n-1} m_k} \int_{S^2} \dots \int_{S^2} \nu^n e^{-(2\mu+\nu)(t-u)} \prod_{k=1}^{n-1} \zeta(\theta_{k+1} | \theta_k) \\ & \quad \zeta(\theta | \theta_n) \mathbb{P}\left(\left(X + \sum_{k=1}^n m_k \theta_k + \left(t-u - \sum_{k=1}^n m_k\right) \theta_{n+1}, \theta_{n+1}\right) \in A, Y_n^-(t) \in B | T = u\right) \\ & \quad d\Lambda(\theta) d\Lambda(\theta_n) \dots d\Lambda(\theta_1) dm_n \dots dm_1 du. \end{aligned}$$

Analoge Schlüsse für den Teilchenprozess des \ominus -Teilchens ergeben außerdem

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(\left(X + \sum_{k=1}^n m_k \theta_k + \left(t - u - \sum_{k=1}^n m_k\right) \theta_{n+1}, \theta_{n+1}\right) \in A, Y_n^-(t) \in B \mid T = u\right) \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \int_0^{t-u} \int_0^{t-u-q_1} \cdots \int_0^{t-u-\sum_{k=1}^{p-1} q_k} \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \nu^p e^{-\nu(t-u)} \prod_{k=1}^p \zeta(\vartheta_{k+1} | \vartheta_k) \\
& \mathbb{P}\left(\left(X + \sum_{k=1}^n m_k \theta_k + \left(t - u - \sum_{k=1}^n m_k\right) \theta_{n+1}, \theta_{n+1}\right) \in A, \right. \\
& \left. \left(X + \sum_{k=1}^p q_k \vartheta_k + \left(t - u - \sum_{k=1}^p q_k\right) \vartheta_{p+1}, \vartheta_{p+1}\right) \in B\right) \\
& d\Lambda(\vartheta_{p+1}) \dots d\Lambda(\vartheta_1) dq_n \dots dq_1,
\end{aligned}$$

womit wir schließlich (nach Substitution $t - u \mapsto u$)

$$\begin{aligned}
& M_{z,t}^{\text{MAMS}}(A, B) \\
&= 2\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \int_A \int_0^t \int_0^u \int_0^{u-m_1} \cdots \int_0^{u-\sum_{k=1}^{n-1} m_k} \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \int_0^u \int_0^{u-q_1} \cdots \int_0^{u-\sum_{k=1}^{p-1} q_k} \\
& \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \nu^{n+p} e^{-2(\mu+\nu)u} \prod_{k=1}^{n-1} \zeta(\theta_{k+1} | \theta_k) \zeta(\theta | \theta_n) \prod_{k=1}^p \zeta(\vartheta_{k+1} | \vartheta_k) \\
& g_z\left(x - \sum_{k=1}^n m_k \theta_k - \left(u - \sum_{k=1}^n m_k\right) \theta\right) \mathbf{1}_B\left(x - \sum_{k=1}^n m_k \theta_k - \left(u - \sum_{k=1}^n m_k\right) \theta\right) \\
& + \sum_{k=1}^p q_k \vartheta_k + \left(u - \sum_{k=1}^p q_k\right) \vartheta_{p+1}, \vartheta_{p+1}) d\Lambda(\vartheta_{p+1}) \dots d\Lambda(\vartheta_1) dq_n \dots dq_1 \\
& d\Lambda(\theta_n) \dots d\Lambda(\theta_1) dm_n \dots dm_1 du dQ(x, \theta)
\end{aligned}$$

erhalten. Zum besseren Verständnis geben wir an dieser Stelle einige Erläuterungen: In obigem Term betrachten wir die beiden Pfade eines Teilchenpaares der Länge $u \in (0, t)$, welche durch den gemeinsamen Startpunkt

$$x - \sum_{k=1}^n m_k \theta_k - \left(u - \sum_{k=1}^n m_k\right) \theta,$$

die anfängliche Flugrichtung θ_1 beziehungsweise $\vartheta_1 = -\theta_1$, die jeweilige Anzahl der Streuereignisse n beziehungsweise p , die Länge der Zwischenstreuzeiten m_1, \dots, m_n beziehungsweise q_1, \dots, q_p und die Richtungen unmittelbar nach den entsprechenden Streuereignissen $\theta_2, \dots, \theta_n, \theta$ beziehungsweise $\vartheta_2, \dots, \vartheta_{p+1}$ eindeutig festgelegt sind. Wir definieren die entsprechenden Pfadfunktionen $\gamma^+ = \gamma_{x,u,n,m_1,\dots,m_n,\theta_1,\dots,\theta_n,\theta}^+ : (0, u) \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\gamma^- = \gamma_{\gamma^+(0),u,p,q_1,\dots,q_p,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{p+1}}^- : (0, u) \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$\gamma^+(y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x - \sum_{k=1}^n m_k \theta_k - (u - \sum_{k=1}^n m_k) \theta + y \theta_1 & , y \in [0, m_1] \\ x - \sum_{k=2}^n m_k \theta_k - (u - \sum_{k=1}^n m_k) \theta + (y - m_1) \theta_2 & , y \in [m_1, m_1 + m_2] \\ \vdots & \\ x - (u - \sum_{k=1}^n m_k) \theta + (y - \sum_{k=1}^n m_k) \theta & , y \in [\sum_{k=1}^n m_k, u] \end{cases}$$

und

$$\gamma^-(y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \gamma^+(0) + y \vartheta_1 & , y \in [0, q_1] \\ \gamma^+(0) + q_1 \vartheta_1 + (y - q_1) \vartheta_2 & , y \in [q_1, q_1 + q_2] \\ \vdots & \\ \gamma^+(0) + \sum_{k=1}^p q_k \vartheta_k + (y - \sum_{k=1}^p q_k) \vartheta_{p+1} & , y \in [\sum_{k=1}^p q_k, u]. \end{cases}$$

Insbesondere sind also die Startpunkte beziehungsweise Endpunkte der Pfade durch $\gamma^\pm(0)$ beziehungsweise $\gamma^\pm(u)$ gegeben. Mit dieser Notation können wir obigen Term für die erwartete Anzahl von Teilchenpaaren vereinfachen zu

$$\begin{aligned} & M_{z,t}^{\text{MAMS}}(A, B) \\ &= 2\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \int_A \int_0^t \int_0^u \int_0^{u-m_1} \cdots \int_0^{u-\sum_{k=1}^{n-1} m_k} \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \int_0^u \int_0^{u-q_1} \cdots \int_0^{u-\sum_{k=1}^{p-1} q_k} \\ & \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \nu^{n+p} e^{-2(\mu+\nu)u} \prod_{k=1}^{n-1} \zeta(\theta_{k+1}|\theta_k) \zeta(\theta|\theta_n) \prod_{k=1}^p \zeta(\vartheta_{k+1}|\vartheta_k) g_z(\gamma^+(0)) \mathbf{1}_B(\gamma^-(u)) \\ & d\Lambda(\vartheta_{p+1}) \dots d\Lambda(\vartheta_1) dq_n \dots dq_1 d\Lambda(\theta_n) \dots d\Lambda(\theta_1) dm_n \dots dm_1 du dQ(x, \theta). \end{aligned}$$

Die jeweiligen Pfade eines Teilchenpaares interpretieren wir nun als einen Pfad der Länge $2u$ mit Startpunkt in

$$\gamma^-(u) = x - \sum_{k=1}^n m_k \theta_k - \left(u - \sum_{k=1}^n m_k\right) \theta + \sum_{k=1}^p q_k \vartheta_k + \left(u - \sum_{k=1}^p q_k\right) \vartheta_{p+1} \in B,$$

Mittelpunkt in

$$\gamma^+(0) = \gamma^-(0) = x - \sum_{k=1}^n m_k \theta_k - \left(u - \sum_{k=1}^n m_k\right) \theta$$

und Endpunkt in $\gamma^+(u) = x \in A$. Dafür kombinieren wir die beiden Summen über die Anzahl n beziehungsweise p der Streueignisse der jeweiligen Teilchenpfade zu einer einzigen Summe über die Anzahl der Streueignisse des zusammengesetzten Pfades. Man beachte, dass wir die Summen (wegen $M_{z,t}^{\text{MAMS}}(A, B) \geq 0$ und fast sicher endlich) beliebig vertauschen und zusammenfassen können. Unter Beachtung der Tatsache, dass zum Zeitpunkt $t > 0$ die Länge des zusammengesetzten Pfades maximal $2t$ betragen kann, substituieren

wir im ersten Schritt $2u \mapsto u$ und erhalten

$$\begin{aligned}
& M_{z,t}^{\text{MAMS}}(A, B) \\
&= 2\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \int_A \int_0^{2t} \int_0^{\frac{u}{2}} \int_0^{\frac{u}{2}-m_1} \cdots \int_0^{\frac{u}{2}-\sum_{k=1}^{n-1} m_k} \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \int_0^{\frac{u}{2}} \int_0^{\frac{u}{2}-q_1} \cdots \int_0^{\frac{u}{2}-\sum_{k=1}^{p-1} q_k} \\
& \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \nu^{n+p} e^{-(\mu+\nu)u} \prod_{k=1}^{n-1} \zeta(\theta_{k+1}|\theta_k) \zeta(\theta|\theta_n) \prod_{k=1}^p \zeta(\vartheta_{k+1}|\vartheta_k) g_z(\gamma^+(0)) \mathbf{1}_B(\gamma^-(\frac{u}{2})) \\
& d\Lambda(\vartheta_{p+1}) \dots d\Lambda(\vartheta_1) dq_n \dots dq_1 d\Lambda(\theta_n) \dots d\Lambda(\theta_1) dm_n \dots dm_1 du dQ(x, \theta),
\end{aligned}$$

wobei die Länge der beiden Einzelpfade nun $\frac{u}{2}$ und die Länge des zusammengesetzten Pfades nun u beträgt. Durch die Substitution wird also in obigen Definitionen der beiden Pfadfunktionen ebenfalls u durch $\frac{u}{2}$ ersetzt, so dass insbesondere die Endpunkte der Pfade nun durch $\gamma^+(\frac{u}{2})$ und $\gamma^-(\frac{u}{2})$ gegeben sind.

Im nächsten Schritt definieren wir für den zusammengesetzten Pfad $\gamma : (0, u) \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\gamma(y) = \begin{cases} \gamma^-(\frac{u}{2} - y) & y \in (0, \frac{u}{2}) \\ \gamma^+(y - \frac{u}{2}) & y \in (\frac{u}{2}, u) \end{cases}$$

die Zwischenstreuzeiten s_1, \dots, s_{m+1} , die Startrichtung φ_1 und die Richtungen $\varphi_2, \dots, \varphi_{m+1}$ unmittelbar nach den Streueignissen (für $m = n + p$). Wir setzen

$$\begin{aligned}
\varphi_k &= -\vartheta_{p+1-(k-1)} \quad \text{für } k = 1, \dots, p, \\
\varphi_{p+1} &= \theta_1 = -\vartheta_1, \\
\varphi_{p+k} &= \theta_k \quad \text{für } k = 2, \dots, n, \\
\varphi &= \theta, \\
s_1 &= \frac{u}{2} - \sum_{k=1}^p q_k, \\
s_k &= q_{p-(k-2)} \quad \text{für } k = 2, \dots, p, \\
s_{p+1} &= q_1 + m_1, \\
s_{p+k} &= m_k \quad \text{für } k = 2, \dots, n,
\end{aligned}$$

und erhalten mit $\varphi = \varphi_{m+1}$

$$\begin{aligned}
& M_{z,t}^{\text{MAMS}}(A, B) \\
&= 2\lambda \sum_{m=0}^{\infty} \int_A \int_0^{2t} \int_0^u \int_0^{u-s_1} \cdots \int_0^{u-\sum_{k=1}^{m-1} s_k} \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \nu^m e^{-(\mu+\nu)u} \prod_{k=1}^{m-1} \zeta(\varphi_{k+1}|\varphi_k) \quad (9) \\
& \zeta(\varphi|\varphi_m) g_z(\gamma(\frac{u}{2})) \mathbf{1}_B(\gamma(0)) d\Lambda(\varphi_m) \dots d\Lambda(\varphi_1) ds_n \dots ds_1 du dQ(x, \varphi).
\end{aligned}$$

Dabei sei die Pfadfunktion $\gamma = \gamma_{x,u,m,s_1,\dots,s_m,\varphi_1,\dots,\varphi_m,\varphi} : [0, u] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\gamma(y) = \begin{cases} x - \sum_{k=1}^m s_k \varphi_k - (u - \sum_{k=1}^m s_k) \varphi + y \varphi_1 & , y \in [0, s_1] \\ x - \sum_{k=2}^m s_k \varphi_k - (u - \sum_{k=1}^m s_k) \varphi + (y - s_1) \varphi_2 & , y \in [s_1, s_1 + s_2] \\ \vdots & \\ x - (u - \sum_{k=1}^m s_k) \varphi + (y - \sum_{k=1}^m s_k) \varphi & , y \in [\sum_{k=1}^m s_k, u]. \end{cases}$$

Insbesondere gilt also $\gamma(\frac{u}{2}) = \gamma^+(0) = \gamma^-(0)$, $\gamma(0) = \gamma^-(\frac{u}{2})$ und $\gamma(u) = x$. Um sich von der Richtigkeit dieser Gleichung zu überzeugen, beachte man $-\Theta \sim \Theta$ (für Θ gleichverteilt auf S^2), $\zeta(-\theta_{k+1} | -\theta_k) = \zeta(\theta_{k+1} | \theta_k)$ und die Bijektivität der Abbildung, welche den beiden Pfaden eines Teilchenpaares den entsprechenden zusammengesetzten Pfad gemäß obiger Interpretation der Zwischenstreuzeiten und der Richtungen unmittelbar nach den Streuereignissen zuordnet. Zum besseren Verständnis der Umsortierung der Doppelsumme über die Anzahlen der Streuereignisse auf den beiden ursprünglichen Pfaden zur Summe über die Anzahl der Streuereignisse auf dem zusammengesetzten Pfad geben wir die folgende Rechnung an: Seien $(M^\pm(t))_{t>0}$ stochastisch unabhängige Streuungsprozesse mit Streuungsrate $\nu > 0$ und $(L_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Familie von stochastisch unabhängigen identisch $Exp(\nu)$ -verteilten Zufallsgrößen. Dann gilt für ein beliebiges $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^m \mathbb{P}(M^+(2u) = m | M^+(u) = n) \\
= & \sum_{n=0}^m \mathbb{P}\left(L_1 \leq u, L_2 \leq u - L_1, \dots, L_n \leq u - \sum_{i=1}^{n-1} L_i, L_{n+1} > u - \sum_{i=1}^n L_i, \right. \\
& L_{n+1} - \left(u - \sum_{i=1}^n L_i\right) \leq u, L_{n+2} - \left(u - \sum_{i=1}^n L_i\right) \leq u - L_{n+1}, \dots, \\
& L_m - \left(u - \sum_{i=1}^n L_i\right) \leq u - \sum_{i=1}^{m-n-1} L_{n+i}, L_{m+1} - \left(u - \sum_{i=1}^n L_i\right) > u - \sum_{i=1}^{m-n} L_{n+i} \Big) \\
= & \sum_{n=0}^m \mathbb{P}\left(L_1 \leq u, L_2 \leq u - L_1, \dots, L_n \leq u - \sum_{i=1}^{n-1} L_i, L_{n+1} - \left(u - \sum_{i=1}^n L_i\right) \leq u, \right. \\
& L_{n+2} - \left(u - \sum_{i=1}^n L_i\right) \leq u - L_{n+1}, \dots, L_m - \left(u - \sum_{i=1}^n L_i\right) \leq u - \sum_{i=1}^{m-n-1} L_{n+i}, \\
& L_{m+1} - \left(u - \sum_{i=1}^n L_i\right) > u - \sum_{i=1}^{m-n} L_{n+i} \Big| L_{n+1} > u - \sum_{i=1}^n L_i \Big) \mathbb{P}\left(L_{n+1} > u - \sum_{i=1}^n L_i\right) \\
= & \sum_{n=0}^m \mathbb{P}\left(L_1 \leq u, L_2 \leq u - L_1, \dots, L_n \leq u - \sum_{i=1}^{n-1} L_i, L_{n+1} \leq u, L_{n+2} \leq u - L_{n+1}, \right. \\
& \dots, L_m \leq u - \sum_{i=1}^{m-n-1} L_{n+i}, L_{m+1} > u - \sum_{i=1}^{m-n} L_{n+i} \Big) \mathbb{P}\left(L_{n+1} > u - \sum_{i=1}^n L_i\right) \\
= & \sum_{n=0}^m \mathbb{P}(M^+(u) = n, M^-(u) = m - n) \\
= & \sum_{n=0}^m \int_0^u \int_0^{u-s_1} \dots \int_0^{u-\sum_{i=1}^{n-1} s_i} \int_0^u \int_0^{u-s_{n+1}} \dots \int_0^{u-\sum_{i=1}^{m-n-1} s_{n+i}} \nu^{n+m-n} e^{-\nu \sum_{i=1}^n s_i} \\
& e^{-\nu(u-\sum_{i=1}^n s_i)} e^{-\nu \sum_{i=1}^{m-n} s_{n+i}} e^{-\nu(u-\sum_{i=1}^{m-n} s_{n+i})} ds_m, \dots, ds_1 \\
= & \sum_{n=0}^m \int_0^u \int_0^{u-s_1} \dots \int_0^{u-\sum_{i=1}^{n-1} s_i} \int_0^u \int_0^{u-s_{n+1}} \dots \int_0^{u-\sum_{i=1}^{m-n-1} s_{n+i}} \nu^m e^{-2\nu u} ds_m, \dots, ds_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^m \int_0^u \int_{s_1}^u \cdots \int_{\sum_{i=1}^{n-1} s_i}^u \int_u^{2u} \int_{s_{n+1}}^{2u} \cdots \int_{\sum_{i=1}^{m-n-1} s_{n+i}}^{2u} \nu^m e^{-2\nu u} ds_m, \dots, ds_1 \\
&= \int_0^{2u} \int_{s_1}^{2u} \cdots \int_{\sum_{i=1}^{m-1} s_i}^{2u} \nu^m e^{-2\nu u} ds_m, \dots, ds_1 \\
&= \int_0^{2u} \int_0^{2u-s_1} \cdots \int_0^{2u-\sum_{i=1}^{m-1} s_i} \nu^m e^{-2\nu u} ds_m, \dots, ds_1 \\
&= \mathbb{P}(M^+(2u) = m),
\end{aligned}$$

wobei wir für die dritte Gleichheit die Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung verwendet haben.

Der Term (9) unterscheidet sich nicht wesentlich von dem des (Ein-Teilchen-)Diffusionsmaßes $\mathcal{D}_{t,z}^{\text{MAMS}}(A)$. Es wird lediglich anstatt mit dem Wert von f mit dem Wert von g_z im Pfadmittelpunkt $\frac{u}{2}$ gewichtet und der Integrand durch den Indikator $\mathbf{1}_B(\gamma(0))$ ergänzt. Daher können wir analog zu den Überlegungen bezüglich des Diffusionsmodells in den vorangegangenen Abschnitten den Limes für $t \rightarrow \infty$ betrachten und die Formel auf den Fall des Modells MSAMS mit stetigen Absorptions- und Streuungsratenfunktionen μ und ν verallgemeinern, wodurch wir schließlich für die erwartete Anzahl $M_z^{\text{MSAMS}}(A, B)$ von Teilchenpaaren in (A, B) im Modell MSAMS mit Positronen-Punktquelle $z \in C$ die Formel

$$\begin{aligned}
&M_z^{\text{MSAMS}}(A, B) \\
&= 2\lambda \sum_{m=0}^{\infty} \int_A \int_0^{\infty} \int_0^u \int_0^{u-s_1} \cdots \int_0^{u-\sum_{k=1}^{m-1} s_k} \int_{S^2} \cdots \int_{S^2} \prod_{k=1}^{m-1} \zeta(\varphi_{k+1}|\varphi_k) \zeta(\varphi|\varphi_m) \\
&\quad I_m(x, u, s_1, \dots, s_m, \varphi_1, \dots, \varphi_m, \varphi) g_z(\gamma(\frac{u}{2})) \mathbf{1}_B(\gamma(0)) d\Lambda(\varphi_m) \dots d\Lambda(\varphi_1) \\
&\quad ds_n \dots ds_1 du dQ(x, \varphi)
\end{aligned}$$

mit dem durch Absorption und Streuung bedingten Term

$$\begin{aligned}
&I_m(x, u, s_1, \dots, s_m, \varphi_1, \dots, \varphi_m, \varphi) \\
&\stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^m \left[\nu \left(x - \left(u - \sum_{j=1}^m s_j \right) \varphi - \sum_{j=i+1}^m s_j \varphi_j \right) \right. \\
&\quad \left. \exp \left(- \int_0^{s_i} \alpha \left(x - \left(u - \sum_{j=1}^m s_j \right) \varphi - \sum_{j=i+1}^m s_j \varphi_j - v \varphi_i \right) dv \right) \right] \\
&\quad \exp \left(- \int_0^{u-\sum_{i=1}^m s_i} \alpha(x - v\varphi) dv \right)
\end{aligned}$$

erhalten. Für die übrigen in den vorherigen Abschnitten vorgestellten Modelle lassen sich auf ähnliche Weise ebenfalls Formeln für die erwartete Anzahl von Teilchenpaaren ermitteln.

8.3 Aufstellung des linearen Gleichungssystems für die zu bestimmende Quelldichte

Der letzte Schritt in Richtung eines statistischen Auswertungsverfahrens stellt die Aufstellung der benötigten Systemmatrix beziehungsweise des zugehörigen linearen Gleichungssystems dar. Dafür segmentieren wir den \mathbb{R}^2 (im zweidimensionalen Fall) beziehungsweise \mathbb{R}^3 (im dreidimensionalen Fall) in eine Menge \mathcal{W} von disjunkten Pixeln beziehungsweise Voxeln. Allen Modellen gemein ist das Integralgleichungssystem

$$M(A, B) = \int_C f(z) M_z(A, B) d\mathbb{K}^3(z), \quad (A, B) \in \mathbb{D} \quad (10)$$

für die unbekannte Quelldichte f (wobei im zweidimensionalen Fall \mathbb{K}^3 durch \mathbb{K}^2 ersetzt wird). Daraus resultiert nach Diskretisierung das lineare Gleichungssystem

$$M(A, B) = \sum_{v \in \mathcal{V}} f_v M_v(A, B), \quad (A, B) \in \mathbb{D},$$

wobei $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$ die Menge der Pixel beziehungsweise Voxel innerhalb des PET-Zylinders C und $M_v(A, B)$ die erwartete Anzahl der im Detektorenpaar (A, B) registrierten Teilchenpaare bei Annahme einer Positronen-Punktquelle im Pixel beziehungsweise Voxel v bezeichnen. Für die verschiedenen zuvor entwickelten Diffusionsmodelle unterscheiden sich die entsprechenden Gleichungssysteme durch die Koeffizienten $(M_v(A, B))_{v \in \mathcal{V}, (A, B) \in \mathbb{D}}$ der Systemmatrix, die wir im Folgenden zunächst für das Modell MSAS mit einfacher Streuung im zweidimensionalen Fall bestimmen wollen. In diesem ist die Komplexität noch weitgehend überschaubar. Dennoch ist es für die Praxis bereits relevant (Man vergleiche die Ausführungen zum 2D-Messmodus im zweiten Abschnitt dieser Arbeit.).

8.3.1 Bestimmung der Systemmatrix für das Modell MSAS im zweidimensionalen Fall

Beim Modell MSAS im zweidimensionalen Fall (2D-MSAS) mit Positronen-Punktquelle $z \in C$ besitzt die erwartete Anzahl $M_{z,t}^{\text{MSAS}}(A, B)$ von Teilchenpaaren in (A, B) zum Zeitpunkt $t > 0$ die Gestalt

$$\begin{aligned} & M_{z,t}^{\text{MSAS}}(A, B) \\ &= 2\lambda \int_A \int_0^{2t} \exp\left(-\int_0^u \mu(x - v\rho(\varphi)) + \nu(x - v\rho(\varphi)) dv\right) g_z\left(x - \frac{u}{2}\rho(\varphi)\right) \\ & \quad \mathbf{1}_B(x - u\rho(\varphi)) du dQ(x, \varphi) \\ &+ 2\lambda \int_A \int_0^{2t} \int_0^u \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \nu(x - (u-s)\rho(\varphi)) \exp\left(-\int_0^{u-s} \mu(x - v\rho(\varphi)) dv\right) \\ & \quad \exp\left(-\int_0^s \alpha(x - (u-s)\rho(\varphi) - v\rho(\varphi_1)) dv\right) \zeta(\varphi|\varphi_1) g_z(d_{x,u,\varphi_1,\varphi}(s)) \\ & \quad \mathbf{1}_B(x - s\rho(\varphi_1) - (u-s)\rho(\varphi)) d\varphi_1 ds du dQ(x, \varphi) \end{aligned}$$

mit dem Mittelpunkt $d_{x,u,\varphi_1,\varphi} : [0, u] \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$d_{x,u,\varphi_1,\varphi}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x - \frac{u}{2}\rho(\varphi) & \text{falls } s \in [0, \frac{u}{2}] \\ x - (u-s)\rho(\varphi) - (s - \frac{u}{2})\rho(\varphi_1) & \text{falls } s \in [\frac{u}{2}, u] \end{cases}$$

des betrachteten gestreuten Pfades, wobei an $\rho : [0, 2\pi] \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$, $\rho(x) = (\cos(x), \sin(x))$ erinnert sei. Wir lassen jetzt also nur noch maximal ein Streuereignis auf dem zusammengesetzten Pfad zu. Die Fälle mit mehrfacher Streuung werden durch das Modell MSAMS abgedeckt. Es sei ferner an $Q = \lambda^2 \otimes U(0, 2\pi)$ (mit der Gleichverteilung $U(0, 2\pi)$ auf dem Intervall $(0, 2\pi)$) und $\zeta(\varphi|\varphi_1) = \pi h(\arccos(\langle \rho(\varphi_1), \rho(\varphi) \rangle)) = \pi h(\phi_{\varphi_1,\varphi})$ (mit dem (Streu-) Winkel $\phi_{\varphi_1,\varphi} \in [0, \pi]$ zwischen den Vektoren $\rho(\varphi_1)$ und $\rho(\varphi)$) und der Dichte h der Streuwinkelverteilung erinnert. Wegen des auftretenden Integrals über den Detektionsraum $A \subset C^c \times [0, 2\pi]$ ist dieser Ausdruck im Hinblick auf die numerische Implementierung zu unhandlich. Man beachte, dass sich emittierte Photonen (welche sich mit Lichtgeschwindigkeit fortbewegen) innerhalb der Systemzeit $t > 0$ sehr weit vom PET-Scanner entfernen können und diese sämtlich bei der Berechnung von $M_{z,t}^{\text{MSAS}}(A, B)$ berücksichtigt werden (Der Detektionsraum A ist nicht beschränkt.). Daher ist eine direkte numerische Implementierung des obigen Ausdrucks nicht möglich. Im Hinblick auf die Vorgehensweise der etablierten bildgebenden Verfahren, die sämtlich auf der Auswertung von Linienintegralen der zulässigen Koinzidenzlinien des PET-Scanners basieren (vergleiche die Ausführungen im einleitenden Kapitel dieser Arbeit), benötigen wir eine mathematische Verbindung zwischen eben jener klassischen Vorgehensweise und dem umfassenden Diffusionsmodell.

Die den nachfolgenden Ausführungen zu Grunde liegende Idee ist einfach: Da in unserem Modell außerhalb des PET-Scanners weder Absorption noch Streuung stattfindet, können wir uns bei der Betrachtung der Teilchenpfade auf das Verhalten innerhalb des Scanners beschränken, wodurch die unhandlichen Detektionsräume nicht mehr benötigt werden. Hieraus resultiert lediglich eine Umskalierung der Größen $(M_{z,t}^{\text{MSAS}}(A, B))_{z \in C, (A,B) \in \mathbb{D}}$, wodurch kein Informationsverlust entsteht. Zur mathematischen Präzisierung benötigen wir zunächst ein Modell des PET-Scanners, den wir uns im zweidimensionalen Fall kreisförmig vorstellen. Abhängig von dessen tatsächlicher Größe und der Geschwindigkeit der Photonen (welche wir im dritten Kapitel dieser Arbeit auf 1 normiert haben) beschreiben wir den Scanner durch das Innere des Kreises $C = K_{\frac{d}{2}}(0)$ mit Mittelpunkt 0 und Durchmesser $d > 0$ und seine Detektoren durch eine Segmentierung des Kreisrandes $\partial K_{\frac{d}{2}}(0) = \text{Im}(x \mapsto \frac{d}{2}\rho(x) | x \in [0, 2\pi])$ (wobei mit Im die Bildmenge einer Abbildung bezeichnet sei). Beim Vorliegen von n gleichgroßen und gleichmäßig angeordneten Detektoren teilen wir den Kreisrand entsprechend in n gleichförmige Teilstücke auf. Für die Detektoren $(D_j)_{j=1,\dots,n}$ gilt dann

$$D_j \stackrel{\text{def}}{=} \text{Im}\left(x \mapsto \frac{d}{2}\rho(x) \mid x \in \left[\frac{2\pi(j-1)}{n}, \frac{2\pi j}{n}\right)\right).$$

Als nächstes wenden wir uns den unhandlichen Detektionsräumen zu. Bezeichne A_j den Detektionsraum des Detektors D_j für ein $j \in \{1, \dots, n\}$. Dieser lässt sich wie folgt disjunkt

zerlegen: Es gilt

$$\begin{aligned}
& A_j \\
&= \{(x, \varphi) \in C^c \times [0, 2\pi) \mid \text{Erster Schnitt von } a \mapsto x - a\rho(\varphi) \text{ und } \partial C \text{ liegt in } D_j, a > 0\} \\
&= \bigcup_{w \in [\frac{2\pi(j-1)}{n}, \frac{2\pi j}{n})} \left\{ (x, \varphi) \in C^c \times [0, 2\pi) \mid \text{Erster Schnitt von } 0 < a \mapsto x - a\rho(\varphi) \text{ und } \partial C \text{ ist} \right. \\
&\quad \left. \frac{d}{2}\rho(w) \right\} \\
&= \bigcup_{w \in [\frac{2\pi(j-1)}{n}, \frac{2\pi j}{n})} \bigcup_{\varphi \in R_w} \left\{ x \in C^c \mid \text{Erster Schnitt von } 0 < a \mapsto x - a\rho(\varphi) \text{ und } \partial C \text{ ist} \right. \\
&\quad \left. \frac{d}{2}\rho(w) \right\} \\
&= \bigcup_{w \in [\frac{2\pi(j-1)}{n}, \frac{2\pi j}{n})} \bigcup_{\varphi \in R_w} \text{Im} \left(\frac{d}{2}\rho(w) + a\rho(\varphi) \mid a > 0 \right),
\end{aligned}$$

wobei wir

$$R_w \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} [w + \frac{3\pi}{2}, 2\pi] \cup [0, w + \frac{\pi}{2}] & , \text{ falls } w \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ [w - \frac{\pi}{2}, w + \frac{\pi}{2}] & , \text{ falls } w \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \\ [w - \frac{\pi}{2}, 2\pi] \cup [0, w - \frac{3\pi}{2}] & , \text{ falls } w \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \end{cases}$$

definiert haben. R_w enthält somit alle Repräsentanten von Richtungen, die ausgehend vom Punkt $\frac{d}{2}\rho(w) \in \partial C$ in das Äußere von C zeigen (vergleiche Abbildung 13). Wir haben A_j also zunächst über die möglichen Schnittpunkte $\{w \mid \frac{d}{2}\rho(w) \in D_j\}$ der Teilchenpfade mit dem Detektor D_j und daraufhin über die Richtungen $\varphi \in R_w$ aufgeteilt. Dadurch ergibt sich die erwartete Anzahl von Messungen bis auf ein skalares Vielfaches durch

$$\begin{aligned}
& \hat{M}_{z,t}^{\text{MSAS}}(A_j, A_k) \\
&= 2\lambda \int_{\frac{2\pi(j-1)}{n}}^{\frac{2\pi j}{n}} \int_{R_w} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2t} \exp\left(-\int_0^u \alpha\left(\frac{d}{2}\rho(w) + (a-v)\rho(\varphi)\right) dv\right) \\
&\quad g_z\left(\frac{d}{2}\rho(w) + (a-\frac{u}{2})\rho(\varphi)\right) \mathbf{1}_{A_k}\left(\frac{d}{2}\rho(w) + (a-u)\rho(\varphi)\right) du da d\varphi dw \\
&+ 2\lambda \int_{\frac{2\pi(j-1)}{n}}^{\frac{2\pi j}{n}} \int_{R_w} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2t} \int_0^u \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \nu\left(\frac{d}{2}\rho(w) + (a-(u-s))\rho(\varphi)\right) \\
&\quad \exp\left(-\int_0^{u-s} \mu\left(\frac{d}{2}\rho(w) + (a-v)\rho(\varphi)\right) dv\right) \\
&\quad \exp\left(-\int_0^s \alpha\left(\frac{d}{2}\rho(w) + (a-(u-s))\rho(\varphi) - v\rho(\varphi_1)\right) dv\right) \\
&\quad \zeta(\varphi \mid \varphi_1) g_z\left(\frac{d}{2}\rho(w) + a\rho(\varphi), u, \varphi_1, \varphi(s)\right) \mathbf{1}_{A_k}\left(\frac{d}{2}\rho(w) + (a-(u-s))\rho(\varphi) - s\rho(\varphi_1)\right) \\
&\quad d\varphi_1 ds du da d\varphi dw,
\end{aligned}$$

wobei $\frac{d}{2}\rho(w) + a\rho(\varphi)$ den Endpunkt des betrachteten Pfades und $\frac{d}{2}\rho(w)$ seinen Austrittspunkt aus dem PET-Scanner C bezeichnet. Man beachte, dass dieser Ausdruck endlich ist, da Pfade der Länge $u \leq 2t$, deren Endpunkte weit genug außerhalb des PET-Scanners

liegen (insbesondere für $a \geq 2t$), den PET-Scanner C nicht berühren und deswegen mit 0 gewichtet werden. Zur Veranschaulichung dient die folgende Abbildung:

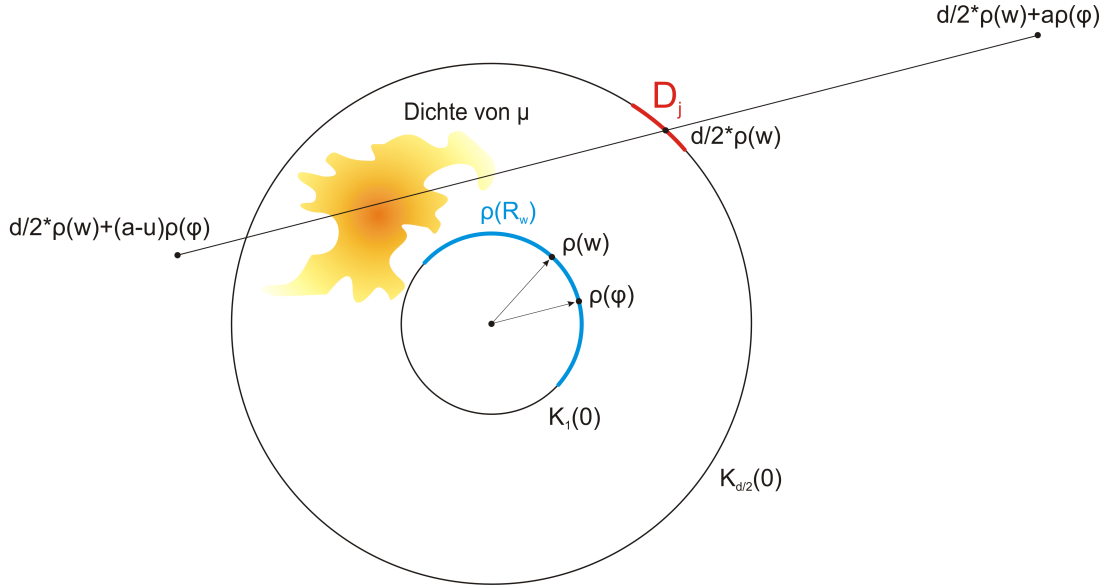


Abbildung 13: Veranschaulichung eines Teilchenpfades der Länge $u \leq 2t$ mit Endpunkt $\frac{d}{2}\rho(w) + a\rho(\varphi)$ und Austrittspunkt $\frac{d}{2}\rho(w) \in D_j$ zusammen mit der Menge $\rho(R_w)$ der abhängig von $w \in [0, 2\pi]$ zulässigen Richtungen.

Die folgende Umformung liefert die angekündigte mathematische Verbindung zwischen dem Diffusionsmodell und der klassischen Auswertung von Linienintegralen:

$$\begin{aligned}
& \hat{M}_{z,t}^{\text{MSAS}}(A_j, A_k) \\
&= 2\lambda \int_{\frac{2\pi(j-1)}{n}}^{\frac{2\pi j}{n}} \int_{R_w} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2t} \exp\left(-\int_0^u \alpha\left(\frac{d}{2}\rho(w) + (a-v)\rho(\varphi)\right) dv\right) \\
& \quad g_z\left(\frac{d}{2}\rho(w) + \left(a - \frac{u}{2}\right)\rho(\varphi)\right) \mathbf{1}_{A_k}\left(\frac{d}{2}\rho(w) + (a-u)\rho(\varphi)\right) du da d\varphi dw \\
&+ 2\lambda \int_{\frac{2\pi(j-1)}{n}}^{\frac{2\pi j}{n}} \int_{R_w} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2t} \int_0^u \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \nu\left(\frac{d}{2}\rho(w) + (a-(u-s))\rho(\varphi)\right) \\
& \quad \exp\left(-\int_0^{u-s} \mu\left(\frac{d}{2}\rho(w) + (a-v)\rho(\varphi)\right) dv\right) \\
& \quad \exp\left(-\int_0^s \alpha\left(\frac{d}{2}\rho(w) + (a-(u-s))\rho(\varphi) - v\rho(\varphi_1)\right) dv\right) \\
& \quad \zeta(\varphi|\varphi_1) g_z\left(\frac{d}{2}\rho(w) + a\rho(\varphi), u, \varphi_1, \varphi\right) \mathbf{1}_{A_k}\left(\frac{d}{2}\rho(w) + (a-(u-s))\rho(\varphi) - s\rho(\varphi_1)\right) \\
& \quad d\varphi_1 ds du da d\varphi dw \\
&\approx 2\lambda \int_{\frac{2\pi(j-1)}{n}}^{\frac{2\pi j}{n}} \int_{R_w} \frac{1}{2\pi} \int_0^{t-d} \int_0^{2t} \exp\left(-\int_0^u \alpha\left(\frac{d}{2}\rho(w) + (a-v)\rho(\varphi)\right) dv\right) \\
& \quad g_z\left(\frac{d}{2}\rho(w) + \left(a - \frac{u}{2}\right)\rho(\varphi)\right) \mathbf{1}_{A_k}\left(\frac{d}{2}\rho(w) + (a-u)\rho(\varphi)\right) du da d\varphi dw
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\lambda \int_{\frac{2\pi(j-1)}{n}}^{\frac{2\pi j}{n}} \int_{R_w} \frac{1}{2\pi} \int_0^{t-d} \int_0^{2t} \int_0^u \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \nu \left(\frac{d}{2} \rho(w) + (a - (u - s)) \rho(\varphi) \right) \\
& \exp \left(- \int_0^{u-s} \mu \left(\frac{d}{2} \rho(w) + (a - v) \rho(\varphi) \right) dv \right) \\
& \exp \left(- \int_0^s \alpha \left(\frac{d}{2} \rho(w) + (a - (u - s)) \rho(\varphi) - v \rho(\varphi_1) \right) dv \right) \\
& \zeta(\varphi | \varphi_1) g_z \left(d \frac{d}{2} \rho(w) + a \rho(\varphi), u, \varphi_1, \varphi \right) \mathbf{1}_{A_k} \left(\frac{d}{2} \rho(w) + (a - (u - s)) \rho(\varphi) - s \rho(\varphi_1) \right) \\
& d\varphi_1 ds du da d\varphi dw \\
\approx & 2\lambda \int_{\frac{2\pi(j-1)}{n}}^{\frac{2\pi j}{n}} \int_{R_w} \frac{1}{2\pi} \int_0^{t-d} \int_{a+d}^{2t} \exp \left(- \int_0^d \alpha \left(\frac{d}{2} \rho(w) - v \rho(\varphi) \right) dv \right) \\
& g_z \left(\frac{d}{2} \rho(w) + (a - \frac{u}{2}) \rho(\varphi) \right) \mathbf{1}_{A_k} \left(\frac{d}{2} \rho(w) + (a - u) \rho(\varphi) \right) du da d\varphi dw \\
& + 2\lambda \int_{\frac{2\pi(j-1)}{n}}^{\frac{2\pi j}{n}} \int_{R_w} \frac{1}{2\pi} \int_0^{t-d} \int_0^{2t} \int_s^{2t} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \nu \left(\frac{d}{2} \rho(w) + (a - s) \rho(\varphi) \right) \\
& \exp \left(- \int_0^s \mu \left(\frac{d}{2} \rho(w) + (a - v) \rho(\varphi) \right) dv \right) \\
& \exp \left(- \int_0^{u-s} \alpha \left(\frac{d}{2} \rho(w) + (a - s) \rho(\varphi) - v \rho(\varphi_1) \right) dv \right) \\
& \zeta(\varphi | \varphi_1) g_z \left(d \frac{d}{2} \rho(w) + a \rho(\varphi), u, \varphi_1, \varphi \right) \mathbf{1}_{A_k} \left(\frac{d}{2} \rho(w) + (a - s) \rho(\varphi) - (u - s) \rho(\varphi_1) \right) \\
& d\varphi_1 du ds da d\varphi dw \\
= & 2\lambda \int_{\frac{2\pi(j-1)}{n}}^{\frac{2\pi j}{n}} \int_{R_w} \frac{1}{2\pi} (t - d) \exp \left(- \int_0^d \alpha \left(\frac{d}{2} \rho(w) - v \rho(\varphi) \right) dv \right) \\
& \left(\int_0^d g_z \left(\frac{d}{2} \rho(w) - v \rho(\varphi) \right) dv \right) \mathbf{1}_{A_k} \left(\frac{d}{2} \rho(w) - d \rho(\varphi) \right) d\varphi dw \\
& + 2\lambda \int_{\frac{2\pi(j-1)}{n}}^{\frac{2\pi j}{n}} \int_{R_w} \frac{1}{2\pi} \int_0^{t-d} \int_{-a}^{2t-a} \int_{s+a}^{2t} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \nu \left(\frac{d}{2} \rho(w) - s \rho(\varphi) \right) \\
& \exp \left(- \int_0^{s+a} \mu \left(\frac{d}{2} \rho(w) + (a - v) \rho(\varphi) \right) dv \right) \\
& \exp \left(- \int_0^{u-s+a} \alpha \left(\frac{d}{2} \rho(w) - s \rho(\varphi) - v \rho(\varphi_1) \right) dv \right) \\
& \zeta(\varphi | \varphi_1) g_z \left(d \frac{d}{2} \rho(w) + a \rho(\varphi), u, \varphi_1, \varphi \right) \mathbf{1}_{A_k} \left(\frac{d}{2} \rho(w) - s \rho(\varphi) - (u - s + a) \rho(\varphi_1) \right) \\
& d\varphi_1 du ds da d\varphi dw \\
= & 2\lambda \int_{\frac{2\pi(j-1)}{n}}^{\frac{2\pi j}{n}} \int_{R_w} \frac{1}{2\pi} (t - d) \exp \left(- \int_0^d \alpha \left(\frac{d}{2} \rho(w) - v \rho(\varphi) \right) dv \right) \\
& \left(\int_0^d g_z \left(\frac{d}{2} \rho(w) - v \rho(\varphi) \right) dv \right) \mathbf{1}_{A_k} \left(\frac{d}{2} \rho(w) - d \rho(\varphi) \right) d\varphi dw
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\lambda \int_{\frac{2\pi(j-1)}{n}}^{\frac{2\pi j}{n}} \int_{R_w} \frac{1}{2\pi} \int_0^{t-d} \int_0^d \int_{s+a}^{2t} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \nu \left(\frac{d}{2} \rho(w) - s\rho(\varphi) \right) \\
& \exp \left(- \int_0^s \mu \left(\frac{d}{2} \rho(w) - v\rho(\varphi) \right) dv \right) \\
& \exp \left(- \int_0^d \alpha \left(\frac{d}{2} \rho(w) - s\rho(\varphi) - v\rho(\varphi_1) \right) dv \right) \\
& \zeta(\varphi|\varphi_1) g_z \left(d \frac{d}{2} \rho(w) + a\rho(\varphi), u, \varphi_1, \varphi \right) \mathbf{1}_{A_k} \left(\frac{d}{2} \rho(w) - s\rho(\varphi) - (u-s+a)\rho(\varphi_1) \right) \\
& d\varphi_1 du ds da d\varphi dw \\
& = 2\lambda(t-d) \int_{\frac{2\pi(j-1)}{n}}^{\frac{2\pi j}{n}} \int_{R_w} \frac{1}{2\pi} \exp \left(- \int_0^d \alpha \left(\frac{d}{2} \rho(w) - v\rho(\varphi) \right) dv \right) \\
& \left(\int_0^d g_z \left(\frac{d}{2} \rho(w) - v\rho(\varphi) \right) dv \right) \mathbf{1}_{A_k} \left(\frac{d}{2} \rho(w) - d\rho(\varphi) \right) d\varphi dw \\
& + 2\lambda(t-d) \int_{\frac{2\pi(j-1)}{n}}^{\frac{2\pi j}{n}} \int_{R_w} \frac{1}{2\pi} \int_0^d \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \nu \left(\frac{d}{2} \rho(w) - s\rho(\varphi) \right) \\
& \exp \left(- \int_0^s \mu \left(\frac{d}{2} \rho(w) - v\rho(\varphi) \right) dv \right) \\
& \exp \left(- \int_0^d \alpha \left(\frac{d}{2} \rho(w) - s\rho(\varphi) - v\rho(\varphi_1) \right) dv \right) \\
& \zeta(\varphi|\varphi_1) \left(\int_0^s g_z \left(\frac{d}{2} \rho(w) - v\rho(\varphi) \right) dv + \int_0^d g_z \left(\frac{d}{2} \rho(w) - s\rho(\varphi) - v\rho(\varphi_1) \right) dv \right) \\
& \mathbf{1}_{A_k} \left(\frac{d}{2} \rho(w) - s\rho(\varphi) - d\rho(\varphi_1) \right) d\varphi_1 ds d\varphi dw
\end{aligned}$$

Im ersten Schritt haben wir ausgenutzt, dass für $a > t$ sowohl $g_z(\frac{d}{2}\rho(w) + (a - \frac{u}{2})\rho(\varphi))$ als auch $g_z(d\frac{d}{2}\rho(w) + a\rho(\varphi), u, \varphi_1, \varphi)$ gleich 0 ist (da der Mittelpunkt eines Pfades der Länge $u \leq 2t$ mit Endpunkt $\frac{d}{2}\rho(w) + a\rho(\varphi)$ nicht innerhalb von C liegen kann). Der erste Term entspricht dabei dem zweiten aber nur ungefähr, da für $a \in [t-d, t]$ obige Werte gegebenenfalls ungleich 0 sein können. Aufgrund der hohen Geschwindigkeit der Teilchen (Lichtgeschwindigkeit) ist die Länge d des Intervalls (der Durchmesser des PET-Zylinders) jedoch um Größenordnungen kleiner als $t-d$ und fällt somit numerisch nicht ins Gewicht. Das Weglassen der Integration über $[t-d, t]$ bewirkt daher keine nennenswerte Verfälschung der Ergebnisse. Beim zweiten Ungefähr-Gleich-Zeichen haben wir im ersten Summanden verwendet, dass für $u < a$ ebenfalls $g_z(\frac{d}{2}\rho(w) + (a - \frac{u}{2})\rho(\varphi)) = 0$ ist. Für diese Werte von u steht im Exponenten immer dasselbe Integral. Das Integral von a bis $a+d$ über u können wir wegen obiger Überlegung zum Größenverhältnis der Werte d und t ebenfalls vernachlässigen. Im zweiten Summanden haben wir $u-s \mapsto s$ substituiert und die Integrationen über u und s vertauscht. Den ersten Summanden beim dritten Schritt

haben wir erhalten, weil unabhängig von $a \in [0, t - d]$

$$\begin{aligned} & \int_{a+d}^{2t} g_z \left(\frac{d}{2} \rho(w) + (a - \frac{u}{2}) \rho(\varphi) \right) \mathbf{1}_{A_k} \left(\frac{d}{2} \rho(w) + (a - u) \rho(\varphi) \right) du \\ &= \int_0^d g_z \left(\frac{d}{2} \rho(w) - v \rho(\varphi) \right) dv \mathbf{1}_{A_k} \left(\frac{d}{2} \rho(w) - d \rho(\varphi) \right) \end{aligned}$$

gilt. Der zweite Summand resultiert aus der Substitution $s \mapsto s + a$. Im vierten Schritt haben wir ausgenutzt, dass für $s \notin [0, d]$ die Funktion $s \mapsto \nu \left(\frac{d}{2} \rho(w) - s \rho(\varphi) \right)$ den Wert 0 annimmt. Beim letzten Schritt haben wir schließlich unter Beachtung der Definition des Pfadmittelpunktes $d_{\frac{d}{2} \rho(w) + a \rho(\varphi), u, \varphi_1, \varphi}$ verwendet, dass unabhängig von $a \in [0, t - d]$

$$\begin{aligned} & \int_{s+a}^{2t} g_z \left(d_{\frac{d}{2} \rho(w) + a \rho(\varphi), u, \varphi_1, \varphi} (u - s + a) \right) \mathbf{1}_{A_k} \left(\frac{d}{2} \rho(w) - s \rho(\varphi) - (u - s + a) \rho(\varphi_1) \right) du \\ &= \left(\int_0^s g_z \left(\frac{d}{2} \rho(w) - v \rho(\varphi) \right) dv + \int_0^d g_z \left(\frac{d}{2} \rho(w) - s \rho(\varphi) - v \rho(\varphi_1) \right) dv \right) \\ & \quad \mathbf{1}_{A_k} \left(\frac{d}{2} \rho(w) - s \rho(\varphi) - d \rho(\varphi_1) \right) \end{aligned}$$

gilt. Anschaulich gesehen entspricht die Rechnung der folgenden Überlegung: Unabhängig vom Wert des Parameters $a > 0$ treffen alle Pfade mit Startpunkt $\frac{d}{2} \rho(w) + a \rho(\varphi)$ und Startrichtung $-\rho(\varphi)$ im selben Punkt auf ∂C . Daher besitzen sie alle dieselbe Ausgangsposition für den durch den Diffusionsprozess bedingten Teilpfad im Inneren des PET-Scanners. Die Integration über den Parameter a ist (im Wesentlichen) lediglich eine Multiplikation mit dem Faktor $t - d$. Da wir uns nur für die Relation der Größen $(M_{z,t}^{\text{MSAS}}(A_j, A_k))_{j,k \in \{1, \dots, n\}, j \neq k}$ interessieren, können wir in obigem Ausdruck ferner den Vorfaktor $\frac{2\lambda(t-d)}{2\pi}$ (der beiden Summanden gemein ist) vernachlässigen, woraus lediglich eine Umskalierung der betrachteten Größen resultiert. Daher erhalten wir bei der Auswertung des Integralgleichungssystems (10) unter Verwendung der auf obige Weise *modifizierten erwarteten Anzahl* $(\hat{M}_{z,t}^{\text{MSAS}}(A_j, A_k))_{j,k \in \{1, \dots, n\}, j \neq k}$ von *Teilchenpaaren in* (A_j, A_k) (anstelle von $(M_{z,t}^{\text{MSAS}}(A_j, A_k))_{j,k \in \{1, \dots, n\}, j \neq k}$, siehe (11)) eine Lösung \bar{f} für die unbekannte Quelldichte, die sich von der ursprünglichen Lösung f ebenfalls nur durch ein skalares Vielfaches unterscheidet.

Für nicht gestreute und einfach gestreute Teilchen definieren wir die Pfadfunktionen $\gamma_{y,\varphi}, \gamma_{y,s,\varphi,\varphi_1} : [0, 2d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ (mit $y \in \mathbb{R}^2$, $\varphi, \varphi_1 \in [0, 2\pi]$, $s \in [0, d]$, $d > 0$),

$$\gamma_{y,\varphi}(v) \stackrel{\text{def}}{=} y - v \rho(\varphi)$$

und

$$\gamma_{y,s,\varphi,\varphi_1}(v) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} y - v \rho(\varphi) & , \text{ falls } v \in [0, s] \\ y - s \rho(\varphi) - (v - s) \rho(\varphi_1) & , \text{ falls } v \in (s, 2d]. \end{cases}$$

Dabei genügt es, Pfade auf dem Intervall $[0, 2d]$ zu betrachten, da die Länge der von den Photonen innerhalb des PET-Scanners zurückgelegten Teilpfade bei Berücksichtigung von lediglich einfacher Streuung (Modell MSAS) maximal $2d$ betragen kann. Man beachte an

dieser Stelle, dass wir zur Bestimmung des Steuzeitpunktes s den gestreuten Pfad nun sinnvollerweise in umgekehrter Richtung durchlaufen, was wegen der Symmetrie des Streuungsprozesses problemlos möglich ist (vergleiche obige Umformung und die Ausführungen im Abschnitt 8.2). Dadurch wird gewährleistet, dass die Position des Streuereignisses im Inneren von C liegen kann. Regulär müssten wir den Pfad ausgehend vom Punkt $y \in \partial C$ um $2d - s$ Einheiten in Richtung $-\rho(\varphi)$ folgen, um die Position des Streuereignisses zu erreichen. Diese läge jedoch wegen $s < d$ in jedem Fall außerhalb des PET-Scanners. Unter Berücksichtigung der obigen Ausführungen erhalten wir für $z \in C$ und $j, k \in \{1, \dots, n\}$ die Größen

$$\begin{aligned}
& \hat{M}_z^{\text{MSAS}}(A_j, A_k) \\
\stackrel{\text{def}}{=} & \int_{\frac{2\pi(j-1)}{n}}^{\frac{2\pi j}{n}} \int_{R_w} \exp\left(-\int_0^d \mu\left(\frac{d}{2}\rho(w) - u\rho(\varphi)\right) + \nu\left(\frac{d}{2}\rho(w) - u\rho(\varphi)\right) du\right) \\
& \left(\int_0^d g_z\left(\frac{d}{2}\rho(w) - u\rho(\varphi)\right) du\right) \mathbf{1}_{A_k}\left(\frac{d}{2}\rho(w) - d\rho(\varphi)\right) d\varphi dw \\
+ & \int_{\frac{2\pi(j-1)}{n}}^{\frac{2\pi j}{n}} \int_{R_w} \int_0^d \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \nu\left(\frac{d}{2}\rho(w) - s\rho(\varphi)\right) \exp\left(-\int_0^s \mu\left(\frac{d}{2}\rho(w) - u\rho(\varphi)\right) du\right) \\
& \exp\left(-\int_0^d \alpha\left(\frac{d}{2}\rho(w) - s\rho(\varphi) - u\rho(\varphi_1)\right) du\right) \zeta(\varphi|\varphi_1) \\
& \left(\int_0^s g_z\left(\frac{d}{2}\rho(w) - u\rho(\varphi)\right) du + \int_0^d g_z\left(\frac{d}{2}\rho(w) - s\rho(\varphi) - u\rho(\varphi_1)\right) du\right) \\
& \mathbf{1}_{A_k}\left(\frac{d}{2}\rho(w) - s\rho(\varphi) - d\rho(\varphi_1)\right) d\varphi_1 ds d\varphi dw. \tag{11}
\end{aligned}$$

Alternativ können wir die Größen auch durch Kurvenintegrale ausdrücken:

$$\begin{aligned}
& \hat{M}_z^{\text{MSAS}}(A_j, A_k) \\
= & \int_{\frac{2\pi(j-1)}{n}}^{\frac{2\pi j}{n}} \int_{R_w} \exp\left(-\int_{\gamma_{\frac{d}{2}\rho(w), \varphi}} \mu(x) + \nu(x) dx\right) \left(\int_{\gamma_{\frac{d}{2}\rho(w), \varphi}} g_z(x) dx\right) \\
& \mathbf{1}_{\{1\}}(|\text{Im}(\gamma_{\frac{d}{2}\rho(w), \varphi}) \cap D_k|) d\varphi dw \\
+ & \int_{\frac{2\pi(j-1)}{n}}^{\frac{2\pi j}{n}} \int_{R_w} \int_0^d \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \nu\left(\frac{d}{2}\rho(w) - s\rho(\varphi)\right) \exp\left(-\int_{\gamma_{\frac{d}{2}\rho(w), \varphi}^{|[0, s]}} \mu(x) dx\right) \\
& \exp\left(-\int_{\gamma_{\frac{d}{2}\rho(w) - s\rho(\varphi), \varphi_1}} \alpha(x) dx\right) \zeta(\varphi|\varphi_1) \left(\int_{\gamma_{\frac{d}{2}\rho(w), s, \varphi, \varphi_1}} g_z(x) dx\right) \\
& \mathbf{1}_{\{1\}}(|\text{Im}(\gamma_{\frac{d}{2}\rho(w), s, \varphi, \varphi_1}) \cap D_k|) d\varphi_1 ds d\varphi dw.
\end{aligned}$$

Nach Konstruktion besitzt der betrachtete Teilchenpfad entweder genau einen oder keinen Schnittpunkt mit dem Detektor D_k . Daher überprüfen die oben verwendeten Indikatorfunktionen lediglich, ob der betrachtete Pfad die Registrierung der Koinzidenz (j, k) verursachen würde. Die auftretenden Kurvenintegrale sind im funktionentheoretischen Sinn zu verstehen. Das heißt, für einen Pfad $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt

$$\int_{\gamma} f(x) dx = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|_2 dt.$$

Man beachte in diesem Zusammenhang, dass die oben definierten Pfadfunktionen $\gamma_{y,\varphi}$ und $\gamma_{y,s,\varphi,\varphi_1}$ stückweise stetig differenzierbar sind und in unserem Fall $\|\gamma'_{\frac{d}{2}\rho(w),\varphi}(t)\|_2 = \|\gamma'_{\frac{d}{2}\rho(w),s,\varphi,\varphi_1}(t)\|_2 = 0$ gilt. Die schon in (11) auftretende Integrationsgrenze d ist sinnvoll, da die Träger der Funktionen μ , ν und g_z im Inneren von C liegen.

Im Hinblick auf die numerische Implementierung approximieren wir diesen Ausdruck durch Riemannsche Summen. Dafür wählen wir zunächst Repräsentanten $z_v \in v$ für sämtliche Pixel $v \in \mathcal{V}$ aus. Diese können Eckpunkte der Pixel oder deren Mittelpunkte sein. Wichtig ist dabei lediglich, dass die Repräsentanten der einzelnen Pixel alle nach demselben Muster ausgewählt werden, damit sie alle denselben Abstand von ihren jeweiligen unmittelbaren Nachbarn besitzen. Es gilt also $\{z_v | v \in \mathcal{V}\} = LZ^2$ mit der Breite $L > 0$ der Pixel. Bezeichne

$$G_v \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in \mathcal{V} : w \cap (K_R(z_v) \setminus K_r(z_v)) \neq \emptyset\}$$

die Menge der Pixel, die einen nicht-leeren Durchschnitt mit dem Träger der Dichte g_{z_v} der Photonen-Emissionsorte besitzen (Zur Erinnerung: Es gilt

$$g_z(y) = \frac{\mathbf{1}_{K_R(z) \setminus K_r(z)}(y)}{\pi(R^2 - r^2)}$$

mit $K_R(z)$ dem Kreis um z mit Radius R). Als diskretisierte Version von g_{z_v} ergibt sich damit für jedes $v \in \mathcal{V}$ die diskrete (Zähl-) Dichte $g_v : \mathcal{V} \rightarrow [0, \infty)$

$$g_v(y) = \sum_{w \in G_v} \frac{\mathbf{1}_{\{w\}}(y)}{|G_v|}$$

(mit der Mächtigkeit $|G_v|$ der Menge G_v). Da die Repräsentanten z_v alle nach demselben Muster ausgewählt werden und die Schranken r und R der Reichweite der Positronen nicht vom Ort abhängen, gilt $|G_v| = |G_w|$ für beliebige Pixel $v, w \in \mathcal{V}$. Im nächsten Schritt diskretisieren wir die Weglänge und die Richtung, indem wir das Intervall $[0, d]$ in n_1 und das Intervall $[0, 2\pi]$ in $n_2 = an$ (für ein $a \in \mathbb{N}$) Teilintervalle aufteilen. Dabei bezeichne n die Anzahl der Detektoren. Ferner sei n_2 durch 4 teilbar. Zur Erinnerung: Die Geschwindigkeit der Teilchen ist in unserem Modell auf 1 normiert. Für die daraus resultierenden Zeit- beziehungsweise Weg-Einheiten schreiben wir abkürzend

$$u_l \stackrel{\text{def}}{=} \frac{ld}{n_1}, \quad \text{für } l \in \mathbb{N},$$

sowie für die Richtungen

$$\varphi_l \stackrel{\text{def}}{=} \rho(w_l), \quad \text{für } l = 1, \dots, n_2$$

mit

$$w_l \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\pi l}{n_2}, \quad \text{für } l = 1, \dots, n_2.$$

Somit erhalten wir als diskrete Version des dem Maß $Q = \mathbb{X}^2 \otimes U(0, 2\pi)$ zugrunde liegenden Raumes $\mathbb{R}^2 \times [0, 2\pi]$ die Menge $\mathcal{W} \times \mathcal{R}$ mit

$$\mathcal{R} \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi_j | j = 1, \dots, n_2\},$$

sowie anstelle von Q das Maß $\mathcal{Z} \otimes L(\varphi_1, \dots, \varphi_{n_2})$ mit dem Zählmaß \mathcal{Z} auf der Menge \mathcal{W} der Pixel und der Laplace-Verteilung $L(\varphi_1, \dots, \varphi_{n_2})$ auf der Menge der im diskreten Fall zugelassenen Richtungen. Der Detektor A_j wird (für alle $j \in \{1, \dots, n\}$) im diskreten Fall durch die Punkte

$$\left(\frac{d}{2}\varphi_l\right)_{l=(j-1)p, \dots, jp-1}$$

repräsentiert. Für die abhängig von w_l zulässigen Richtungen gilt $\hat{R}_{w_l} \stackrel{\text{def}}{=} R_{w_l} \cap \{w_1, \dots, w_{n_2}\}$, also

$$\hat{R}_{w_l} = \begin{cases} \{w_{l+\frac{3n_2}{4}}, \dots, w_{n_2}\} \cup \{w_0, \dots, w_{l+\frac{n_2}{4}}\} & , \text{ falls } l \in \{1, \dots, \frac{n_2}{4}\} \\ \{w_{l-\frac{n_2}{4}}, \dots, w_{l+\frac{n_2}{4}}\} & , \text{ falls } l \in \{\frac{n_2}{4} + 1, \dots, \frac{3n_2}{4}\} \\ \{w_{l-\frac{n_2}{4}}, \dots, w_{n_2}\} \cup \{w_1, \dots, w_{l-\frac{3n_2}{4}}\} & , \text{ falls } l \in \{\frac{3n_2}{4} + 1, \dots, n_2\}. \end{cases}$$

Mit dieser Notation erhalten wir für jeden Pixel $v \in \mathcal{V}$ und jedes Detektorenpaar (D_j, D_k) eine *diskretisierte Version* $\hat{M}_v^{\text{MSAS}}(A_j, A_k)$ der *modifizierten erwarteten Anzahl von Teilchenpaaren in (A_j, A_k) bei Annahme einer Positronen-Punktquelle im Pixel v* . Es gilt

$$\begin{aligned} & \hat{M}_v^{\text{MSAS}}(A_j, A_k) \\ = & \sum_{l=(j-1)a}^{ja-1} \sum_{w \in \hat{R}_{w_l}} \exp\left(-\frac{d}{n_1} \sum_{m=1}^{n_1} \alpha\left(\frac{d}{2}\rho(w_l) - u_m\rho(w)\right)\right) \\ & \sum_{m=1}^{n_1} g_v\left(\frac{d}{2}\rho(w_l) - u_m\rho(w)\right) \mathbf{1}_{A_k}\left(\frac{d}{2}\rho(w_l) - d\rho(w)\right) \\ + & \sum_{l=(j-1)a}^{ja-1} \sum_{w \in \hat{R}_{w_l}} \sum_{s=1}^{n_1} \sum_{q=1}^{n_2} \frac{d}{n_1 n_2} \nu\left(\frac{d}{2}\rho(w_l) - u_s\rho(w)\right) \zeta(w|w_q) \\ & \exp\left(-\frac{d}{n_1} \sum_{m=1}^s \mu\left(\frac{d}{2}\rho(w_l) - u_m\rho(w)\right)\right) \exp\left(-\frac{d}{n_1} \sum_{m=1}^{n_1} \alpha\left(\frac{d}{2}\rho(w_l) - u_s\rho(w) - u_m\rho(w_q)\right)\right) \\ & \left(\sum_{m=1}^s g_v\left(\frac{d}{2}\rho(w_l) - u_m\rho(w)\right) + \sum_{m=1}^{n_1} g_v\left(\frac{d}{2}\rho(w_l) - u_s\rho(w) - u_m\rho(w_q)\right)\right) \\ & \mathbf{1}_{A_k}\left(\frac{d}{2}\rho(w_l) - u_s\rho(w) - d\rho(w_q)\right), \end{aligned}$$

wobei wir Faktoren, die in beiden Summanden zugleich auftreten, vernachlässigt haben. Diese Größen stellen die Koeffizienten der Systemmatrix unseres statistischen Auswertungsverfahrens dar, mit deren Hilfe sich das ursprüngliche Integralgleichungssystem (10) (mit $\hat{M}_{z_v}^{\text{MSAS}}(A_j, A_k)$ anstelle von $M_{z_v}^{\text{MSAS}}(A_j, A_k)$) beliebig genau approximieren lässt. Bei obigem Ausdruck handelt es sich um eine Riemannsche Summe des Integralterms (11). Es gilt offensichtlich

$$\hat{M}_v^{\text{MSAS}}(A_j, A_k) \xrightarrow{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \hat{M}_{z_v}^{\text{MSAS}}(A_j, A_k).$$

8.3.2 Bestimmung der Systemmatrix für das Modell MSAMS im zweidimensionalen Fall

Durch Anwendung obiger Überlegungen auf den Fall des Modells 2D-MSAMS mit mehrfacher Streuung erhalten wir für beliebige $j, k \in \{1, \dots, n\}$ mit $j \neq k$ die Formel

$$\begin{aligned} & \hat{M}_z^{\text{MSAMS}}(A_j, A_k) \\ = & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\frac{2\pi(j-1)}{n}}^{\frac{2\pi j}{n}} \int_{R_w} \int_0^d \cdots \int_0^d \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \exp\left(-\int_{\gamma_m} \mu(x) + \nu(x) dx\right) \\ & \prod_{l=1}^m \nu\left(\frac{d}{2}\rho(w) - s_1\rho(\varphi) - \sum_{p=2}^{m+1-l} s_p\rho(\varphi_{m+2-p})\right) \prod_{p=1}^{m-1} \zeta(\varphi_{p+1}|\varphi_p)\zeta(\varphi|\varphi_m) \\ & \left(\int_{\gamma_m} g_z(x) dx\right) \mathbf{1}_{\{1\}}(|\text{Im}(\gamma_m) \cap D_k|) d\varphi_m \dots d\varphi_1 ds_m \dots ds_1 d\varphi dw \end{aligned}$$

für die modifizierte erwartete Anzahl von Teilchenpaaren in (A_j, A_k) bei Annahme einer Positronen-Punktquelle im Punkt $z \in C$, wobei wir abkürzend γ_m für die Pfadfunktion $\gamma_{\frac{d}{2}\rho(w), m, s_1, \dots, s_m, \varphi_1, \dots, \varphi_m, \varphi} : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\gamma_m(v) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{d}{2}\rho(w) - v\rho(\varphi) & , v \in [0, s_1] \\ \frac{d}{2}\rho(w) - s_1\rho(\varphi) - (v - s_1)\rho(\varphi_m) & , v \in [s_1, s_1 + s_2] \\ \vdots & \vdots \\ \frac{d}{2}\rho(w) - s_1\rho(\varphi) - \sum_{l=2}^m s_l\rho(\varphi_{m+2-l}) - (v - \sum_{l=1}^m s_l)\rho(\varphi_1) & , v \in [\sum_{l=1}^m s_l, \infty] \end{cases}$$

geschrieben haben. Man beachte, dass wir analog zu den Überlegungen im vorherigen Abschnitt die Anordnung der Streuzeitpunkte auf dem Pfad umgekehrt haben. Ferner kann die maximale Länge des sich im Inneren von C befindenden Teilstücks eines Pfades mit genau m Streuereignissen maximal $(m+1)d$ betragen. Für die Zwischenstreuzeiten gilt $s_l \leq d$ (für $l = 1, \dots, m$). Die Verwendung dieser groben Schranken für die Gesamtlänge des Teilpfades und die Länge der Zwischenstreuzeiten ist zulässig, weil die Streuungsratenfunktion ν außerhalb von C nur den Wert 0 annimmt.

Zur Bestimmung der Systemmatrix-Koeffizienten approximieren wir obige Integralformel ähnlich wie die des Modells 2D-MSAS durch Riemannsche Summen. Mit der Notation aus Abschnitt 8.3.1 erhalten wir für jeden Pixel $v \in \mathcal{V}$ und jedes Detektorenpaar (D_j, D_k) eine diskretisierte Version $\hat{M}_v^{\text{MSAMS}}(A_j, A_k)$ der modifizierten erwarteten Anzahl von Teilchenpaaren in (A_j, A_k) bei Annahme einer Positronen-Punktquelle im Pixel v . Mit $\alpha = \mu + \nu$ gilt

$$\begin{aligned} & \hat{M}_v^{\text{MSAMS}}(A_j, A_k) \\ = & \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{d}{(n_1 n_2)}\right)^m \sum_{l=(j-1)a}^{ja-1} \sum_{w \in \hat{R}_{w_l}} \sum_{s_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{s_m=1}^{n_1} \sum_{q_1=1}^{n_2} \cdots \sum_{q_m=1}^{n_2} \left(\prod_{p=1}^{m-1} \zeta(w_{q_{p+1}}|w_{q_p})\right) \zeta(w|w_{q_m}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \prod_{p=1}^m \nu \left(\frac{d}{2} \rho(w_l) - u_{s_1} \rho(w) - \sum_{r=2}^{m+1-p} u_{s_r} \varphi_{q_{m+2-r}} \right) \exp \left(-\frac{d}{n_1} \sum_{r_1=1}^{s_1} \alpha \left(\frac{d}{2} \rho(w_l) - u_{r_1} \rho(w) \right) \right. \\
& - \frac{d}{n_1} \sum_{p=2}^m \sum_{r_p=1}^{s_p} \alpha \left(\frac{d}{2} \rho(w_l) - u_{s_1} \rho(w) - \sum_{r=2}^{p-1} u_{s_r} \varphi_{q_{m+2-r}} - u_{r_p} \varphi_{q_{m+2-p}} \right) \\
& \left. - \frac{d}{n_1} \sum_{p=1}^{n_1} \alpha \left(\frac{d}{2} \rho(w_l) - u_{s_1} \rho(w) - \sum_{r=2}^m u_{s_r} \varphi_{q_{m+2-r}} - u_p \varphi_{q_1} \right) \right) \\
& \left(\sum_{p=2}^m \sum_{r_p=1}^{s_p} g_v \left(\frac{d}{2} \rho(w_l) - u_{s_1} \rho(w) - \sum_{r=2}^{p-1} u_{s_r} \varphi_{q_{m+2-r}} - u_{r_p} \varphi_{q_{m+2-p}} \right) \right. \\
& \left. + \sum_{r_1=1}^{s_1} g_v \left(\frac{d}{2} \rho(w_l) - u_{r_1} \rho(w) \right) + \sum_{p=1}^{n_1} g_v \left(\frac{d}{2} \rho(w_l) - u_{s_1} \rho(w) - \sum_{r=2}^m u_{s_r} \varphi_{q_{m+2-r}} - u_p \varphi_{q_1} \right) \right) \\
& \mathbf{1}_{A_k} \left(\frac{d}{2} \rho(w_l) - u_{s_1} \rho(w) - \sum_{l=2}^m u_{s_l} \varphi_{q_{m+2-l}} - d \varphi_{q_1} \right),
\end{aligned}$$

wobei wir wieder Faktoren, die in allen Summanden zugleich auftreten, vernachlässigt haben.

8.3.3 Bestimmung der Systemmatrix für das Modell MSAS im dreidimensionalen Fall

Bei der Aufstellung des linearen Gleichungssystems für das statistische Auswertungsverfahren im dreidimensionalen Fall haben wir zunächst die Aufgabe, ein konkretes geometrisches Modell für den PET-Zylinder aufzustellen. Wir definieren

$$\partial C \stackrel{\text{def}}{=} \text{Im} \left((w, b) \mapsto \left(\frac{d}{2} \cos w, \frac{d}{2} \sin w, b \right) \mid w \in [0, 2\pi], b \in [0, h] \right).$$

Wir betrachten also einen Zylinder mit *Durchmesser* $d > 0$ und *Höhe* $h > 0$. Jeder Punkt $x \in C$ hat daher eine eindeutige Darstellung in den drei Koordinaten $(a, w, b) \in [0, \frac{d}{2}] \times [0, 2\pi] \times [0, h]$ bezüglich der Koordinatenfunktion $k : [0, \frac{d}{2}] \times [0, 2\pi] \times [0, h] \rightarrow C$,

$$k(a, w, b) \stackrel{\text{def}}{=} (a \cos w, a \sin w, b).$$

Analog zu den Ausführungen im zweidimensionalen Fall teilen wir den gekrümmten Teil der Oberfläche $\partial \hat{C} = \{(k(\frac{d}{2}, w, b) \mid w \in [0, 2\pi], b \in [0, h])\}$ des PET-Zylinders in disjunkte, gleichförmige Segmente ein. Diese repräsentieren die einzelnen Detektoren des PET-Scanners. Da zylinderförmige Scanner über mehrere hintereinander angeordnete Detektorringe verfügen, ist die folgende Art der Segmentierung naheliegend: Wir teilen das Intervall $[0, 2\pi]$ genau wie im zweidimensionalen Fall in n und zusätzlich das Intervall $[0, h]$ in m Abschnitte auf ($m, n \in \mathbb{N}$). Dadurch erhalten wir

$$\partial \hat{C} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m D_{i,j}$$

mit den *Detektoren* $(D_{i,j})_{i=1,\dots,n,j=1,\dots,m}$,

$$D_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Im} \left((w, b) \mapsto \left(\frac{d}{2} \cos w, \frac{d}{2} \sin w, b \right) \middle| w \in \left[\frac{2\pi(i-1)}{n}, \frac{2\pi i}{n} \right), b \in \left[\frac{(j-1)h}{m}, \frac{jh}{m} \right) \right)$$

sowie insgesamt m *Detektorringe*

$$\hat{D}_j \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n D_{i,j}$$

mit jeweils n Detektoren. Mithilfe der Ergebnisse aus Abschnitt 8.2 erhalten wir für das Modell MSAS im dreidimensionalen Fall (3D-MSAS) mit Positronen-Punktquelle $z \in C$ die erwartete Anzahl

$$\begin{aligned} & M_{z,t}^{\text{MSAS}}(A, B) \\ &= 2\lambda \int_A \int_0^{2t} \exp \left(- \int_0^u \mu(x - v\varphi) + \nu(x - v\varphi) dv \right) g_z \left(x - \frac{u}{2}\varphi \right) \\ & \quad \mathbf{1}_B(x - u\varphi) du dQ(x, \varphi) \\ &+ 2\lambda \int_A \int_0^{2t} \int_0^u \int_{S^2} \nu(x - (u-s)\varphi) \exp \left(- \int_0^{u-s} \mu(x - v\varphi) dv \right) \\ & \quad \exp \left(- \int_0^s \mu(x - (u-s)\varphi - v\varphi_1) + \nu(x - (u-s)\varphi - v\varphi_1) dv \right) \\ & \quad \zeta(\varphi|\varphi_1) g_z(d_{x,u,\varphi_1,\varphi}(s)) \mathbf{1}_B(x - (u-s)\varphi - s\varphi_1) d\Lambda(\varphi_1) ds du dQ(x, \varphi) \end{aligned}$$

von Teilchenpaaren in (A, B) zum Zeitpunkt $t > 0$ mit $d_{x,u,\varphi_1,\varphi} : [0, u] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$d_{x,u,\varphi_1,\varphi}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x - \frac{u}{2}\varphi & , \text{ falls } s \in [0, \frac{u}{2}) \\ x - (u-s)\varphi - (s - \frac{u}{2})\varphi_1 & , \text{ falls } s \in [\frac{u}{2}, u] \end{cases}$$

(Mittelpunkt des betrachteten gestreuten Pfades), wobei wir wieder maximal ein Streueignis auf dem zusammengesetzten Pfad zulassen. Zur Erinnerung: mit der Gleichverteilung Λ auf der Einheitssphäre S^2 haben wir $Q = \mathbb{X}^2 \otimes \Lambda$ und

$$\zeta(\varphi|\varphi_1) = \frac{2h(\arccos \langle \varphi_1, \varphi \rangle)}{\sin(\arccos \langle \varphi_1, \varphi \rangle)} = \frac{2h(\phi_{\varphi_1,\varphi})}{\sin(\phi_{\varphi_1,\varphi})}$$

(mit dem (Streu-)Winkel $\phi_{\varphi_1,\varphi} \in [0, \pi]$ zwischen den Vektoren φ_1 und φ). Die im Vergleich zum zweidimensionalen Fall höhere Komplexität resultiert zum einen aus dem Auftreten des zweidimensionalen Integrals über S^2 und zum anderen aus der komplexeren Gestalt der Detektionsräume. Zur Diskretisierung des Terms müssen wir zunächst die Gleichverteilung Λ auf S^2 genauer spezifizieren. In [Als1], Kapitel 25 wird gezeigt, dass der Zufallsvektor

$$T \circ (\Phi, \Theta) \stackrel{\text{def}}{=} (\cos \Phi \cos \Theta, \sin \Phi \cos \Theta, \sin \Theta)$$

für stochastisch unabhängige Zufallsgrößen Φ gleichverteilt auf $[0, 2\pi]$ und Θ mit $\lambda\lambda$ -Dichte $d(\theta) = \frac{1}{2} \cos(\theta) \mathbf{1}_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}(\theta)$ eine Gleichverteilung auf S^2 besitzt. Für eine beliebige messbare Funktion $F : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ erhalten wir daher

$$\int F(\varphi) d\Lambda(\varphi) = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4\pi} \cos(\theta) F(T(\phi, \theta)) d\theta d\phi. \quad (12)$$

Das zweidimensionale Integral über S^2 zerfällt also in zwei eindimensionale Integrale, die numerisch einfach zu bestimmen sind. Genau wie in 8.2 zerlegen wir den Detektionsraum $A_{i,j}$ eines Detektors $D_{i,j}$ in disjunkte Strahlen. Sei $k_{\frac{d}{2}}(w, b) \stackrel{\text{def}}{=} k(\frac{d}{2}, w, b)$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
& A_{i,j} \\
= & \{(x, \varphi) \in C^c \times S^2 \mid \text{Erster Schnitt von } 0 < a \mapsto x - a\varphi \text{ und } \partial C \text{ liegt in } D_{i,j}\} \\
= & \bigcup_{w \in [\frac{2\pi(i-1)}{n}, \frac{2\pi i}{n})} \bigcup_{b \in [\frac{(j-1)h}{m}, \frac{jh}{m})} \{(x, \varphi) \in C^c \times S^2 \mid \text{Erster Schnitt von } 0 < a \mapsto x - a\varphi \\
& \text{und } \partial C \text{ ist } k_{\frac{d}{2}}(w, b)\} \\
= & \bigcup_{w \in [\frac{2\pi(i-1)}{n}, \frac{2\pi i}{n})} \bigcup_{b \in [\frac{(j-1)h}{m}, \frac{jh}{m})} \bigcup_{w_1 \in R_w} \bigcup_{w_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \{x \in C^c \mid \text{Erster Schnitt von} \\
& 0 < a \mapsto x - aT(w_1, w_2) \text{ und } \partial C \text{ ist } k_{\frac{d}{2}}(w, b)\} \\
= & \bigcup_{w \in [\frac{2\pi(i-1)}{n}, \frac{2\pi i}{n})} \bigcup_{b \in [\frac{(j-1)h}{m}, \frac{jh}{m})} \bigcup_{w_1 \in R_w} \bigcup_{w_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \text{Im}(k_{\frac{d}{2}}(w, b) + aT(w_1, w_2) \mid a > 0),
\end{aligned}$$

mit der Menge R_w aus Abschnitt 8.3.1. Zur Erläuterung: Ausgehend vom Detektionspunkt $k_{\frac{d}{2}}(w, b)$ (Austrittspunkt des Teilchenpfades) ist die Menge der zulässigen (in das Äußere von C zeigenden) Richtungen gleich

$$\mathcal{R}_w \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ T(w_1, w_2) \mid w_1 \in R_w, w_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \right\}.$$

Nach Konstruktion steht die Tangentialebene im Punkt $k_{\frac{d}{2}}(w, b) \in \partial C$ an den Zylinder C senkrecht auf dem Richtungsvektor $(\cos w, \sin w, 0) \in S^2$. Unter Berücksichtigung der Definition von R_w bilden daher die Vektoren

$$\{(\cos w_1, \sin w_1, 0) \in S^2 \mid w_1 \in R_w\}$$

die Menge der (abhängig von w) zulässigen Richtungen, die senkrecht auf der Zylinderachse stehen. Diese formen einen Halbkreis vom Radius 1 mit Kurvenmittelpunkt $(\cos w, \sin w, 0)$. Dieser Zusammenhang wird von Abbildung 14 veranschaulicht. Sämtliche zulässigen Richtungen in S^2 erhalten wir anschaulich gesehen, indem wir diesen Halbkreis um den Vektor $(\cos w, \sin w, 0)$ rotieren, wodurch als Rotationskörper die Halbkugel

$$\mathcal{R}_w = \left\{ T(w_1, w_2) = (\cos w_1 \cos w_2, \sin w_1 \cos w_2, \sin w_2) \in S^2 \mid w_1 \in R_w, w_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \right\}$$

entsteht. Diese bildet die Menge der abhängig von $k_{\frac{d}{2}}(w, b)$ beziehungsweise w zulässigen Richtungen. Selbstverständlich könnten wir die umständliche Berechnung von \mathcal{R}_w bei der Datenauswertung vermeiden und einfach sämtliche Richtungen aus S^2 betrachten. Dadurch verdoppelt sich zwar der spätere Rechenaufwand bei der Auswertung der Daten (doppelte Anzahl an Richtungen im diskreten Fall), das Ergebnis wird jedoch durch die zusätzlichen unzulässigen Richtungen nicht verfälscht, da die Funktionen μ , ν und g_z außerhalb des PET-Zylinders nur den Wert 0 annehmen.

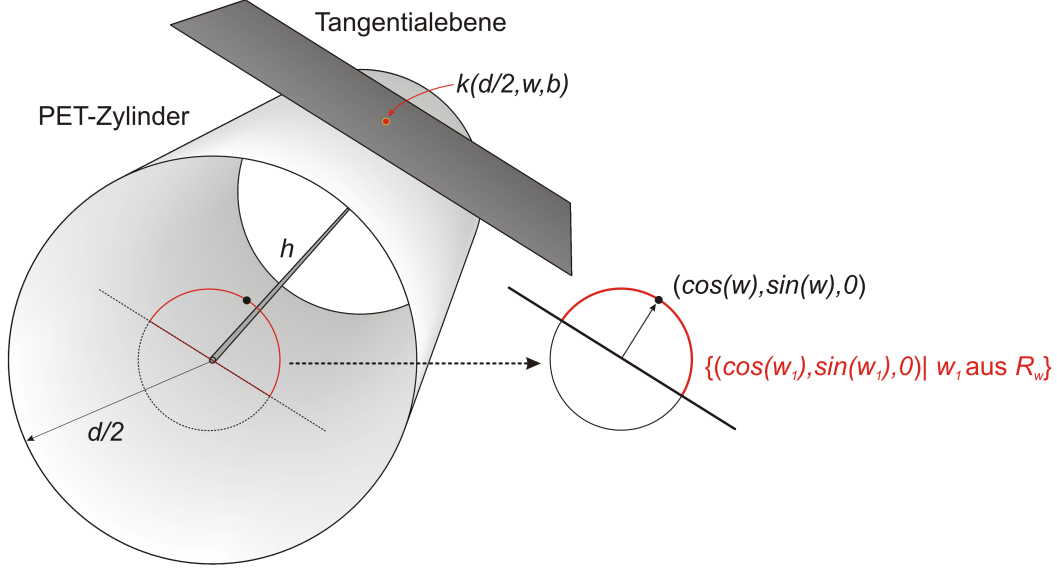


Abbildung 14: Die Tangentialebene an den PET-Zylinder im Detektionspunkt $k_{\frac{d}{2}}(w, b)$ mit dem zugehörigen Richtungsvektor $(\cos w, \sin w, 0)$ und der Menge $\{(\cos w_1, \sin w_1, 0) \in S^2 \mid w_1 \in R_w\}$ der zulässigen Richtungen, die senkrecht auf der Zylinderachse stehen.

Für die Auswertung benötigen wir erneut eine obere Schranke für die Länge der zu betrachtenden Pfade. Für einen ungestreuten Pfad kann die Länge des sich im Inneren eines PET-Zylinders mit Durchmesser d und Höhe h befindenden Teilpfades höchstens

$$c = \sqrt{d^2 + h^2}$$

und für einen einfach gestreuten Pfad höchstens $2c$ betragen. Analog zu den Überlegungen im zweidimensionalen Fall erhalten wir somit mithilfe von (12) die modifizierte erwartete Anzahl

$$\begin{aligned}
& \hat{M}_z^{\text{MSAS}}(A_{i_1, j_1}, A_{i_2, j_2}) \\
&= \int_{\frac{2\pi(i_1-1)}{n}}^{\frac{2\pi i_1}{n}} \int_{\frac{(j_1-1)h}{m}}^{\frac{j_1 h}{m}} \int_{R_w} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4\pi} \cos w_2 \exp\left(-\int_0^c \alpha(k_{\frac{d}{2}}(w, b) - uT(w_1, w_2)) du\right) \\
&\quad \left(\int_0^c g_z(k_{\frac{d}{2}}(w, b) - uT(w_1, w_2)) du\right) \mathbf{1}_{A_{i_2, j_2}}(k_{\frac{d}{2}}(w, b) - cT(w_1, w_2)) \\
&\quad dw_2 dw_1 db dw \\
&+ \int_{\frac{2\pi(i_1-1)}{n}}^{\frac{2\pi i_1}{n}} \int_{\frac{(j_1-1)h}{m}}^{\frac{j_1 h}{m}} \int_{R_w} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^c \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{16\pi^2} \cos w_2 \cos v_2 \\
&\quad \nu(k_{\frac{d}{2}}(w, b) - sT(w_1, w_2)) \exp\left(-\int_0^s \mu(k_{\frac{d}{2}}(w, b) - uT(w_1, w_2)) du\right) \\
&\quad \exp\left(-\int_0^c \alpha(k_{\frac{d}{2}}(w, b) - sT(w_1, w_2) - uT(v_1, v_2)) du\right) \\
&\quad \zeta(T(w_1, w_2) \mid T(v_1, v_2)) \left(\int_0^s g_z(k_{\frac{d}{2}}(w, b) - uT(w_1, w_2)) du\right)
\end{aligned}$$

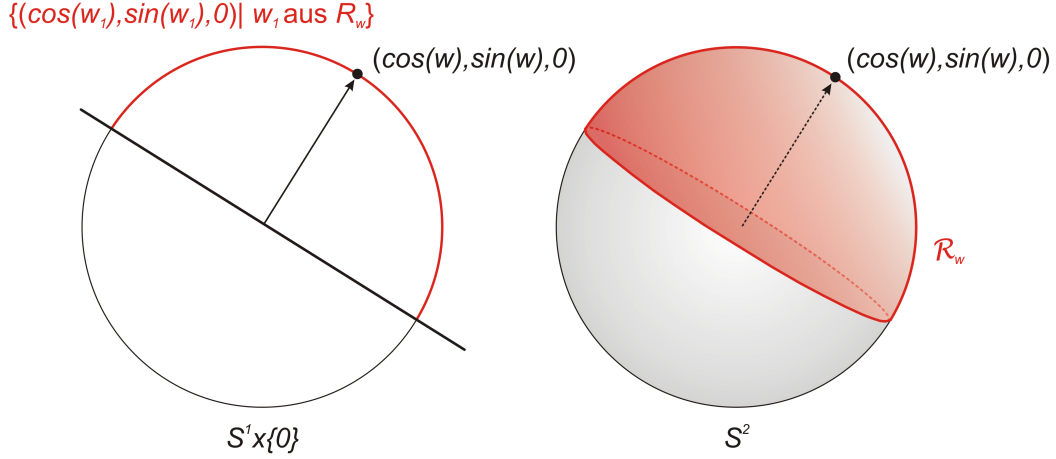


Abbildung 15: Konstruktion der abhängig von w zulässigen Richtungen $\mathcal{R}_w \subset S^2$.

$$\begin{aligned}
& + \int_0^c g_z(k_{\frac{d}{2}}(w, b) - sT(w_1, w_2) - uT(v_1, v_2)) du \\
& \mathbf{1}_{A_{i_2, j_2}}(k_{\frac{d}{2}}(w, b) - sT(w_1, w_2) - cT(v_1, v_2)) dv_2 dv_1 ds dw_2 dw_1 db dw
\end{aligned}$$

von registrierten Teilchenpaaren im Detektorenpaar $(A_{i_1, j_1}, A_{i_2, j_2})$ bei Annahme der Positronen-Punktquelle z . Die entsprechende Darstellung durch Pfadintegrale lautet

$$\begin{aligned}
& \hat{M}_z^{\text{MSAS}}(A_{i_1, j_1}, A_{i_2, j_2}) \\
& = \int_{\frac{2\pi i_1}{n}}^{\frac{2\pi(i_1-1)}{n}} \int_{\frac{j_1 h}{m}}^{\frac{(j_1-1)h}{m}} \int_{R_w} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4\pi} \cos w_2 \exp\left(-\int_{\gamma_{k_{\frac{d}{2}}(w, b), w_1, w_2}} \mu(x) + \nu(x) dx\right) \\
& \left(\int_{\gamma_{k_{\frac{d}{2}}(w, b), w_1, w_2}} g_z(x) dx\right) \mathbf{1}_{\{1\}}(|\text{Im}(\gamma_{k_{\frac{d}{2}}(w, b), w_1, w_2}) \cap D_{i_2, j_2}|) dw_2 dw_1 db dw \\
& + \int_{\frac{2\pi i_1}{n}}^{\frac{2\pi(i_1-1)}{n}} \int_{\frac{j_1 h}{m}}^{\frac{(j_1-1)h}{m}} \int_{R_w} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^c \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{16\pi^2} \cos w_2 \cos v_2 \nu(k_{\frac{d}{2}}(w, b) - sT(w_1, w_2)) \\
& \exp\left(-\int_{\gamma_{k_{\frac{d}{2}}(w, b), w_1, w_2} |_{[0, s]}} \mu(x) dx\right) \exp\left(-\int_{\gamma_{k_{\frac{d}{2}}(w, b) - sT(w_1, w_2), v_1, v_2}} \mu(x) + \nu(x) dx\right) \\
& \zeta(T(w_1, w_2) | T(v_1, v_2)) \left(\int_{\gamma_{k_{\frac{d}{2}}(w, b), s, w_1, w_2, v_1, v_2}} g_z(x) dx\right) \\
& \mathbf{1}_{\{1\}}(|\text{Im}(\gamma_{k_{\frac{d}{2}}(w, b), s, w_1, w_2, v_1, v_2}) \cap D_{i_2, j_2}|) dv_2 dv_1 ds dw_2 dw_1 db dw
\end{aligned}$$

mit den Pfadfunktionen $\gamma_{y, w_1, w_2}, \gamma_{y, s, w_1, w_2, v_1, v_2} : [0, 2c] \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\gamma_{y, w_1, w_2}(v) \stackrel{\text{def}}{=} y - vT(w_1, w_2)$$

und

$$\gamma_{y, s, w_1, w_2, v_1, v_2}(v) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} y - vT(w_1, w_2) & , \text{ falls } v \in [0, s] \\ y - sT(w_1, w_2) - (v - s)T(v_1, v_2) & , \text{ falls } v \in (s, 2c], \end{cases}$$

mit $y \in \mathbb{R}^3$, $v_1, w_1 \in [0, 2\pi]$, $v_2, w_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und $s \in [0, c]$ ($c > 0$). Genau wie im zwei-dimensionalen Fall approximieren wir diesen Integralterm durch Riemannsche Summen. Dazu setzen wir für alle $j \in \mathbb{Z}$

$$u_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{jc}{n_1}, \quad w_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\pi j}{n_2} \quad \text{und} \quad h_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{j\hbar}{n_3}$$

mit $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$, $n_2 = m_2 n$ für ein $m_2 \in 4\mathbb{N}$ und $n_3 = m_3 m$ für ein $m_3 \in \mathbb{N}$. Mit dieser Notation erhalten wir für jedes Voxel $v \in \mathcal{V}$ und jedes Detektorenpaar $(A_{i_1, j_1}, A_{i_2, j_2})$ eine diskretisierte Version $\hat{M}_v^{\text{MSAS}}(A_{i_1, j_1}, A_{i_2, j_2})$ der modifizierten erwarteten Anzahl von Teilchenpaaren in $(A_{i_1, j_1}, A_{i_2, j_2})$ bei Annahme einer Positronen-Punktquelle im Pixel v . Es gilt

$$\begin{aligned} & \hat{M}_v^{\text{MSAS}}(A_{i_1, j_1}, A_{i_2, j_2}) \\ = & \sum_{k_1=(i_1-1)m_2}^{i_1 m_2 - 1} \sum_{k_2=(j_1-1)m_3}^{j_1 m_3 - 1} \sum_{l_1 \in \hat{R}_{w_{k_1}}} \sum_{l_2 = -\frac{n_2}{4}}^{\frac{n_2}{4}-1} \exp\left(-\frac{c}{n_1} \sum_{r=1}^{n_1} \alpha(k_{\frac{d}{2}}(w_{k_1}, h_{k_2}) - u_r T(w_{l_1}, w_{l_2}))\right) \\ & \cos(w_{l_2}) \left(\sum_{r=1}^{n_1} g_v(k_{\frac{d}{2}}(w_{k_1}, h_{k_2}) - u_r T(w_{l_1}, w_{l_2})) \right) \\ & \mathbf{1}_{A_{i_2, j_2}}(k_{\frac{d}{2}}(w_{k_1}, h_{k_2}) - cT(w_{l_1}, w_{l_2})) \\ + & \sum_{k_1=(i_1-1)m_2}^{i_1 m_2 - 1} \sum_{k_2=(j_1-1)m_3}^{j_1 m_3 - 1} \sum_{l_1 \in \hat{R}_{w_{k_1}}} \sum_{l_2 = -\frac{n_2}{4}}^{\frac{n_2}{4}-1} \sum_{s=1}^{n_1} \sum_{p_1=1}^{n_2} \sum_{p_2 = -\frac{n_2}{4}}^{\frac{n_2}{4}-1} \frac{\pi c}{n_1 n_2^2} \cos(w_{l_2}) \cos(w_{p_2}) \\ & \nu(k_{\frac{d}{2}}(w_{k_1}, h_{k_2}) - u_s T(w_{l_1}, w_{l_2})) \exp\left(-\frac{c}{n_1} \sum_{r=1}^s \mu(k_{\frac{d}{2}}(w_{k_1}, h_{k_2}) - u_r T(w_{l_1}, w_{l_2}))\right) \\ & \exp\left(-\frac{c}{n_1} \sum_{r=1}^{n_1} \alpha(k_{\frac{d}{2}}(w_{k_1}, h_{k_2}) - u_s T(w_{l_1}, w_{l_2}) - u_r T(w_{p_1}, w_{p_2}))\right) \\ & \zeta(T(w_{l_1}, w_{l_2}) | T(w_{p_1}, w_{p_2})) \left(\sum_{r=1}^s g_v(k_{\frac{d}{2}}(w_{k_1}, h_{k_2}) - u_r T(w_{l_1}, w_{l_2})) \right) \\ & + \sum_{r=1}^{n_1} g_v(k_{\frac{d}{2}}(w_{k_1}, h_{k_2}) - u_s T(w_{l_1}, w_{l_2}) - u_r T(w_{p_1}, w_{p_2})) \\ & \mathbf{1}_{A_{i_2, j_2}}(k_{\frac{d}{2}}(w_{k_1}, h_{k_2}) - u_s T(w_{l_1}, w_{l_2}) - cT(w_{p_1}, w_{p_2})), \end{aligned}$$

wobei wir den in beiden Summanden auftretenden Faktor $\frac{2\pi^2 c \hbar}{n_1 n_2^2 n_3}$ vernachlässigt haben.

8.3.4 Bestimmung der Systemmatrix für das Modell MSAMS im dreidimensionalen Fall

Unter Verwendung der im vorherigen Abschnitt hergeleiteten Darstellungen der Detektionsräume und der zweidimensionalen Integrale bezüglich der (Post-Streu-) Richtungen erhalten wir auf ähnliche Weise eine Formel für die modifizierte erwartete Anzahl

$\hat{M}_z^{\text{MSAMS}}(A_{i_1, j_1}, A_{i_2, j_2})$ von Teilchenpaaren in $(A_{i_1, j_1}, A_{i_2, j_2})$ bei Annahme einer Positronen-Punktquelle im Punkt $z \in C$ im Modell 3D-MSAMS mit mehrfacher Streuung. Für beliebige $i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}$ und $j_1, j_2 \in \{1, \dots, m\}$ mit $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ gilt

$$\begin{aligned}
& \hat{M}_z^{\text{MSAMS}}(A_{i_1, j_1}, A_{i_2, j_2}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4\pi)^k} \int_{2\pi \frac{(i_1-1)}{n}}^{\frac{2\pi i_1}{n}} \int_{\frac{(j_1-1)h}{m}}^{\frac{j_1 h}{m}} \int_{R_w} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^c \cdots \int_0^c \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdots \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \prod_{p=0}^k \cos w_p \\
& \exp\left(-\int_{\gamma_k} \mu(x) + \nu(x) dx\right) \prod_{p=1}^k \nu\left(k_{\frac{d}{2}}(w, b) - \sum_{r=1}^{k+1-p} s_r T(v_{k+1-r}, w_{k+1-r})\right) \\
& \prod_{p=1}^k \zeta(T(v_p, w_p) | T(v_{p-1}, w_{p-1})) \left(\int_{\gamma_k} g_z(x) dx\right) \mathbf{1}_{\{1\}}(|\text{Im}(\gamma_k) \cap D_{i_2, j_2}|) \\
& dw_0 dv_0 \cdots dw_{k-1} dv_{k-1} ds_1 \cdots ds_k dw_k dv_k db dw,
\end{aligned}$$

wobei wir abkürzend γ_k für die Pfadfunktion $\gamma_{k, \frac{d}{2}}(w, b, k, s_1, \dots, s_k, v_0, \dots, v_k, w_0, \dots, w_k) : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\gamma_k(v) = \begin{cases} k_{\frac{d}{2}}(w, b) - vT(v_k, w_k) & , v \in [0, s_1] \\ k_{\frac{d}{2}}(w, b) - s_1 T(v_k, w_k) - (v - s_1)T(v_{k-1}, w_{k-1}) & , v \in [s_1, s_1 + s_2] \\ \vdots & \\ k_{\frac{d}{2}}(w, b) - \sum_{l=1}^k s_l T(v_{k+1-l}, w_{k+1-l}) - (v - \sum_{l=1}^k s_l)T(v_0, w_0) & , v \in [\sum_{l=1}^k s_l, \infty] \end{cases}$$

geschrieben haben. Die Anordnung der Streueignisse auf den betrachteten Pfaden haben wir analog zu den Ausführungen im Abschnitt 8.3.2 vorgenommen. Man beachte, dass wir die Nummerierung der Streueignisse (aus demselben Grund wie in den vorherigen Abschnitten) entgegengesetzt zur Flugrichtung des betrachteten Teilchens und die Nummerierung der (Post-Streu-)Richtungen konsistent mit der Flugrichtung vorgenommen haben. Unter Verwendung der zuvor eingeführten Notation ergibt die Approximation dieser Integralformel durch Riemannsche Summen für jedes Voxel $v \in \mathcal{V}$ und jedes Detektorenpaar $(A_{i_1, j_1}, A_{i_2, j_2})$ eine diskretisierte Version $\hat{M}_v^{\text{MSAMS}}(A_{i_1, j_1}, A_{i_2, j_2})$ der modifizierten erwarteten Anzahl von Teilchenpaaren in $(A_{i_1, j_1}, A_{i_2, j_2})$ bei Annahme einer Positronen-Punktquelle im Pixel v . Diese besitzt die Gestalt

$$\begin{aligned}
& \hat{M}_v^{\text{MSAMS}}(A_{i_1, j_1}, A_{i_2, j_2}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{c\pi}{n_1 n_2}\right)^k \sum_{l_1=(i_1-1)m_2}^{i_1 m_2 - 1} \sum_{l_2=(j_1-1)m_3}^{j_1 m_3 - 1} \sum_{p_k \in \hat{R}_{w_{l_1}}} \sum_{q_k=-\frac{n_2}{4}}^{\frac{n_2}{4}-1} \sum_{s_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{s_k=1}^{n_1} \sum_{p_{k-1}=1}^{n_2} \sum_{q_{k-1}=-\frac{n_2}{4}}^{\frac{n_2}{4}-1} \cdots \\
& \sum_{p_0=1}^{n_2} \sum_{q_0=-\frac{n_2}{4}}^{\frac{n_2}{4}-1} \prod_{l=0}^k \cos(w_{q_l}) \prod_{l=1}^k \zeta(T(w_{p_l}, w_{q_l}) | T(w_{p_{l-1}}, w_{q_{l-1}})) \\
& \prod_{l=1}^k \nu\left(k_{\frac{d}{2}}(w_{l_1}, h_{l_2}) - \sum_{r=1}^{k+1-l} u_{s_r} T(w_{p_{k+1-r}}, w_{q_{k+1-r}})\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \exp\left(-\frac{c}{n_1} \sum_{l=1}^{n_1} \alpha\left(k_{\frac{d}{2}}(w_{l_1}, h_{l_2}) - \sum_{r=1}^k u_{s_r} T(w_{p_{k+1-r}}, w_{q_{k+1-r}}) - u_l T(w_{p_0}, w_{q_0})\right)\right. \\
& \left. - \frac{c}{n_1} \sum_{l=1}^k \sum_{r_l=1}^{s_l} \alpha\left(k_{\frac{d}{2}}(w_{l_1}, h_{l_2}) - \sum_{r=1}^{l-1} u_{s_r} T(w_{p_{k+1-r}}, w_{q_{k+1-r}}) - u_{r_l} T(w_{p_{k+1-l}}, w_{q_{k+1-l}})\right)\right) \\
& \left(\sum_{l=1}^k \sum_{r_l=1}^{s_l} g_v\left(k_{\frac{d}{2}}(w_{l_1}, h_{l_2}) - \sum_{r=1}^{l-1} u_{s_r} T(w_{p_{k+1-r}}, w_{q_{k+1-r}}) - u_{r_l} T(w_{p_{k+1-l}}, w_{q_{k+1-l}})\right)\right) \\
& + \sum_{l=1}^{n_1} g_v\left(k_{\frac{d}{2}}(w_{l_1}, h_{l_2}) - \sum_{r=1}^k u_{s_r} T(w_{p_{k+1-r}}, w_{q_{k+1-r}}) - u_l T(w_{p_0}, w_{q_0})\right) \\
& \mathbf{1}_{A_{i_2, j_2}}\left(k_{\frac{d}{2}}(w_{l_1}, h_{l_2}) - \sum_{r=1}^k u_{s_r} T(w_{p_{k+1-r}}, w_{q_{k+1-r}}) - cT(w_{p_0}, w_{q_0})\right).
\end{aligned}$$

Man beachte außerdem, dass wir den in sämtlichen Summanden auftretenden Faktor $\frac{2\pi^2 ch}{n_1 n_2^3 n_3}$ vernachlässigt haben.

8.4 Ein alternatives Auswertungsverfahren zur numerischen Implementierung

Das in den vorherigen Abschnitten Stück für Stück entwickelte Auswertungsverfahren ist eine natürliche Konsequenz aus dem stochastischen pfadbasierten Modell der Photonen-Diffusion. Das Verfahren ermöglicht eine theoretisch gangbare, praktisch jedoch sehr rechenintensive Auswertung von PET-Daten unter Berücksichtigung der realen Absorptions- und Streuungsphysik. Würde man mithilfe der oben entwickelten Formeln die Koeffizienten $(\hat{M}_v(A_j, A_k))_{v \in \mathcal{V}, j, k \in \{1, \dots, n\}, j \neq k}$ der Systemmatrix bestimmen, so könnte man bei der Auswertung je nach Datengrundlage bezüglich der Absorption und Streuung die auftretenden physikalischen Effekte in nahezu beliebiger Genauigkeit einkalkulieren. Jedoch geht die Bestimmung der Koeffizienten mit einer sehr großen Komplexität einher. Man beachte, dass bereits im zweidimensionalen Fall bei einer relativ groben Aufteilung des PET-Scanners in 128x128 Pixel und bei angenommenen 128² Detektorenpaaren insgesamt 128⁴ = 2²⁸ = 268.435.456 Koeffizienten unter Berücksichtigung sämtlicher möglicher Teilchenpfade innerhalb des Scanners berechnet werden müssen. Da die benötigte Rechenzeit im medizinischen Alltag eine überaus wichtige Rolle spielt, wäre es klug, das oben entwickelte Verfahren zu modifizieren und durch eine Rechenzeit einsparende Methode zu approximieren. Wünschenswert wäre es, für die Berechnung eines jeden Koeffizienten der Systemmatrix anstelle unzähliger Integrale über sämtliche möglichen Pfade jeweils nur ein Integral für die ungestreuten und ein Integral für die gestreuten Teilchen auswerten zu müssen.

Als Grundlage unserer Überlegungen betrachten wir das Auswertungsverfahren des auf einfache Streuung „gestutzten“ Modells 2D-MSAMS aus dem Kapitel 8.3.2. Das heißt, wir

betrachten nur die ersten beiden Summanden

$$\begin{aligned}
& \hat{M}_z^{\text{MSAMS},(0),(1)}(A_j, A_k) \\
&= \int_{\frac{2\pi(j-1)}{n}}^{\frac{2\pi j}{n}} \int_{R_w} \exp\left(-\int_{\gamma_0} \mu(x) + \nu(x) dx\right) \left(\int_{\gamma_0} g_z(x) dx\right) \\
& \quad \mathbf{1}_{\{1\}}(|\text{Im}(\gamma_0) \cap D_k|) d\varphi dw \\
&+ \int_{\frac{2\pi(j-1)}{n}}^{\frac{2\pi j}{n}} \int_{R_w} \int_0^d \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \nu\left(\frac{d}{2}\rho(w) - s\rho(\varphi)\right) \exp\left(-\int_{\gamma_1} \mu(x) + \nu(x) dx\right) \\
& \quad \zeta(\varphi|\varphi_1) \left(\int_{\gamma_1} g_z(x) dx\right) \mathbf{1}_{\{1\}}(|\text{Im}(\gamma_1) \cap D_k|) d\varphi_1 ds d\varphi dw.
\end{aligned}$$

Die erste offensichtliche Möglichkeit zur Vereinfachung wäre, die Integralformel für die Koeffizienten (wie in den vorherigen Kapiteln beschrieben) derartig grob durch Riemannsche Summen zu approximieren, dass jeder Detektor des diskreten Modells nur noch aus genau einem Punkt besteht. Dadurch würde die Summe über die Detektionspunkte (die erste Summe $\sum_{l=(j-1)a}^{ja-1}$ der Formel aus dem Kapitel 8.3.2) bei der Berechnung wegfallen und zudem für ungestreute Teilchen nur noch genau ein Pfad für die Registrierung der entsprechenden Koinzidenz möglich sein: die Verbindungsstrecke zwischen den beiden punktförmigen Detektoren. Nach dem Festlegen des Streupunktes gilt dies genauso für die einfach gestreuten Teilchen, deren Pfade durch den Anfangs-, den End- und den Streupunkt eindeutig festgelegt sind. Das Problem bei einer derartig groben Diskretisierung ist der aus der Missachtung der tatsächlichen Geometrie des PET-Scanners resultierende Informationsverlust, wodurch bei der Auswertung unbrauchbar unscharfe Bilder entstehen würden. Ziel ist es also, geeignete Gewichtsfunktionen für die Pfadintegrale zu bestimmen, mit denen bei der Auswertung mittels punktförmiger Detektoren ein wesentlicher Teil der Informationen bezüglich der Geometrie des ursprünglichen Modells erhalten bleiben.

8.4.1 Modifizierung der Systemmatrix-Koeffizienten

Zur Charakterisierung der zu bewahrenden Informationen betrachten wir zunächst ausschließlich die ungestreuten Teilchen. Im ursprünglichen Modell besitzen die Detektoren $(D_j)_{j=1,\dots,n}$ eine positive Ausdehnung, wobei an

$$D_j = \text{Im}\left(x \mapsto \frac{d}{2}\rho(x) \mid x \in \left[\frac{2\pi(j-1)}{n}, \frac{2\pi j}{n}\right)\right)$$

mit $\rho(x) = (\cos(x), \sin(x)) \in \mathbb{R}^2$ erinnert sei. Der PET-Scanner C ist in unserem Modell das Bild der Abbildung $w \mapsto \frac{d}{2}\rho(w)$ mit dem Kreisdurchmesser $d > 0$, wobei die Detektoren D_j und D_k durch die Winkelbereiche $[w_{j-1}, w_j)$ beziehungsweise $[w_{k-1}, w_k)$ mit $w_l = \frac{2\pi l}{n}$ repräsentiert werden. Sämtliche Pfade von ungestreuten Teilchenpaaren, die vom Detektorenpaar (D_j, D_k) registriert werden, verlaufen innerhalb der parallelen Verbindungsfläche der beiden Detektoren, die wir fortan mit $R_{j,k}$ bezeichnen. Zu jedem Punkt $x \in R_{j,k}$ existiert eine Schar von linearen Pfaden zwischen D_j und D_k , die durch

den Punkt x laufen. Um so tiefer der Punkt x im Inneren des PET-Scanners liegt, desto größer ist die Anzahl der Pfade, die ihn berühren. Die relative Anzahl dieser Pfade ist durch die Größe $\phi_{j,k,x}$ des entsprechenden Winkelbereichs gegeben, die wiederum von der Position des Punktes x und von der Breite $h_{j,k}$ der Verbindungsfläche $R_{j,k}$ abhängt. Zur Veranschaulichung der Terme $R_{j,k}$ und $\phi_{j,k,x}$ dient Abbildung 16.

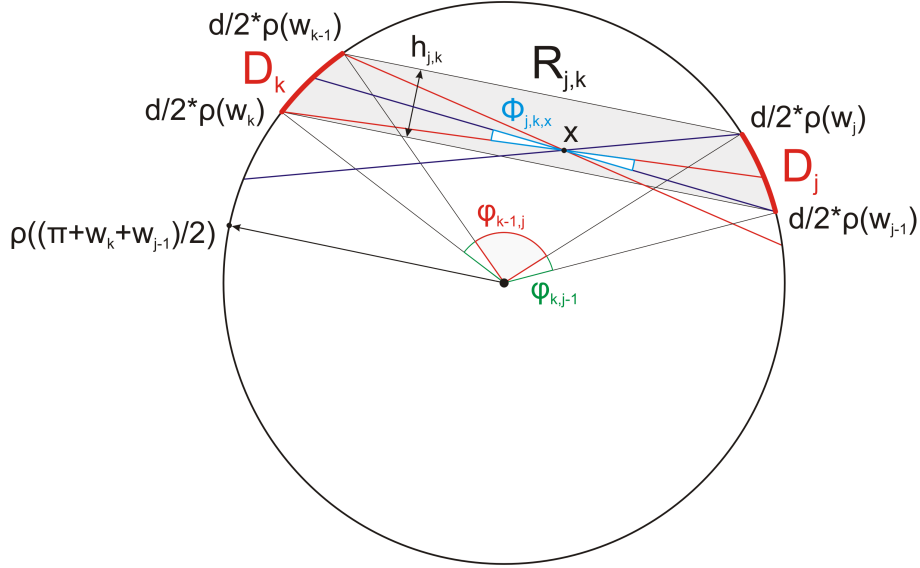


Abbildung 16: Skizze der zu einem Detektorenpaar (D_j, D_k) gehörenden Verbindungsfläche $R_{j,k}$ mit der Breite $h_{j,k}$ und dem Winkelbereich $\phi_{j,k,x}$ des Punktes $x \in R_{j,k}$.

Es gilt

$$h_{j,k} = \frac{d}{2} \left| \cos \frac{\varphi_{k,j-1}}{2} - \cos \frac{\varphi_{k-1,j}}{2} \right|$$

(Berechnung mithilfe der Erkenntnisse über die Geometrie von Kreissehnen) mit den Winkeln $\varphi_{k,j-1}$ und $\varphi_{k-1,j}$ zwischen den Vektoren $(\cos(w_k), \sin(w_k))$ und $(\cos(w_{j-1}), \sin(w_{j-1}))$ beziehungsweise $(\cos(w_{k-1}), \sin(w_{k-1}))$ und $(\cos(w_j), \sin(w_j))$, wobei wir vereinbaren, dass wir mit dem Winkel immer den *kleineren* der beiden möglichen Winkel zwischen den Vektoren meinen, also etwa

$$\varphi_{k,j-1} = \arccos(\langle (\cos(w_k), \sin(w_k)), (\cos(w_{j-1}), \sin(w_{j-1})) \rangle) < \pi.$$

Für diesen wollen wir abkürzend

$$\sphericalangle((\cos(w_k), \sin(w_k)), (\cos(w_{j-1}), \sin(w_{j-1}))) \text{ beziehungsweise } \sphericalangle(\rho(w_k), \rho(w_{j-1}))$$

schreiben. Mit dieser Notation gilt ferner

$$\phi_{j,k,x} = \min \left\{ \sphericalangle \left(x - \frac{d}{2} \rho(w_{k-1}), x - \frac{d}{2} \rho(w_j) \right), \sphericalangle \left(x - \frac{d}{2} \rho(w_k), x - \frac{d}{2} \rho(w_{j-1}) \right) \right\}.$$

Diese Größen repräsentieren das quantitative Verhältnis der Mengen der Pfade durch die Punkte $x \in R_{j,k}$. Bei der Berechnung der Koeffizienten ermöglicht uns daher die

Gewichtsfunktion

$$w_{j,k}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_{j,k,x}$$

anstelle der einzelnen Pfadintegrale nur noch das Integral über die Fläche $R_{j,k}$ zu betrachten. Nach obigen Vorüberlegungen entspricht die modifizierte erwartete Anzahl

$$\int_{\frac{2\pi(j-1)}{n}}^{\frac{2\pi j}{n}} \int_{R_w} \exp\left(-\int_{\gamma_0} \mu(x) + \nu(x) dx\right) \left(\int_{\gamma_0} g_z(x) dx\right) \mathbf{1}_{\{1\}}(|\text{Im}(\gamma_0) \cap D_k|) d\varphi dw$$

der registrierten ungestreuten Teilchenpaare des im Abschnitt 8.3.2 entwickelten Auswertungsverfahrens qualitativ dem Term

$$\begin{aligned} & \exp\left(-\int_{R_{j,k}} w_{j,k}(x)(\mu(x) + \nu(x)) dx\right) \int_{R_{j,k}} w_{j,k}(x)g_z(x) dx \\ = & \exp\left(-\int_0^d \int_0^{h_{j,k}} w_{j,k} \cdot \alpha\left(\frac{d}{2}\rho(w_{j-1}) + a\rho\left(\frac{\pi + w_k + w_{j-1}}{2}\right) + b\rho\left(\frac{w_k + w_{j-1}}{2}\right)\right) db da\right) \\ & \int_0^d \int_0^{h_{j,k}} w_{j,k} \cdot g_z\left(\frac{d}{2}\rho(w_{j-1}) + a\rho\left(\frac{\pi + w_k + w_{j-1}}{2}\right) + b\rho\left(\frac{w_k + w_{j-1}}{2}\right)\right) db da, \end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Gleichheit berücksichtigt haben, dass die zu integrierenden Funktionen $\alpha = \mu + \nu$ und g_z außerhalb des Scanners nur den Wert 0 annehmen. Ähnliches gilt für die Pfade der (einfach) gestreuten Teilchenpaare: Abhängig von der Position des Streupunktes s und der Lage der Detektoren verlaufen sämtliche Pfade von D_j nach D_k durch eine durch j, k und s eindeutig bestimmte Fläche $S_{j,s} \cup S_{k,s}$. Dabei bezeichnen $S_{j,s}$ und $S_{k,s}$ die Verbindungsflächen zwischen den Detektoren D_j beziehungsweise D_k und dem Punkt s . Abhängig von der Lage der Detektoren D_j und D_k und der Punkte s und x unterscheiden wir zwei Fälle. Zur Veranschaulichung dienen die Abbildungen 17 und 18.

Für einen Punkt $x \in S_{j,s} \cup S_{k,s}$ lässt sich die relative Anzahl der Pfade durch x und s auf ähnliche Weise wie beim ungestreuten Fall geometrisch bestimmen: Liegt x beispielsweise in $S_{j,s}$, so ist der Teilpfad innerhalb von $S_{j,s}$ durch die Punkte s und x bereits eindeutig festgelegt. Lediglich innerhalb von $S_{k,s}$ gibt es für den Pfad noch einen gewissen Spielraum, nämlich den von j, k und den Positionen der Punkte s und x eindeutig festgelegten (Streu-) Winkelbereich $[\phi_{j,k,s,x,1}, \phi_{j,k,s,x,2}]$ (Fall 1) beziehungsweise $[0, \phi_{j,k,s,x,1}]$ in die mathematisch negative und $[0, \phi_{j,k,s,x,2}]$ in die mathematisch positive Richtung (Fall 2). Man beachte, dass der zweite Fall wegen der in der Realität meistens sehr kleinen Streuwinkel häufiger auftritt als der erste. Wir definieren für beliebige $j, k \in \{1, \dots, n\}$ mit $k > j$

$$\begin{aligned} \phi_{j,k,s,x,1} & \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sphericalangle(s - x, \frac{d}{2}\rho(w_{j-1}) - s), & x \in S_{k,s} \\ \sphericalangle(s - x, \frac{d}{2}\rho(w_{k-1}) - s), & x \in S_{j,s}, \end{cases} \\ \phi_{j,k,s,x,2} & \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sphericalangle(s - x, \frac{d}{2}\rho(w_j) - s), & x \in S_{k,s} \\ \sphericalangle(s - x, \frac{d}{2}\rho(w_k) - s), & x \in S_{j,s} \end{cases} \end{aligned}$$

und

$$\phi_{j,s} \stackrel{\text{def}}{=} \sphericalangle\left(\frac{d}{2}\rho(w_{j-1}) - s, \frac{d}{2}\rho(w_j) - s\right).$$

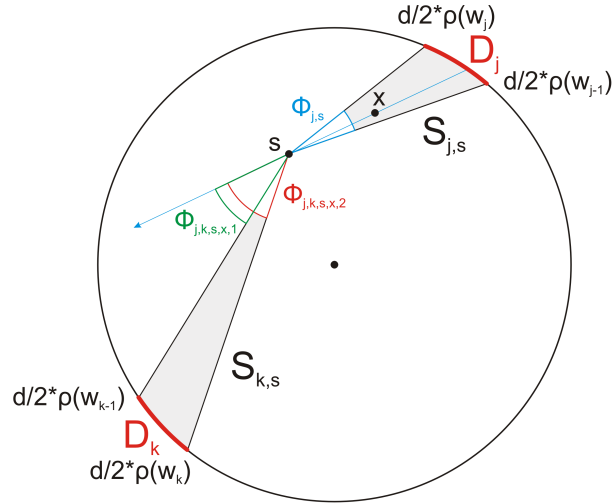


Abbildung 17: Fall 1: Skizze der zum Detektorenpaar (D_j, D_k) und dem Streupunkt s gehörenden Verbindungsfläche $S_{j,s} \cup S_{k,s}$ mit dem zu j, k, s und dem Punkt x gehörenden minimalen Streuwinkel $\phi_{j,k,s,x,1}$ und dem maximalen Streuwinkel $\phi_{j,k,s,x,2}$.

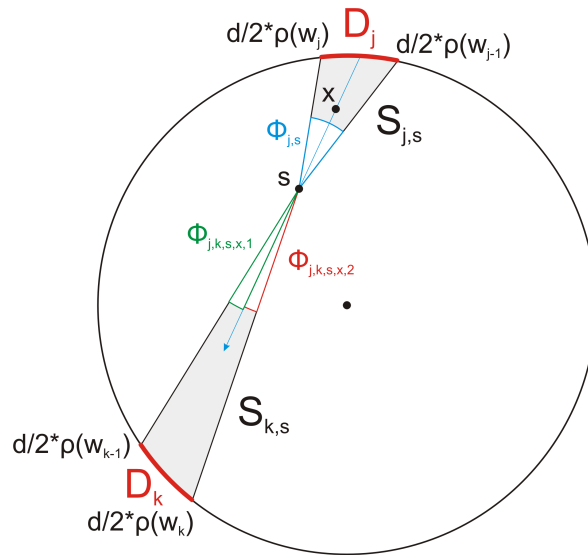


Abbildung 18: Fall 2: Verläuft der Pfad $\mathbb{R} \ni a \mapsto x + a(s - x)$ durch beide Teilflächen $S_{j,s}$ und $S_{k,s}$, so ist der minimale Streuwinkel gleich 0 und wir erhalten zwei zu j, k, s und x gehörende maximale Streuwinkel $\phi_{j,k,s,x,1}$ und $\phi_{j,k,s,x,2}$.

Mit dieser Notation können wir mit dem eindeutig bestimmten $l \in \{j, k\}$ mit $x \notin S_{l,s}$ den ersten Fall durch die Eigenschaft $\max \{\phi_{j,k,s,x,1}, \phi_{j,k,s,x,2}\} \geq \phi_{l,s}$ und den zweiten Fall durch $\max \{\phi_{j,k,s,x,1}, \phi_{j,k,s,x,2}\} < \phi_{l,s}$ charakterisieren. Da die verschiedenen Streuwinkel gemäß des Streuprozesses unterschiedliche Eintrittswahrscheinlichkeiten besitzen, müssen wir bei der Bestimmung einer geeigneten Gewichtsfunktion neben der Geometrie der Flächen $S_{j,s}$ und $S_{k,s}$ auch die (Henyey-Greensteinsche) Streufunktion h berücksichtigen.

Wir definieren die *Gewichtsfunktion*

$$I_{j,k,s}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \int_{\phi_{j,k,s,x,1}}^{\phi_{j,k,s,x,2}} h(\phi) d\phi & , \text{ falls } \max \{ \phi_{j,k,s,x,1}, \phi_{j,k,s,x,2} \} \geq \phi_{l,s} \\ \int_0^{\phi_{j,k,s,x,1}} h(\phi) d\phi + \int_0^{\phi_{j,k,s,x,2}} h(\phi) d\phi & , \text{ falls } \max \{ \phi_{j,k,s,x,1}, \phi_{j,k,s,x,2} \} < \phi_{l,s}. \end{cases}$$

Der Wert $I_{j,k,s}(x)$ repräsentiert (genau wie $w_{j,k}(x)$ für die ungestreuten Teilchen) die relative Anzahl der Pfade von D_j nach D_k mit Streupunkt s durch den Punkt x . Mit dieser Notation entspricht die modifizierte erwartete Anzahl

$$\int_{\frac{2\pi(j-1)}{n}}^{\frac{2\pi j}{n}} \int_{R_w} \int_0^d \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \nu \left(\frac{d}{2} \rho(w) - s \rho(\varphi) \right) \exp \left(- \int_{\gamma_1} \mu(x) + \nu(x) dx \right) \zeta(\varphi | \varphi_1) \left(\int_{\gamma_1} g_z(x) dx \right) \mathbf{1}_{\{1\}}(|\text{Im}(\gamma_1) \cap D_k|) d\varphi_1 ds d\varphi dw$$

der registrierten (einfach) gestreuten Teilchenpaare des im Abschnitt 8.3.2 entwickelten Auswertungsverfahrens qualitativ dem Term

$$\int_C \nu(s) \exp \left(- \int_{S_{j,s} \cup S_{k,s}} I_{j,k,s}(x) (\mu(x) + \nu(x)) dx \right) \int_{S_{j,s} \cup S_{k,s}} I_{j,k,s}(x) g_z(x) dx ds.$$

Das alternative Auswertungsverfahren verwendet also Flächenintegrale anstelle der Integrale über die einzelnen Pfade. Jedem Punkt x in der betrachteten Fläche wird ein Gewicht $w_{j,k}(x)$ (im ungestreuten Fall) beziehungsweise $I_{j,k,s}(x)$ (im einfach gestreuten Fall) zugewiesen, welches der relativen Anzahl der Pfade von D_j nach D_k durch den Punkt x (im ungestreuten Fall) beziehungsweise der relativen Anzahl der (mit der Henyey-Greensteinschen Streufunktion $h(\phi)$ des entsprechenden Streuwinkels ϕ gewichteten) Pfade von D_j nach D_k durch den Punkt x und den Streupunkt s entspricht. Wir erhalten die *modifizierte erwartete Anzahl*

$$\begin{aligned} & \tilde{M}_z^{\text{MSAMS},(0),(1)}(D_j, D_k) \\ & \stackrel{\text{def}}{=} \exp \left(- \int_{R_{j,k}} w_{j,k}(x) (\mu(x) + \nu(x)) dx \right) \int_{R_{j,k}} w_{j,k}(x) g_z(x) dx \\ & + \int_C \nu(s) \exp \left(- \int_{S_{j,s} \cup S_{k,s}} I_{j,k,s}(x) (\mu(x) + \nu(x)) dx \right) \int_{S_{j,s} \cup S_{k,s}} I_{j,k,s}(x) g_z(x) dx ds \end{aligned}$$

gemessener Teilchenpaare in (D_j, D_k) bei Annahme der Positronen-Punktquelle $z \in C$ mit der Absorptionsratenfunktion μ , der Streuratenfunktion ν und der von der Positronenreichweite abhängigen Dichte g_z des Photonenpaar-Emissionsortes. Der erste Summand entspricht gerade dem Anteil der ungestreuten Teilchenpaare und der zweite Summand dem Anteil der gestreuten Teilchenpaare. Man beachte, dass für alle j, k und z nach obigen Ausführungen

$$\tilde{M}_z^{\text{MSAMS},(0),(1)}(D_j, D_k) = K_{j,k,z} \hat{M}_z^{\text{MSAMS},(0),(1)}(A_j, A_k)$$

gilt für eine geeignete von j, k und z unabhängige Konstante $K_{j,k,z} > 0$. Daher macht es qualitativ keinen Unterschied, welche Familie von Koeffizienten wir für die Datenauswertung verwenden.

Bei der numerischen Implementierung des zweiten Summanden von $\tilde{M}_z^{\text{MSAMS},(0),(1)}(D_j, D_k)$ müssen zum einen für jeden Streupixel s und jedes Detektorenpaar (D_j, D_k) die Flächen $S_{j,s}$ und $S_{k,s}$ berechnet und zum anderen für jede Kombination $j, k \in \{1, \dots, n\}$ (mit $k > j$) und Pixel s und x die Winkel $\phi_{j,k,s,x,1}$ und $\phi_{j,k,s,x,2}$ bestimmt werden. Deswegen ist die Datenauswertung mithilfe der Koeffizienten $(\tilde{M}_z^{\text{MSAMS},(0),(1)}(D_j, D_k))_{j,k \in \{1, \dots, n\}, s \in \mathcal{V}}$ der Systemmatrix aus numerischer Sicht trotz der Verwendung der Flächenintegrale noch immer außerordentlich aufwändig. Dagegen ist jedoch zu erwähnen, dass die oben genannten Flächen und Winkel globale Konstanten des betrachteten PET-Scanners darstellen, die im Vorfeld einmalig berechnet und gespeichert werden können. Ebenso ist zu beachten, dass beim Flächenintegral der Dichte g_z des Photonenpaar-Emissionsortes (bei Annahme der Positronen-Punktquelle z) lediglich der Träger von g_z berücksichtigt werden muss, welcher bei geeigneter Verteilungsannahme eine sehr kleine Ausdehnung besitzt.

8.4.2 Approximation der modifizierten Systemmatrix-Koeffizienten

An dieser Stelle wollen wir eine Näherung der Koeffizienten $\tilde{M}_z^{\text{MSAMS},(0),(1)}(D_j, D_k)$ vorstellen, die gänzlich auf die Verwendung von Flächenintegralen verzichtet und dennoch Informationen bezüglich der ursprünglichen Scanner-Geometrie berücksichtigt. Diese Näherung erhalten wir anschaulich, indem wir die geometrische Ausdehnung $\delta = \frac{2\pi d}{2n}$ (> 0) der Detektoren gegen 0 gehen lassen. Die Detektoren werden repräsentiert durch die Kreisbogenabschnitte

$$D_j = \left\{ \frac{d}{2} \rho(a) \mid a \in (w_{j-1}, w_j] \right\} = \left\{ \frac{d}{2} \rho(w_j - a) \mid a \in [0, \delta) \right\}$$

mit $w_j = \frac{2\pi j}{n}$ für $j = 1, \dots, n$. Es gilt

$$D_j \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{d}{2} \rho(w_j) \right\}.$$

Wir setzen $d_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{2} \rho(w_j)$ und erhalten die Menge $\{d_j \mid j = 1, \dots, n\}$ der punktförmigen Detektoren. Um die gewünschte Näherung zu erhalten, betrachten wir nun den Limes $\lim_{\delta \rightarrow 0} \tilde{M}_z^{\text{MSAMS},(0),(1)}(D_j, D_k)$, wobei wir aus rechentechnischen Gründen die im Term $\tilde{M}_z^{\text{MSAMS},(0),(1)}(D_j, D_k)$ auftretenden (ebenfalls von δ abhängigen) Gewichtsfunktionen $w_{j,k} = w_{j,k,\delta}$ und $I_{j,k,s} = I_{j,k,s,\delta}$ durch Hinzufügen des Vorfaktors $\frac{1}{\delta^2}$ modifizieren. Der globale Vorfaktor hat keinen Einfluss auf die Qualität der Auswertung. Seine Verwendung führt lediglich zu einer weiteren Umskalierung der Ergebnisse.

Zur Bestimmung des obigen Grenzwertes führen wir einige Vorüberlegungen durch: Für die Breite $h_{j,k} = h_{j,k,\delta}$ der parallelen Verbindungsfläche $R_{j,k}$ der Detektoren D_j und D_k gilt offensichtlich

$$h_{j,k,\delta} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0,$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\delta} h_{j,k,\delta} \Big|_{\delta=0} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} h_{j,k,\delta} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \frac{d}{2} \left| \cos \frac{\varphi_{k,j-1}}{2} - \cos \frac{\varphi_{k-1,j}}{2} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \frac{\delta}{2} \left| \frac{\cos\left(\frac{\varphi_{k,j} + \frac{2\delta}{d}}{2}\right) - \cos\left(\frac{\varphi_{k,j}}{2}\right)}{\frac{\delta}{d}} + \frac{\cos\left(\frac{\varphi_{k,j}}{2}\right) - \cos\left(\frac{\varphi_{k,j} - \frac{2\delta}{d}}{2}\right)}{\frac{\delta}{d}} \right| \\
&= \frac{1}{2} \left| -2 \sin\left(\frac{\varphi_{k,j}}{2}\right) \right| \\
&= \sin\left(\frac{\varphi_{k,j}}{2}\right) \geq 0,
\end{aligned} \tag{13}$$

wobei wir bei der vorletzten Gleichheit die Kettenregel der Differentialrechnung verwendet haben. Sei nun für beliebige $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$d(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

die (messbare) euklidische Abstandsfunktion. Ferner definieren wir

$$d_j^{\min}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{d(x, d_{j-1}), d(x, d_j)\} \quad \text{und} \quad d_j^{\max}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{d(x, d_{j-1}), d(x, d_j)\}.$$

Für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ und $x \in C$ gilt aufgrund der Kreisgeometrie $d_j^{\max}(x) = \max\{d(x, y) \mid y \in D_j\}$. Da g_z außerhalb von C nur den Wert 0 annimmt, gilt außerdem

$$\begin{aligned}
&\int_{S_{j,s}} I_{j,k,s,\delta}(x) g_z(x) dx \\
&= \int_0^d \int_0^{h_{j,s,\delta} \frac{a}{d(s,d_j)}} I_{j,k,s,\delta} \cdot g_z\left(s + a \frac{d_j - s}{d(s,d_j)} + b\rho\left(\arccos\left(\left(\frac{d_j - s}{d(s,d_j)}\right)_1\right) - \frac{\pi}{2}\right)\right) db da
\end{aligned}$$

(wobei $\left(\frac{d_j - s}{d(s,d_j)}\right)_1$ die erste Komponente Vektors $\frac{d_j - s}{d(s,d_j)} \in \mathbb{R}^2$ bezeichne) mit der Höhe

$$h_{j,s,\delta} = \tan(\phi_{j,s,\delta}) d(s, d_j).$$

(Länge der Gegenkathete von $\phi_{j,s,\delta}$ im rechtwinkligen Dreieck

$$\Delta\left(s, d_j, s + \sqrt{h_{j,s,\delta}^2 + d(s, d_j)^2} \frac{d_{j-1} - s}{d(s, d_{j-1})}\right)$$

Dabei ist $\rho(\arccos\left(\left(\frac{d_j - s}{d(s,d_j)}\right)_1\right) - \frac{\pi}{2})$ ein auf $\frac{d_j - s}{d(s,d_j)}$ senkrecht stehender Richtungsvektor. Zur Veranschaulichung dient Abbildung 19.

Wie im ungestreuten Fall wollen wir nun den Limes $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{h_{j,s,\delta}}{\delta}$ betrachten. Für den Winkel $\phi_{j,s,\delta}$ ergibt sich mithilfe des Kosinussatzes

$$\phi_{j,s,\delta} = \arccos\left(\frac{d(s, d_j)^2 + d(s, d_{j-1})^2 - \delta^2}{2d(s, d_{j-1})d(s, d_j)}\right).$$

Dabei haben wir zur Vereinfachung angenommen, dass $d(d_{j-1}, d_j) = \delta$ gilt. Diese Vereinfachung ist in Anbetracht der späteren Grenzwertbetrachtung wegen $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{d(d_{j-1}(\delta), d_j)}{\delta} = 1$ (mit $d_{j-1}(\delta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{2}\rho(w_j - \delta)$) unproblematisch. Sei $\varphi_{j,s}$ der zum Punkt d_j gehörende Innenwinkel des Dreiecks $\Delta(s, d_j, d_{j-1})$. Dann gilt mithilfe des Kosinussatzes

$$d(s, d_{j-1})^2 = \delta^2 + d(s, d_j)^2 - 2\delta d(s, d_j) \cos \varphi_{j,s}.$$

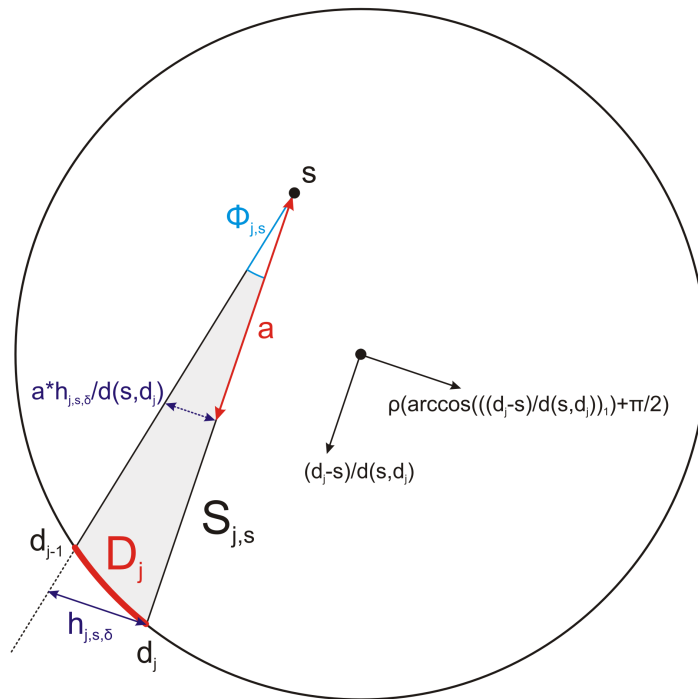


Abbildung 19: Veranschaulichung der neu eingeführten Notation.

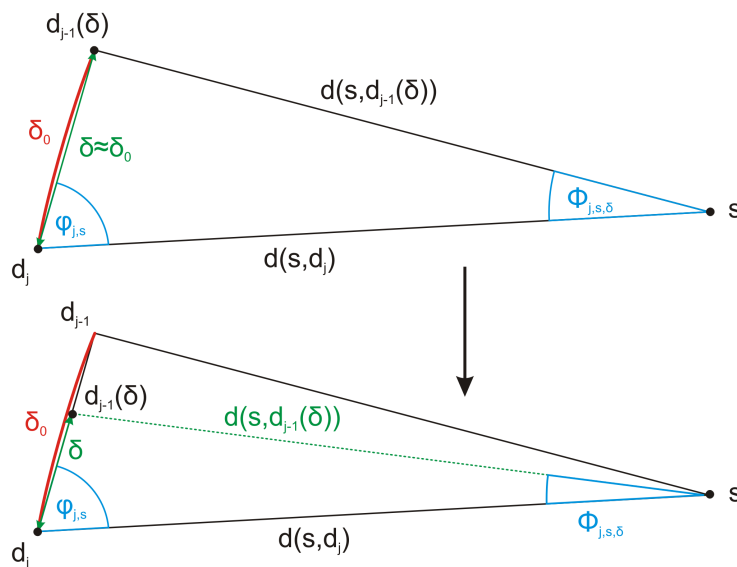


Abbildung 20: Geometrische Interpretation der Grenzwertbetrachtung $\lim_{\delta \rightarrow 0} \phi_{j,s,\delta}$.

Wir verzichten hier bewusst auf die Abhängigkeit des Winkels $\varphi_{j,s}$ von δ , da wir diesen in unserer Grenzwertbetrachtung als Konstante auffassen wollen. Dadurch bewirken wir, dass für $\delta \rightarrow 0$ der Punkt $d_{j-1}(\delta)$ entlang der Verbindungsstrecke der Punkte d_j und d_{j-1} gegen d_j wandert (vergleiche Abbildung 20).

Es gilt

$$B_{j,s} \stackrel{\text{def}}{=} \cos \varphi_{j,s} = \frac{\delta_0^2 + d(s, d_j)^2 - d(s, d_{j-1})^2}{2\delta_0 d(s, d_j)}$$

mit der *tatsächlichen Detektorausdehnung* $\delta_0 > 0$ und den *tatsächlichen Randpunkten* d_{j-1} und d_j des Detektors D_j . Mit dieser Notation erhalten wir

$$\phi_{j,s,\delta} = \arccos \left(\frac{2d(s, d_j)^2 - 2d(s, d_j)\delta B_{j,s}}{2d(s, d_j)\sqrt{\delta^2 + d(s, d_j)^2 - 2d(s, d_j)\delta B_{j,s}}} \right).$$

Für die Höhe $h_{j,s,\delta}$ gilt offensichtlich $h_{j,s,\delta} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$, sowie unter Verwendung obiger Darstellung des Winkels $\phi_{j,s,\delta}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\delta} h_{j,s,\delta} \Big|_{\delta=0} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} h_{j,s,\delta} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{d(s, d_j)}{\delta} \tan(\phi_{j,s,\delta}) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{d(s, d_j)}{\delta} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{2d(s, d_j)^2 - 2d(s, d_j)\delta B_{j,s}}{2d(s, d_j)\sqrt{\delta^2 + d(s, d_j)^2 - 2d(s, d_j)\delta B_{j,s}}} \right)^2}}{\frac{2d(s, d_j)^2 - 2d(s, d_j)\delta B_{j,s}}{2d(s, d_j)\sqrt{\delta^2 + d(s, d_j)^2 - 2d(s, d_j)\delta B_{j,s}}}} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{d(s, d_j)}{\delta} \frac{2d(s, d_j)\delta \sqrt{1 - B_{j,s}^2}}{2d(s, d_j)^2 - 2d(s, d_j)\delta B_{j,s}} \\ &= \sqrt{1 - B_{j,s}^2} \\ &= \sin \varphi_{j,s}. \end{aligned} \tag{14}$$

Wir wenden uns nun den Grenzwerten der Gewichtsfunktionen für $\delta \rightarrow 0$ zu. Im ungestreuten Fall schrumpft die parallele Verbindungsfläche $R_{j,k}$ der Detektoren D_j und D_k auf die Strecke $\{d_j + a(d_k - d_j) | a \in [0, 1]\}$. Für sämtliche Punkte x auf dieser Strecke gilt

$$w_{j,k,\delta}(x) = \phi_{j,k,x,\delta} = \mathbf{1}_{[d(x, d_k), \infty)}(d(x, d_j))\phi_{j,x,\delta} + \mathbf{1}_{[0, d(x, d_k))}(d(x, d_j))\phi_{k,x,\delta}.$$

Die Gewichtsfunktion entspricht also dem Winkel $\phi_{j,x,\delta}$, falls $d(x, d_j) \geq d(x, d_k)$, sonst dem Winkel $\phi_{k,x,\delta}$ (vergleiche Abbildung 21). Wir haben in (14) gezeigt, dass $\frac{d}{d\delta} h_{j,s,\delta} \Big|_{\delta=0} = \frac{d}{d\delta} d(s, d_j) \tan(\phi_{j,s,\delta}) \Big|_{\delta=0} = \sin \varphi_{j,s}$ gilt. Da es sich bei $h_{j,s,\delta}$ um eine Verkettung differenzierbarer Funktionen handelt, folgt daraus

$$\begin{aligned} \frac{\sin \varphi_{j,s}}{d(s, d_j)} &= \frac{d}{d\delta} \tan(\phi_{j,s,\delta}) \Big|_{\delta=0} \\ &= \frac{1}{\cos^2 \phi_{j,s,\delta} \Big|_{\delta=0}} \frac{d}{d\delta} \phi_{j,s,\delta} \Big|_{\delta=0} \\ &= \frac{d}{d\delta} \phi_{j,s,\delta} \Big|_{\delta=0}. \end{aligned} \tag{15}$$

Im (einfach) gestreuten Fall schrumpft die Fläche $S_{j,s} \cup S_{k,s}$ bei Betrachtung des Limes $\delta \rightarrow 0$ gegen den stückweise linearen Pfad $\gamma_{j,k,s} : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\gamma_{j,k,s}(a) = \begin{cases} d_j + a(s - d_j) & , a \in [0, 1] \\ s + (a - 1)(d_k - s) & , a \in (1, 2]. \end{cases}$$

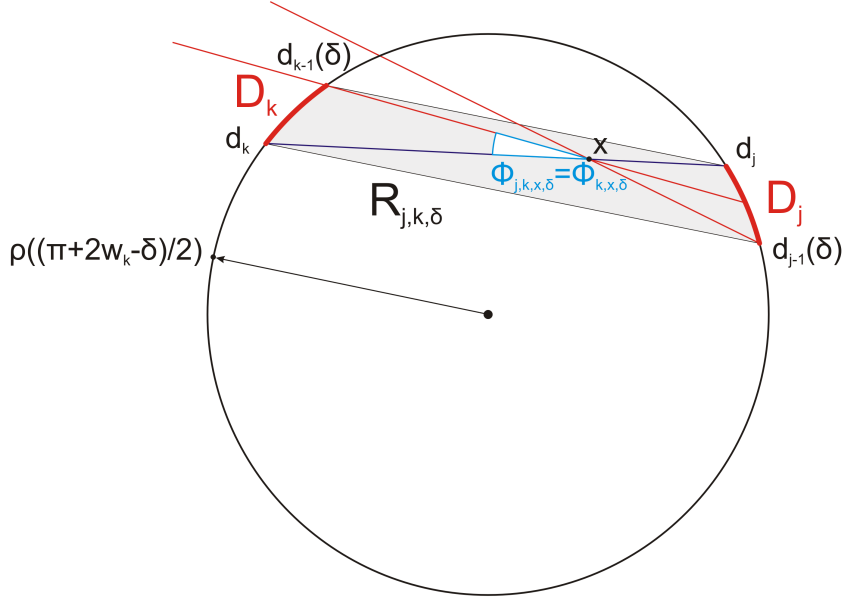


Abbildung 21: Geometrische Interpretation der Gewichtsfunktion $w_{j,k,\delta}(x) = \phi_{j,k,x,\delta}$ für einen Punkt x auf der Verbindungsstrecke der Punkte d_j und d_k .

Sei

$$\phi_{j,k,s} = \sphericalangle(s - d_j, s - d_k)$$

der Streuwinkel des Pfades $\gamma_{j,k,s}$. Für alle $x \in \text{Im}(\gamma_{j,k,s})$ können wir die Gewichtsfunktion schreiben als

$$I_{j,k,s,\delta}(x) = \begin{cases} \int_0^{\phi_{k,s,\delta}} h(\phi_{j,k,s} + \phi) d\phi & , x \in \{\gamma_{j,k,s}(y) | y \in [0, 1]\}, w_k - w_j \leq \pi \\ \int_0^{\phi_{k,s,\delta}} h(\phi_{j,k,s} - \phi) d\phi & , x \in \{\gamma_{j,k,s}(y) | y \in [0, 1]\}, w_k - w_j > \pi \\ \int_0^{\phi_{j,s,\delta}} h(\phi_{j,k,s} + \phi) d\phi & , x \in \{\gamma_{j,k,s}(y) | y \in (1, 2]\}, w_k - w_j \leq \pi \\ \int_0^{\phi_{j,s,\delta}} h(\phi_{j,k,s} - \phi) d\phi & , x \in \{\gamma_{j,k,s}(y) | y \in (1, 2]\}, w_k - w_j > \pi \end{cases}$$

(mit $h(-\phi) \stackrel{\text{def}}{=} h(\phi)$ für alle $\phi > 0$). Die zusätzliche Fallunterscheidung $h(\phi_{j,k,s} \pm \phi)$ bezieht sich auf die beiden Möglichkeiten, dass der Pfad um den Winkel $\phi_{j,k,s}$ entweder nach links oder nach rechts gestreut wird. Mithilfe der Differentiationsregel

$$\frac{d}{d\delta} \int_0^{g(\delta)} h(x) dx = h(g(\delta))g'(\delta) \quad (16)$$

und (15) ergibt sich in beiden Fällen

$$\frac{d}{d\delta} I_{j,k,s,\delta}(x) \Big|_{\delta=0} = \begin{cases} \frac{h(\phi_{j,k,s}) \sin \varphi_{k,s}}{d(s,d_k)} & , x \in \{\gamma_{j,k,s}(y) | y \in [0, 1]\} \\ \frac{h(\phi_{j,k,s}) \sin \varphi_{j,s}}{d(s,d_j)} & , x \in \{\gamma_{j,k,s}(y) | y \in (1, 2]\}. \end{cases} \quad (17)$$

Die Vorarbeit für die gewünschte Grenzwertbetrachtung ist nun abgeschlossen. Mithilfe von (13)-(17) und der Pfadfunktion $\gamma_{j,k} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\gamma_{j,k}(a) = d_j + a(d_k - d_j)$$

erhalten wir die *Näherung*

$$\begin{aligned}
& \tilde{M}_z^{\text{MSAMS},(0),(1)}(d_j, d_k) \\
\stackrel{\text{def}}{=} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \tilde{M}_z^{\text{MSAMS},(0),(1)}(D_j, D_k) \\
= & \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\exp \left(- \int_0^d \int_0^{h_{j,k,\delta}} \frac{1}{\delta^2} w_{j,k,\delta} \cdot \alpha \left(d_{j-1}(\delta) + a \rho \left(\frac{\pi + w_k + w_j - \delta}{2} \right) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + b \rho \left(\frac{w_k + w_j - \delta}{2} \right) \right) db da \right) \right. \\
& \int_0^d \int_0^{h_{j,k,\delta}} \frac{1}{\delta^2} w_{j,k,\delta} \cdot g_z \left(d_{j-1}(\delta) + a \rho \left(\frac{\pi + w_k + w_j - \delta}{2} \right) + b \rho \left(\frac{w_k + w_j - \delta}{2} \right) \right) db da \\
+ & \int_C \nu(s) \exp \left(- \int_0^d \int_0^{h_{j,k,s,\delta} \frac{a}{d(s,d_j)}} \frac{1}{\delta^2} I_{j,k,s,\delta} \cdot \alpha \left(s + a \frac{d_j - s}{d(s,d_j)} \right. \right. \\
& \left. \left. + b \rho \left(\arccos \left(\left(\frac{d_j - s}{d(s,d_j)} \right)_1 \right) - \frac{\pi}{2} \right) \right) db da \right. \\
& - \int_0^d \int_0^{h_{k,s,\delta} \frac{a}{d(s,d_k)}} \frac{1}{\delta^2} I_{j,k,s,\delta} \cdot \alpha \left(s + a \frac{d_k - s}{d(s,d_k)} + b \rho \left(\arccos \left(\left(\frac{d_k - s}{d(s,d_k)} \right)_1 \right) - \frac{\pi}{2} \right) \right) db da \\
& \left(\int_0^d \int_0^{h_{j,k,s,\delta} \frac{a}{d(s,d_j)}} \frac{1}{\delta^2} I_{j,k,s,\delta} \cdot g_z \left(s + a \frac{d_j - s}{d(s,d_j)} + b \rho \left(\arccos \left(\left(\frac{d_j - s}{d(s,d_j)} \right)_1 \right) - \frac{\pi}{2} \right) \right) db da \right. \\
& \left. + \int_0^d \int_0^{h_{k,s,\delta} \frac{a}{d(s,d_k)}} \frac{1}{\delta^2} I_{j,k,s,\delta} \cdot g_z \left(s + a \frac{d_k - s}{d(s,d_k)} + b \rho \left(\arccos \left(\left(\frac{d_k - s}{d(s,d_k)} \right)_1 \right) - \frac{\pi}{2} \right) \right) db da \right) \\
& \left. ds \right] \\
= & \exp \left(- \int_0^d \sin \left(\frac{\varphi_{k,j}}{2} \right) \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\delta} w_{j,k,\delta} \cdot \alpha \left(d_{j-1}(\delta) + a \rho \left(\frac{\pi + w_k + w_j - \delta}{2} \right) \right) \right) da \right) \\
& \int_0^d \sin \left(\frac{\varphi_{k,j}}{2} \right) \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\delta} w_{j,k,\delta} \cdot g_z \left(d_{j-1}(\delta) + a \rho \left(\frac{\pi + w_k + w_j - \delta}{2} \right) \right) \right) da \\
+ & \int_C \nu(s) \exp \left(- \int_0^d \frac{a \sin \varphi_{j,s}}{d(s,d_j)} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\delta} I_{j,k,s,\delta} \cdot \alpha \left(s + a \frac{d_j - s}{d(s,d_j)} \right) \right) da \right. \\
& - \int_0^d \frac{a \sin \varphi_{k,s}}{d(s,d_k)} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\delta} I_{j,k,s,\delta} \cdot \alpha \left(s + a \frac{d_k - s}{d(s,d_k)} \right) \right) da \\
& \left(\int_0^d \frac{a \sin \varphi_{j,s}}{d(s,d_j)} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\delta} I_{j,k,s,\delta} \cdot g_z \left(s + a \frac{d_j - s}{d(s,d_j)} \right) \right) da \right. \\
& \left. + \int_0^d \frac{a \sin \varphi_{k,s}}{d(s,d_k)} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\delta} I_{j,k,s,\delta} \cdot g_z \left(s + a \frac{d_k - s}{d(s,d_k)} \right) \right) da \right) ds \\
= & \exp \left(- \int_0^{\frac{d(d_j,d_k)}{2}} \frac{\sin \left(\frac{\varphi_{k,j}}{2} \right) \sin \left(\varphi_{k,d_j+a \frac{d_k-d_j}{d(d_j,d_k)}} \right)}{d(d_j,d_k) - a} \alpha \left(d_j + a \frac{d_k - d_j}{d(d_j,d_k)} \right) da \right. \\
& \left. - \int_{\frac{d(d_j,d_k)}{2}}^{d(d_j,d_k)} \frac{\sin \left(\frac{\varphi_{k,j}}{2} \right) \sin \left(\varphi_{j,d_j+a \frac{d_k-d_j}{d(d_j,d_k)}} \right)}{a} \alpha \left(d_j + a \frac{d_k - d_j}{d(d_j,d_k)} \right) da \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\int_0^{\frac{d(d_j, d_k)}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\varphi_{k,j}}{2}\right) \sin\left(\varphi_{k, d_j + a \frac{d_k - d_j}{d(d_j, d_k)}}\right)}{d(d_j, d_k) - a} g_z\left(d_j + a \frac{d_k - d_j}{d(d_j, d_k)}\right) da \right. \\
& + \left. \int_{\frac{d(d_j, d_k)}{2}}^{d(d_j, d_k)} \frac{\sin\left(\frac{\varphi_{k,j}}{2}\right) \sin\left(\varphi_{j, d_j + a \frac{d_k - d_j}{d(d_j, d_k)}}\right)}{a} g_z\left(d_j + a \frac{d_k - d_j}{d(d_j, d_k)}\right) da \right) \\
& + \int_C \nu(s) \exp\left(-\int_0^{d(s, d_j)} \frac{ah(\phi_{j,k,s}) \sin \varphi_{j,s} \sin \varphi_{k,s}}{d(s, d_j)d(s, d_k)} \alpha\left(s + a \frac{d_j - s}{d(s, d_j)}\right) da \right. \\
& - \left. \int_0^{d(s, d_k)} \frac{ah(\phi_{j,k,s}) \sin \varphi_{j,s} \sin \varphi_{k,s}}{d(s, d_j)d(s, d_k)} \alpha\left(s + a \frac{d_k - s}{d(s, d_k)}\right) da \right) \\
& \left(\int_0^{d(s, d_j)} \frac{ah(\phi_{j,k,s}) \sin \varphi_{j,s} \sin \varphi_{k,s}}{d(s, d_j)d(s, d_k)} g_z\left(s + a \frac{d_j - s}{d(s, d_j)}\right) da \right. \\
& + \left. \int_0^{d(s, d_k)} \frac{ah(\phi_{j,k,s}) \sin \varphi_{j,s} \sin \varphi_{k,s}}{d(s, d_j)d(s, d_k)} g_z\left(s + a \frac{d_k - s}{d(s, d_k)}\right) da \right) ds \\
& = \exp\left(-\int_0^1 \sin\left(\frac{\varphi_{k,j}}{2}\right) \left(\mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}]}(a) \frac{\sin \varphi_{k, d_j}}{1-a} + \mathbf{1}_{(\frac{1}{2}, 1)}(a) \frac{\sin \varphi_{j, d_k}}{a}\right) \alpha(\gamma_{j,k}(a)) da \right) \\
& \int_0^1 \sin\left(\frac{\varphi_{k,j}}{2}\right) \left(\mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}]}(a) \frac{\sin \varphi_{k, d_j}}{1-a} + \mathbf{1}_{(\frac{1}{2}, 1)}(a) \frac{\sin \varphi_{j, d_k}}{a}\right) g_z(\gamma_{j,k}(a)) da \\
& + \int_C \nu(s) \exp\left(-\int_0^2 h(\phi_{j,k,s}) \sin \varphi_{j,s} \sin \varphi_{k,s} \left(\mathbf{1}_{[0,1]}(a)(1-a) \frac{d(s, d_j)}{d(s, d_k)} \right. \right. \\
& \left. \left. + \mathbf{1}_{(1,2)}(a)(a-1) \frac{d(s, d_k)}{d(s, d_j)}\right) \alpha(\gamma_{j,k,s}(a)) da \right) \int_0^2 h(\phi_{j,k,s}) \sin \varphi_{j,s} \sin \varphi_{k,s} \\
& \left(\mathbf{1}_{[0,1]}(a)(1-a) \frac{d(s, d_j)}{d(s, d_k)} + \mathbf{1}_{(1,2)}(a)(a-1) \frac{d(s, d_k)}{d(s, d_j)}\right) g_z(\gamma_{j,k,s}(a)) da ds
\end{aligned}$$

der modifizierten erwarteten Anzahl gemessener Teilchenpaare in (D_j, D_k) bei Annahme der Positronen-Punktquelle $z \in C$, wobei die Existenz des Grenzwertes aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt. Aus demselben Grund darf der Limes $\lim_{\delta \rightarrow 0}$ unter die entsprechenden Integrale gezogen werden. Man beachte beim letzten Gleichheitszeichen, dass für alle $a \in [0, 1]$ nach Konstruktion $\sin \varphi_{j, \gamma_{j,k}(a)} = \sin \varphi_{j, d_k}$ gilt. Die Näherungen der Systemmatrix-Koeffizienten $(\tilde{M}_z^{\text{MSAMS},(0),(1)}(D_j, D_k))_{z \in C, j, k \in \{1, \dots, n\}, j < k}$ sind im Vergleich zu den ursprünglichen deutlich einfacher zu bestimmen, da hier anstelle von Flächen- nur noch eindimensionale Pfadintegrale ausgewertet werden. Dabei sind die Informationen bezüglich der tatsächlichen Geometrie des PET-Scanners in den Vorfaktoren der jeweiligen Integranden codiert. Mit den entsprechend den Ausführungen im Kapitel 8.3 *diskretisierten Koeffizienten* $(\tilde{M}_v^{\text{MSAMS},(0),(1)}(d_j, d_k))_{v \in \mathcal{V}, j, k \in \{1, \dots, n\}, j < k}$ erhalten wir eine effektive und zudem numerisch gangbare Auswertungsmethode für PET-Daten.

Bei Berücksichtigung von mehrfacher Streuung kommen weitere Summanden hinzu, deren Berechnung die Einbeziehung der Streuwinkel sämtlicher Streuereignisse erfordert. Im Vergleich dazu ist im dreidimensionalen Fall bereits die Bestimmung der auf dreidimensionalen Integralen basierenden Terme $(\tilde{M}_z^{\text{3D-MSAMS},(0),(1)}(D_{i_1, i_2}, D_{j_1, j_2}))_{z \in C, i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}, j_1, j_2 \in \{1, \dots, m\}, (i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)}$ (dreidimensionale Pendants zu den $(\tilde{M}_z^{\text{MSAMS},(0),(1)}(D_j, D_k))_{z \in C, j, k \in \{1, \dots, n\}, j < k}$) deutlich komplexer, da wir hier anstelle von Verbindungsflächen Verbindungsvolumina der

Detektoren (als dreidimensionale Gebilde innerhalb des zylinderförmigen PET-Scanners) betrachten müssen, deren Geometrie wiederum in die Gewichtsfunktionen und in die Vorfaktoren der Integranden der Näherungen $(\tilde{M}_z^{\text{3D-MSAMS},(0),(1)}(d_{i_1,i_2}, d_{j_1,j_2}))_{z \in C, i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}, j_1, j_2 \in \{1, \dots, m\}, (i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)}$ eingeht.

8.5 Implementierung und erste Ergebnisse der Datenauswertung

In diesem Abschnitt präsentieren wir erste Ergebnisse einer Bildrekonstruktion basierend auf dem zuvor entwickelten alternativen Auswertungsverfahren im 2D-Fall bei einfacher Streuung. Zu diesem Zweck wurden mit einer Monte-Carlo-Simulation des Diffusionsmodells insgesamt 10 Millionen Koinzidenzen für einen kreisförmigen PET-Scanner mit Radius 1 und 128 gleichmäßig auf dem Rand des Scanners verteilten Detektoren simuliert. In diesem Modell ist also $C = K_1(0)$ der Kreis mit Radius 1 um den Nullpunkt des \mathbb{R}^2 . Die Koeffizienten $\tilde{M}_z^{\text{MSAMS},(0),(1)}(d_j, d_k)$ der Systemmatrix des alternativen Auswertungsverfahrens wurden in vereinfachter Form (ohne komplette Berücksichtigung der Scanner-Geometrie) ebenfalls mithilfe einer Monte-Carlo-Simulation berechnet. Als zu rekonstruierende Quellsdichte f wählten wir die (geeignet normierte) Summe der Indikatorfunktionen dreier sich überlappender Kreise (vergleiche Abbildung 22). Weil wir die Qualität unseres Auswertungsverfahrens vor allem im Hinblick auf die Berücksichtigung von Streuereignissen beurteilen möchten, wählten wir die nicht-triviale Streuungsratenfunktion

$$\nu(x) = 4 \mathbf{1}_{K_{0,9}(0) \setminus K_{0,7}(0)}(x).$$

Auf dem Kreisring $K_{0,9}(0) \setminus K_{0,7}(0)$ haben wir also die konstante Streuungsrate 4 und im Inneren des Kreises $K_{0,7}(0)$ die konstante Streuungsrate 0 (keine Streuung). Die streuungsbedingte Lebensdauer eines Teilchenpfades innerhalb des Kreisrings $K_{0,9}(0) \setminus K_{0,7}(0)$ ist $Exp(4)$ -verteilt. Die mittlere Reichweite bis zum Eintritt eines Streuereignisses beträgt dementsprechend $\frac{1}{4}$. Als Verteilung für den Streuwinkel im Falle eines Streuereignisses (Streuverteilung) wählten wir $\arcsin(X)$ für eine auf dem Intervall $[-1, 1]$ gleichverteilte Zufallsgröße X . Dabei handelt es sich um einen reinen Vorwärtsstreuer, der ausschließlich Streuwinkel zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ zulässt. Ferner platzierten wir den Träger von f im Inneren des Scanners derart, dass er mit dem Träger von ν überlappt (vergleiche Abbildung 22). Die Dämpfungsraten ließen wir zunächst außer Acht; es gilt also $\mu = 0$. Abbildung 22 verdeutlicht den geometrischen Aufbau des Untersuchungsmediums im Inneren des simulierten PET-Scanners.

Für den Qualitätsvergleich der Auswertungsverfahren rekonstruierten wir die Quellsdichte auf Basis von 10 Millionen simulierten Koinzidenzen mit den herkömmlichen Methoden der gefilterten Rückprojektion und des MLEM-Verfahrens (vergleiche Abbildung 23 und die Ausführungen im Abschnitt 2.3) und anschließend mithilfe der Systemmatrix des von uns entwickelten statistischen Auswertungsverfahrens (vergleiche Abbildung 24). Das bei letzterem auftretende lineare Gleichungssystem lösten wir näherungsweise mithilfe des EM-Algorithmus.

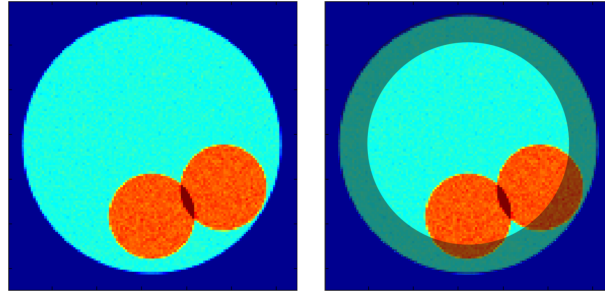


Abbildung 22: Die drei abgebildeten Kreise illustrieren den Träger der Quelldichte f , wobei f im Vergleich zum hellblauen Bereich im orangefarbenen den doppelten und im roten Schnitt der beiden kleineren Kreise den dreifachen Wert annimmt. Das rechte Bild enthält zusätzlich eine Darstellung des Trägers der Streuungsintensitätsfunktion ν , der mit dem Träger von f überlappt (dunkler Kreisring).

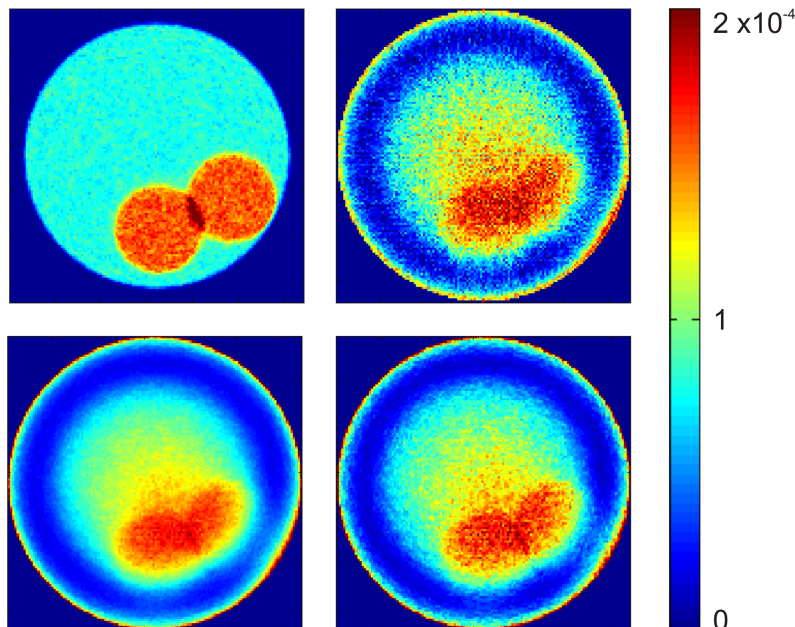


Abbildung 23: Rekonstruktion mithilfe herkömmlicher Auswertungsverfahren: Das Bild oben links ist das Ergebnis der Auswertung mithilfe des MLEM-Algorithmus für eine gesonderte Simulation ohne Streuung. Die übrigen Bilder basieren auf den simulierten Daten bezüglich der oben beschriebenen nicht-trivialen Streuungsratenfunktion ν . Das Bild oben rechts zeigt das Ergebnis der gefilterten Rückprojektion, wohingegen die Bilder unten das Ergebnis des MLEM-Algorithmus nach 15 beziehungsweise 40 Iterationen zeigen.

Sämtliche rekonstruierten Bilder besitzen eine Auflösung von 129 mal 129 Pixel. Beim Vergleich der Ergebnisse fällt die bei unserem Verfahren deutlich bessere Rekonstruktion innerhalb des kreisringförmigen Trägers der Streuungsratenfunktion ν auf. Beide herkömmlichen Methoden liefern im Überlappungsbereich der Träger von f und ν falsche Ergebnisse, da sie in diesem Bereich praktisch keine Quellen vermuten. Innerhalb des Trägers von ν bleiben die Bilder weitgehend dunkelblau. Dagegen ragt auf den Bildern

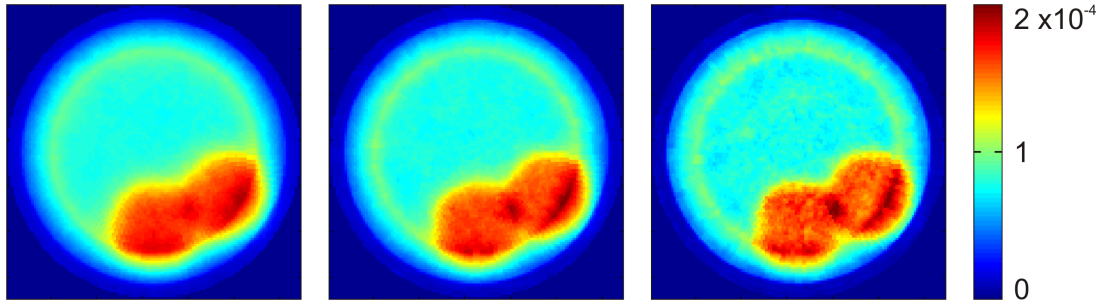


Abbildung 24: Rekonstruktion mithilfe des statistischen Auswertungsverfahrens: Das linke Bild zeigt das Ergebnis nach 30, das mittlere nach 50 und das rechte nach 100 EM-Iterationsschritten.

unseres Auswertungsverfahrens die rötliche rekonstruierte Trägerregion von f deutlich weiter in den kreisringförmigen Träger von ν hinein. Außerdem ist aufgrund der generell besseren Bildschärfe nach 50 EM-Iterationen der Überlappungsbereich der beiden inneren Trägerkreise von f als dunkelrote Fläche deutlich zu erkennen.

Obwohl unser Verfahren nach diesen ersten Ergebnissen im Hinblick auf die Berücksichtigung von Streuung offensichtlich einige Vorteile besitzt, bedarf es weiterer Untersuchungen, damit exakte quantitative Aussagen bezüglich der Qualität der rekonstruierten Bilder getroffen werden können. Obige Ergebnisse basieren auf simulierten Daten, die mithilfe einer Monte-Carlo-Simulation ohne Berücksichtigung der exakten Scanner-Geometrie erstellt wurden. Im Hinblick auf die Verwendung realer Messdaten besitzt die Berücksichtigung der exakten Scanner-Geometrie (vergleiche dazu die Ausführungen im Abschnitt 8.4) und eine realistischere Verteilungsannahme bezüglich des Streuungsprozesses größere Relevanz. Die erforderliche Rechenzeit zur Erstellung der 128^2 mal 129^2 Einträge umfassenden Systemmatrix (Anzahl der Detektorpaare mal Anzahl der Pixel) schwankt je nach verwendeter Methode zwischen mehreren Minuten (bei Berechnung der $\tilde{M}_z^{\text{MSAMS},(0),(1)}(d_j, d_k)$ wie in Abschnitt 8.4) und mehreren Stunden (bei Berechnung mithilfe einer Monte-Carlo-Simulation). Für die anschließende Lösung des linearen Gleichungssystems mithilfe des EM-Algorithmus werden dagegen nur wenige Sekunden benötigt. Es ist zu erwarten, dass durch die numerische Optimierung und Parallelisierung der verwendeten Programme zur Bestimmung der Systemmatrix-Koeffizienten auf Basis der in Abschnitt 8.4 hergeleiteten Integralformel ein Großteil der benötigten Rechenzeit eingespart werden kann. Aus numerischer Sicht besitzt die Optimierung hinsichtlich der benötigten Rechenzeit neben der Berücksichtigung der exakten Scanner-Geometrie und Streuungsphysik höchste Priorität, da die Systemmatrix aufgrund variierender Absorptions- und Streuungsratenfunktionen bei jeder Untersuchung stets neu aufgestellt werden muss.

9 Zusammenfassung und Ausblick

Ziel der vorliegenden Arbeit war die Entwicklung einer theoretischen statistischen Grundlage für zukünftige Auswertungsverfahren in der PET, deren bedeutendste Weiterentwicklung gegenüber den etablierten Methoden die Berücksichtigung des Diffusionsprozesses der Annihilationsphotonen im zugrunde liegenden Systemmodell darstellt.

Dieses Ziel wurde in zwei Arbeitsschritten erreicht. Zuerst entwickelten wir mehrere stochastische Modelle für die sich innerhalb des PET-Scanners abspielende Diffusion der Annihilationsphotonen. Durch den modularen Aufbau der Diffusionsmodelle können die verschiedenen Systemvorgaben der PET-Scanner und die physikalischen Effekte der Photonen-Diffusion in beliebig großer Genauigkeit berücksichtigt werden. Die Modelle eignen sich sowohl für den 2D- als auch für den 3D-Auswertungsmodus und ermöglichen die Berücksichtigung von sowohl konstanter als auch lokal in ihrer Intensität variierender Absorption und einfacher beziehungsweise mehrfacher Streuung innerhalb des Untersuchungsmediums. Zur Validierung der entwickelten Modelle zeigten wir ihre jeweilige Konsistenz mit der Boltzmann-Gleichung der Teilchenphysik.

Danach entwickelten wir die theoretische Grundlage für ein statistisches Auswertungsverfahren für PET-Daten auf Basis der Diffusionsmodelle. Das Verfahren besitzt dieselbe Vielseitigkeit wie die zu Grunde liegenden stochastischen Modelle und liefert eine Systemmatrix, deren Koeffizienten Informationen über den vollständigen Diffusionsprozess inklusive Absorption und Streuung enthalten. Zur Erleichterung der numerischen Implementierung und zur Reduktion des zu erwartenden Rechenaufwandes bei der Daten-Auswertung bestimmten wir schließlich eine mathematische Annäherung der Systemmatrix für den zweidimensionalen Fall mit einfacher Streuung. Diese stellt den bestmöglichen Kompromiss zwischen mathematischer Vereinfachung und gleichzeitiger Erhaltung der wesentlichen Informationen bezüglich des Diffusionsprozesses und der Scanner-Geometrie dar.

Der nächste erforderliche Schritt zur praktischen Anwendung der Ergebnisse ist offenkundig die numerische Implementierung der einzelnen Modelle und der entsprechenden Auswertungsverfahren. Bisher haben wir lediglich für den 2D-Fall mit einfacher Streuung ein vereinfachtes und damit aus numerischer Sicht relativ einfach zu handhabendes Verfahren entwickelt. An erster Stelle ist deshalb zu klären, ob auch für die komplexeren Modelle in 3D und mit mehrfacher Streuung eine ähnliche Vereinfachung der jeweiligen Auswertungsverfahren möglich ist. Da in der Praxis die Dauer der Wartezeit zwischen der Durchführung des PET-Scans und dem Eintreffen der aus den gewonnenen Daten rekonstruierten Bilder von substanzieller Bedeutung ist, sollten sich weiterführende Untersuchungen ebenso mit technischen Aspekten wie der möglichst effizienten Implementierung und Parallelisierung der entwickelten Verfahren beschäftigen. Im 3D-Fall entsteht durch die komplexere Scanner-Geometrie und die auftretenden mehrdimensionalen Integrale ein im Vergleich zum 2D-Fall wesentlich größerer Rechenaufwand. Ebenso ist zu untersuchen, wie stark und in welchen Gesichtspunkten sich die Qualität der mit unserem Verfahren

rekonstruierten Bilder von der Qualität der mit herkömmlichen Methoden rekonstruierten Bilder unterscheidet.

Eine große Verbesserungsmöglichkeit für die Qualität der rekonstruierten Bilder ist im Zuge der numerischen Implementierung des ursprünglichen nicht vereinfachten Auswertungsverfahrens zu erwarten (vergleiche Abschnitt 8.3), bei dem die tatsächliche Scanner-Geometrie in allen Einzelheiten berücksichtigt wird. Allerdings stellt angesichts des heutigen Standes der Computertechnik die daraus resultierende beachtliche Erhöhung der Komplexität ein ernstzunehmendes Problem dar. Demzufolge wird ein solches Verfahren in absehbarer Zeit nicht umsetzbar beziehungsweise nicht praktikabel sein.

In dieser Arbeit haben wir uns hauptsächlich mit dem Diffusionsprozess der Annihilationsphotonen, also mit den physikalischen Vorgängen im Inneren des PET-Scanners beschäftigt. Diese sind vor allem bei klinischen Scannern für menschliche Patienten von vorwiegender Bedeutung. Im Vergleich zu den in der Forschung eingesetzten Kleintier-PET-Scannern weist das Untersuchungsmedium bei klinischen Scannern eine Größe auf, bei der die inneren Vorgänge im Vergleich zu äußeren Einflussgrößen wie beispielsweise der Streuung in den Detektoren eine größere Relevanz besitzen. Äußere, also vom Diffusionsprozess unabhängige Einflussgrößen, zu denen neben der Streuung in den Detektoren auch Schwankungen in der Detektor-Sensitivität gehören, können bei der Datenauswertung durch die Einführung eines Fehlerterms ε in das lineare Gleichungssystem $m = Hf + \varepsilon$ berücksichtigt werden.

Des Weiteren können Zufallskoinzidenzen (Randoms) in unserem Modell nicht identifiziert werden, weil das statistische Auswertungsverfahren auf dem Diffusionsmodell im Systemgleichgewicht basiert, der zeitliche Aspekt also keine Rolle spielt. Der durch Zufallskoinzidenzen verursachte Messfehler muss daher ebenfalls durch den Fehlerterm ε ausgedrückt werden.

Das vorgestellte Diffusionsmodell besitzt durch seine umfassende stochastische Beschreibung der physikalischen Vorgänge im Inneren des PET-Scanners, insbesondere der Absorption und der Streuung, trotz dieser Einschränkungen ein großes Potenzial im Hinblick auf zukünftige praktische Anwendungen.

Symbolverzeichnis

α	Summe von μ und ν
α_k	Summe von μ_k und ν_k
A'_j	Detektionsraum des Detektors A_j
\arccos	Arkuskosinus
\arcsin	Arkussinus
$B_{j,s}$	$\cos \varphi_{j,s}$
c	Maximale Streckenlänge innerhalb eines (zylinderförmigen) PET-Scanners
C	Modell des PET-Scanners als Teilmenge des \mathbb{R}^2 beziehungsweise \mathbb{R}^3 $C = \{(a \cos w, a \sin w) \mid a \in [0, \frac{d}{2}], w \in [0, 2\pi]\}$ (2D) bzw. $C = \{(a \cos w, a \sin w, b) \mid a \in [0, \frac{d}{2}], w \in [0, 2\pi], b \in [0, h]\}$ (3D)
$(C_i)_{i=1,\dots,k}$	Gewebegruppen als disjunkte Teilmengen des PET-Scanners C
\mathcal{C}	Vereinigung der Ränder der Gewebegruppen $(C_i)_{i=1,\dots,k}$
C_i°	Topologischer offener Kern von C_i
$\overline{C_i}$	Topologischer Abschluss von C_i
\cos	Kosinus
d	Durchmesser des (kreisförmigen) PET-Scanners (2D)
$\mathcal{D}_t^{\text{MP}}$	Diffusionsmaß zum Zeitpunkt $t > 0$
\mathcal{D}^{MP}	Stationäres Diffusionsmaß
$\mathcal{D}_{t,k}^{\text{MP}}$	Diffusionsmaß zum Zeitpunkt $t > 0$ bei Annahme von k Gewebegruppen (Modelle MDA, MDAS, MDAMS)
$\mathcal{D}_k^{\text{MP}}$	Stationäres Diffusionsmaß bei Annahme von k Gewebegruppen (Modelle MDA, MDAS, MDAMS)
\mathbb{D}	Menge der zulässigen Detektorpaare
$\Delta(x, y, z)$	Dreieck mit den Endpunkten x, y, z
δ	Geometrische Ausdehnung der Detektoren (variabel)
δ_0	Tatsächliche Ausdehnung der Detektoren
$\delta_x(\cdot)$	Dirac-Maß im Punkt x
d_j	Punktförmiger Detektor des alternativen Auswertungsverfahrens bzw. tatsächlicher Detektorrandpunkt ($j = 1, \dots, n$)
$(D_j)_{j=1,\dots,n}$	Menge der Detektoren (2D)
$(D_{i,j})_{i \leq n, j \leq m}$	Menge der Detektoren (3D)
$(\hat{D}_j)_{j \leq m}$	Menge der Detektorringe $\hat{D}_j = \sum_{i=1}^n D_{i,j}$ (3D)
$d(x, y)$	Euklidischer Abstand der Punkte x und y
$d_j^{\min}(x)$	$\min \{d(x, d_{j-1}), d(x, d_j)\}$
$d_j^{\max}(x)$	$\max \{d(x, d_{j-1}), d(x, d_j)\}$
$d_{j-1}(\delta)$	$\frac{d}{2} \rho(w_j - \delta)$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Euklidisches Produkt auf \mathbb{R}^2 beziehungsweise \mathbb{R}^3
$\mathbb{E}(X)$	Erwartungswert der Zufallsgröße X
$\mathbb{E}(X A)$	Bedingter Erwartungswert der Zufallsgröße X unter dem Ereignis A
$\text{Exp}(\mu)$	Exponentialverteilung mit Parameter μ
f	Quelldichte der Positronen
γ	Pfadfunktion
G_v	$\{v \in \mathcal{V} : v \cap (K_R(z_v) \setminus K_r(z_v)) \neq \emptyset\}$
$ G_v $	Mächtigkeit der Menge G_v
$g_v(y)$	$\sum_{w \in G_v} \frac{\mathbf{1}_{\{w\}}(y)}{ G_v }$

g_z	Dichte der Verteilung der Photonenpaar-Emissionsorte bei Annahme der Positronen-Punktquelle $z \in C$
h	\mathbb{X} -Dichte der Streuwinkelverteilung (Streuungsfunktion)
$H(\theta, \phi, y)$	Funktion zur Konstruktion der neuen Richtung infolge eines Streueignisses auf der Basis der alten Richtung θ , des Streuwinkels ϕ und der Hilfsgröße y
$h_{j,k}$	Breite der Verbindungsfläche $R_{j,k}$
$h_{j,s,\delta}$	$\tan(\phi_{j,s,\delta})d(s, d_j)$
$\mathbf{1}_A$	Indikatorfunktion des Ereignisses A
$\text{Im}(g)$	Bildmenge der Funktion g
$I_{j,k,s}(x)$	Gewichtsfunktion des alternativen Auswertungsverfahrens im (einfach) gestreuten Fall
$I_u^{\mu,\nu}(x, \theta)$	$J_{t,t-u}^{\mu,\nu}(x, \theta)$ (Modell MSAS)
$J_{t,u,k}^{\mu}(x, \theta)$	$\exp\left(-\int_0^{t-u} \mu_k(x-v\theta) dv\right)$, (Modell MDA)
$J_{t,u}^{\mu}(x, \theta)$	$\exp\left(-\int_0^{t-u} \mu(x-v\theta) dv\right)$ (Modell MSA)
$I_{u,k}^{\mu}(x, \theta)$	$\exp\left(-\int_0^u \mu_k(x-v\theta) dv\right)$ (Modell MDA)
$J_{t,u,k}^{\mu,\nu}(x, \theta)$	$\exp\left(-\int_0^{t-u} \mu_k(x-v\theta) + \nu_k(x-v\theta) dv\right)$ (Modell MDAS)
$J_{t,u}^{\mu,\nu}(x, \theta)$	$\exp\left(-\int_0^{t-u} \mu(x-v\theta) + \nu(x-v\theta) dv\right)$ (modell MSAS)
$K_{t,u,m,k}(x, \theta, \theta_0)$	$\nu_k(x - (t - u - m)\theta) \exp\left(-\int_0^{t-u-m} \mu_k(x-v\theta) dv\right)$ $\exp\left(-\int_0^m \alpha_k(x - (t - u - m)\theta - v\theta_0) dv\right)$ (Modell MDAS)
$K_{t,u,m}(x, \theta, \theta_0)$	$\nu(x - (t - u - m)\theta) \exp\left(-\int_0^{t-u-m} \mu(x-v\theta) dv\right)$ $\exp\left(-\int_0^m \alpha(x - (t - u - m)\theta - v\theta_0) dv\right)$ (Modell MSAS)
$k(\cdot, \cdot, \cdot)$	Koordinatenfunktion im 3D-Fall, $k : [0, \frac{d}{2}] \times [0, 2\pi] \times [0, h] \rightarrow C$, $k(a, w, b) = (a \cos w, a \sin w, b)$
$k_{\frac{d}{2}}(w, b)$	$k(\frac{d}{2}, w, b)$
$K_R(z)$	Kreis mit Radius $R > 0$ und Mittelpunkt z
\emptyset	Leere Menge
λ	Emissionsrate der Photonen
Λ	Gleichverteilung auf S^2
$L(\varphi_1, \dots, \varphi_{n_2})$	Laplace-Verteilung auf der Menge $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n_2}\}$
\mathbb{X}	Das Lebesguemaß auf \mathbb{R}
$\lim_{n \rightarrow \infty}$	Limes für n gegen unendlich
L_n^{\pm}	Lebensdauer des n -ten \oplus - beziehungsweise \ominus -Teilchens bezüglich Absorption (Modelle MA, MASE, MAS und MAMS)
$L_j(x, \theta)$	$Exp(\mu_{k,j-1}(x, \theta))$ -verteilte j -te Teillebensdauer des Pfades $0 > u \mapsto x + u\theta$
$L_{u,m}(x, \theta, \theta_0)$	$K_{t,t-u,m}(x, \theta, \theta_0)$ (Modell MSAS)
M_n^{\pm}	Lebensdauer des n -ten \oplus - beziehungsweise \ominus -Teilchens bezüglich Streuung (Dauer bis zum Streueignis im Modell MAS)
$(M_n^{\pm}(t))_{t \geq 0}$	Streuungsprozess des n -ten \oplus - beziehungsweise \ominus -Teilchens im Modell MAMS
MP	Modellparameter
M	MP des Diffusionsmodells ohne Absorption und Streuung
MA	MP des Diffusionsmodells mit konstanter Absorptionsrate und ohne Streuung

MASE	MP des Diffusionsmodells mit konstanter Absorptionsrate und einfacher Streuung am Emissionsort
MAS	MP des Diffusionsmodells mit konstanter Absorptionsrate und konstanter Streuungsrate (einfache Streuung)
MAMS	MP des Diffusionsmodells mit konstanter Absorptionsrate und konstanter Streuungsrate (mehrfache Streuung)
MDA	MP des Diffusionsmodells mit treppenförmiger Absorptionsratenfunktion und ohne Streuung
MDAS	MP des Diffusionsmodells mit treppenförmiger Absorptions- und Streuungsratenfunktion (einfache Streuung)
MDAMS	MP des Diffusionsmodells mit treppenförmiger Absorptions- und Streuungsratenfunktion (mehrfache Streuung)
MSA	MP des Diffusionsmodells mit stetiger Absorptionsratenfunktion und ohne Streuung
MSAS	MP des Diffusionsmodells mit stetiger Absorptions- und Streuungsratenfunktion (einfache Streuung)
MSAMS	MP des Diffusionsmodells mit stetiger Absorptions- und Streuungsratenfunktion (mehrfache Streuung)
μ	Globale Absorptionsrate, stetige Absorptionsratenfunktion
μ_k	Treppenförmige Absorptionsratenfunktion bei k Gewebegruppen
$\mu_{k,j-1}(x, \theta)$	Die auf dem j -ten Teilstück des Strahles $\{x + u\theta \mid u \geq 0\}$ geltende Absorptionrate (bei k Gewebegruppen)
$m(x, \theta, t)$	$\max\{j \mid S_j(x, \theta) < t\}$
$M_{z,t}^{\text{MP}}(A, B)$	Erwartete Anzahl der vom Detektorpaar (A, B) bis zum Zeitpunkt t registrierten Teilchenpaare bei Annahme der Positronen-Punktquelle $z \in C$
$M_z^{\text{MP}}(A, B)$	Erwartete Anzahl der vom Detektorpaar (A, B) registrierten Teilchenpaare im Systemgleichgewicht bei Annahme der Positronen-Punktquelle $z \in C$
$M_v^{\text{MP}}(A, B)$	Diskrete Version der erwarteten Anzahl der vom Detektorpaar (A, B) im Systemgleichgewicht registrierten Teilchenpaare bei Annahme einer Positronen-Punktquelle im Pixel/Voxel $v \in \mathcal{V}$
$\hat{M}_z^{\text{MP}}(A, B)$	Modifizierte erwartete Anzahl der vom Detektorpaar (A, B) registrierten Teilchenpaare im Systemgleichgewicht bei Annahme der Positronen-Punktquelle $z \in C$
$\hat{M}_v^{\text{MP}}(A, B)$	Diskrete Version der modifizierten erwarteten Anzahl der vom Detektorpaar (A, B) im Systemgleichgewicht registrierten Teilchenpaare bei Annahme einer Positronen-Punktquelle im Pixel/Voxel $v \in \mathcal{V}$
$\tilde{M}_z^{\text{MSAMS},(0),(1)}(D_j, D_k)$	Modifizierte erwartete Anzahl gemessener Teilchenpaare in (D_j, D_k) bei Annahme der Positronen-Punktquelle $z \in C$ (Alternatives Auswertungsverfahren)
$\tilde{M}_z^{\text{MSAMS},(0),(1)}(d_j, d_k)$	Näherung der modifizierten erwarteten Anzahl gemessener Teilchenpaare in (D_j, D_k) bei Annahme der Positronen-Punktquelle $z \in C$ (Alternatives Auswertungsverfahren)
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{N}_0	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$(N(t))_{t \geq 0}$	Emissionsprozess

$\mathcal{N}_t^{\text{MP}}$	Zufälliges Punktmaß des Modells MP zum Zeitpunkt $t > 0$
ν	Globale Streuungsrate, stetige Streuungsratenfunktion
ν_k	Treppenförmige Streuungsratenfunktion bei k Gewebegruppen
$\mathcal{O}(n^2)$	Symbol für ein skalares Vielfaches von n^2
\mathbb{P}	Wahrscheinlichkeitsmaß
\mathbb{P}^X	Bildmaß $\mathbb{P}(X \in \cdot)$ der Zufallsvariable X unter dem Maß \mathbb{P}
$\mathbb{P}(A B)$	Bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignis A unter dem Ereignis B
$\mathbb{P}(X Y)$	Bedingte Verteilung der Zufallsvariable X unter der Zufallsvariable Y
$\mathbb{P}^{B_n^\pm}$	Streuverteilung des n -ten \oplus - beziehungsweise \ominus -Teilchens im Modell MASE
\mathbb{P}^{X_n}	Quellverteilung
π	Die Kreiszahl
Φ_n^\pm	Streuwinkel des n -ten \oplus - beziehungsweise \ominus -Teilchens (Modelle MASE und MAS)
$\Phi_{n,k}^\pm$	Streuwinkel des k -ten Streueignisses des n -ten \oplus - beziehungsweise \ominus -Teilchens (Modell MAMS)
$\phi_{j,k}$	Winkel zwischen $\rho(w_j)$ und $\rho(w_k)$ ($j, k \in \{1, \dots, n\}, j \neq k$)
$\phi_{j,k,s,x,1}$	Der zu den Detektoren D_j und D_k und den Punkten s und x gehörende minimale Streuwinkel
$\phi_{j,k,s,x,2}$	Der zu den Detektoren D_j und D_k und den Punkten s und x gehörende maximale Streuwinkel
$\phi_{j,s}$	Der zum Punkt s gehörende Innenwinkel des Dreiecks $\Delta(s, d_j, d_{j-1})$
$\phi_{j,s,\delta}$	Der zum Punkt s gehörende Innenwinkel des Dreiecks $\Delta(s, d_j, d_{j-1}(\delta))$
$\phi_{j,k,s}$	Streuwinkel des Pfades von d_j nach d_k mit Streupunkt s
φ_l	Diskrete Richtungskomponente, $\varphi_l = \rho(w_l)$ für $l = 1, \dots, n_2$ (2D)
$\varphi_{j,s}$	Der zum Punkt d_j gehörende Innenwinkel des Dreiecks $\Delta(s, d_j, d_{j-1})$
\prod	Produkt
Q	Produktmaß $\mathbb{K}^2 \otimes U(0, 2\pi)$ (im zweidimensionalen Fall) bzw. $\mathbb{K}^3 \otimes \Lambda$ (im dreidimensionalen Fall)
\mathbb{Q}	Körper der rationalen Zahlen
r	Minimale Positronen-Reichweite
R	Maximale Positronen-Reichweite
\mathbb{R}	Körper der reellen Zahlen
ρ	Funktion $\rho : [0, 2\pi] \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$, $\rho(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$
$\rho(\Theta)$	Richtung im 2D-Fall (hier: $\Theta \sim U(0, 2\pi)$)
R_w	Menge der abhängig von $w \in [0, 2\pi]$ zulässigen Repräsentanten von Richtungen (2D)
\hat{R}_w	Diskrete Version von R_w , $\hat{R}_w = R_w \cap \{w_1, \dots, w_{n_2}\}$
\mathcal{R}	$\{\varphi_j j = 1, \dots, n_2\}$ (Menge der Richtungen im diskreten Fall (2D))
\mathcal{R}_w	Menge der abhängig von $w \in [0, 2\pi]$ zulässigen Repräsentanten von Richtungen (3D), $\mathcal{R}_w = \{T(w_1, w_2) w_1 \in R_w, w_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$
$R_{j,k}$	Parallele Verbindungsfläche der Detektoren D_j und D_k
S^2	Einheitssphäre des \mathbb{R}^3
\sin	Sinus

$S_{n,k}^\pm$	k -ter Streuzeitpunkt des n -ten \oplus - beziehungsweise \ominus -Teilchens im Modell MAMS
$\Delta S_{n,k}^\pm$	k -te Zwischenstreuzeit des n -ten \oplus - beziehungsweise \ominus -Teilchens im Modell MAMS
$S_j(x, \theta)$	Länge der Verbindungsstrecke zwischen x und dem j -ten Schnittpunkt (von x aus gesehen in Richtung θ) des Strahles $\{x + u\theta \mid u \geq 0\}$ mit \mathcal{C}
$S_{j,s}$	Verbindungsfläche zwischen dem Detektor D_j und dem Punkt s
\sum	Summe
$T(\cdot, \cdot)$	Sphärenabbildung, $T(\Phi, \Theta) = (\cos \Phi \cos \Theta, \sin \Phi \cos \Theta, \sin \Theta) \in S^2$
\tan	Tangens
T_n	Emissionszeit des n -ten \oplus - beziehungsweise \ominus -Teilchens
$\pm \Theta_n$	Emissionsrichtung des n -ten \oplus - beziehungsweise \ominus -Teilchens
$\Theta_{n,k}^\pm$	Richtung des n -ten \oplus - beziehungsweise \ominus -Teilchens nach dem k -ten Streuereignis
$U(a, b)$	Gleichverteilung (Rechteckverteilung) auf dem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$
u_l	$\frac{ld}{n_1}$ für $l \in \mathbb{N}$ (diskrete Ort/Zeit-Komponente (2D))
u_t^{MP}	Q -Dichte des Diffusionsmaßes zum Zeitpunkt $t > 0$
u^{MP}	Q -Dichte des stationären Diffusionsmaßes
$u_t^{\text{MP},(1)}$	Q -Dichte der erwarteten Anzahl nicht gestreuter Teilchen zum Zeitpunkt t (Modelle MAS, MDAS, MSAS)
$u_t^{\text{MP},(2)}$	Q -Dichte der erwarteten Anzahl gestreuter Teilchen zum Zeitpunkt t (Modelle MAS, MDAS, MSAS)
$u_t^{\text{MP},(n)}$	Q -Dichte der genau n -fach gestreuten Teilchen zum Zeitpunkt t ($n \in \mathbb{N}_0$, Modelle MAMS, MDAMS, MSAMS)
\mathcal{V}	Menge der Pixel (2D) bzw. Voxel (3D) des diskretisierten Modells des PET-Scanners, $\mathcal{V} = \mathcal{W} \cap \mathcal{C}$
\mathcal{W}	Menge der Pixel (2D) bzw. Voxel (3D)
w_l	$\frac{2\pi^l}{n_2}$ für $l = 1, \dots, n_2$
$w_{j,k}(x) = \phi_{j,k,x}$	Der zum Punkt $x \in R_{j,k}$ gehörende Winkelbereich (Gewichtsfunktion des alternativen Auswertungsverfahrens im ungestreuten Fall)
$\sphericalangle(x, y)$	Eindeutig bestimmter Winkel $\leq \pi$ zwischen den Vektoren x und y
X_n	Emissionsort des n -ten \oplus - beziehungsweise \ominus -Teilchens
Y_n^\pm	Hilfsgröße zur Konstruktion der der neuen Richtung infolge eines Streuereignisses für das n -te \oplus - beziehungsweise \ominus -Teilchen (Modelle MASE und MAS)
$Y_{n,k}^\pm$	Hilfsgröße zur Konstruktion der der neuen Richtung infolge des k -ten Streuereignisses für das n -te \oplus - beziehungsweise \ominus -Teilchen (Modell MAMS)
$(Y_n^\pm(t))_{t>T_n}$	Teilchenprozess des n -ten \oplus - beziehungsweise \ominus -Teilchens
$\zeta(\cdot \mid \theta_0)$	Λ -Dichte der Post-Streu-Richtung bei gegebener Prä-Streu-Richtung θ_0
z_v	Repräsentant des Pixels bzw. Voxels v
\mathcal{Z}	Zählmaß auf der Menge \mathcal{W}
\mathbb{Z}	Ring der ganzen Zahlen

Literatur

- [Ale] A. ALESSIO, P. KINAHAN, *PET Image Reconstruction*, In: Nuclear Medicine (2. Auflage), Elsevier, Philadelphia (2006)
- [Als1] G. ALSMEYER, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Skripten zur Mathematischen Statistik, Nr. 30, 3. Auflage, Universität Münster (2003)
- [Bar] H.H: BARRETT, W. SWINDELL, *Radiological Imaging*, Academic Press, New York (1981)
- [Ber] M. BERGSTRÖM ET AL., Correction for scattered radiation in a ring detector position camera by integral transformation of the projections, *Journal Comput. Assist. Tomogr.*, Nr. 7, 42-50 (2002)
- [Cox] D.R. COX, *Point Processes*, Chapman and Hall, London (1980)
- [Dau] M.E. DAUBE-WITHERSPOON, G. MUEHLLEHNER, Treatment of axial data in 3D PET, *Journal of Nuclear Medicine*, Nr. 28, 1717-1724 (1987)
- [Def] M. DEFRISE, P.E. KINAHAN, D.W. TOWNSEND, C. MICHEL, M. SIBOMANA, D.F. NEWPORT, Exact and Approximate Rebinning Algorithms for 3D PET Data, *IEEE Trans Med Imaging*, Nr. 16, 145-158 (1997)
- [Dor] O. DORN, *Das inverse Transportproblem in der Lasertomographie*. Preprints Angewandte Mathematik und Informatik, Universität Münster (1997)
- [Hen1] L.G. HENYEY, J.L. GREENSTEIN, Diffuse radiation in the galaxy, *Astrophysical Journal*, Nr. 93, 70-83 (1941)
- [Hen2] F. HENSEL, *Methodische Untersuchungen zum Einsatz von Positronenemittern für die Dichtebestimmung in leichten Medien*. Dissertation, Technische Universität Dresden (1999)
- [Her] G.T. HERMAN, Image reconstruction from projections, *Academic Press, New York* (1980)
- [Hud] H.M. HUDSON, R.S. LARKIN, Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projection data, *IEEE Trans Med Imaging*, Nr. 13, 601-609 (1994)
- [Kak] A.C. KAK, M. SLANEY, Principles of Computerized Tomographic, *IEEE Press, New York* (1988)
- [Kin1] P.E. KINAHAN, J.G. ROGERS, Analytic 3D image reconstruction using all detected events, *IEEE Trans Nuclear Science*, Nr. 36, 964-968 (1989)
- [Kin2] J.F.C. KINGMAN, *Poisson Processes*, Oxford University Press, New York (1993)

- [Lea] R. LEAHY, J. QI, Statistical Approaches in Quantitative PET, *Statistics and Computing*, Nr. 10 (2000)
- [Nat1] F. NATTERER, F. WÜBBELING, Mathematical Methods in Image Reconstruction, *SIAM, Philadelphia* (2001)
- [Nat2] F. NATTERER, *The Mathematics of Computerized Tomography*, Wiley, New York (1986)
- [Nat3] F. NATTERER, F. WÜBBELING, *Scatter Correction in PET Based on Transport Models*, Universität Münster (2004)
- [Oll1] J.M. OLLINGER, Model-Based Scatter Correction for Fully 3D PET, *Physics in Medicine and Biology*, Nr. 41, 153-176 (1996)
- [Oll2] J.M. OLLINGER, J.A. FESSLER, Positron-emission tomography, *IEEE Signal Processing Magazine*, Nr. 14, 43-55 (1997)
- [Rei] R. REISS, *A Course on Point Processes*, Springer, New York (1993)
- [She] L. SHEPP, Y. VARDI, Maximum Likelihood Reconstruction for Emission Tomography, *IEEE Trans Med Imaging*, Nr. MI-1, 113-122 (1982)
- [Wer1] A. WERLING, *Modellbasierte Korrektur der Streustrahlung in der Positronen-Emissions-Tomographie*, Dissertation, Universität Heidelberg (2001)
- [Wer2] M. WERNICK, J. AARSVOLD, *Emission Tomography: Fundamentals of PET and SPECT*, Elsevier, San Diego (2004)
- [Wil] S. WILLMANN, *Bestimmung optischer Konstanten zur Beschreibung der Laserlicht-Gewebe Wechselwirkung*, Universität Düsseldorf (1996)
- [Wol] S.C. WOLLENWEBER, Parameterization of a Model-Based 3-D PET Scatter Correction, *IEEE Trans Nuclear Science*, Nr. 49, 722-727 (2002)
- [Wüb] F. WÜBBELING, *Quick Derivation of the Transport Equation*. Universität Münster

Lebenslauf

Name Sebastian Gebennus
Geburtsdatum: 25.02.1981
Geburtsort: Essen
Familienstand: ledig
Nationalität: deutsch
Vater: Günter Gebennus
Mutter: Helga Gebennus, geb. Hohmann

Schulbildung

1987 – 1991 St. Suitbert Grundschule in Essen
1991 – 2000 Gymnasium Essen Überrauch in Essen

Hochschulreife (Abitur)

06.06.2000 in Essen

Studium

2001 – 2006 Mathematik (Schwerpunkt Stochastische Prozesse) mit Nebenfach Betriebswirtschaftslehre an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

Prüfungen

17.05.2006 Diplom-Prüfung im Fach Mathematik mit Nebenfach Betriebswirtschaftslehre an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

Berufliche Tätigkeiten

2000 – 2001 Zivildienst an der Kindertagesstätte Vogel-von-Falkenstein-Straße der Caritas in Münster
2002 Betriebswirtschaftliches Praktikum im AUDI Zentrum Essen
2004 Betriebswirtschaftliches Praktikum bei Siemens, Abteilung Industrial Solutions and Services I&S IT PS Center West in Düsseldorf
2005 – 2006 Studentische Hilfskraft am Institut für Mathematische Statistik der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster
2006 – 2009 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mathematische Statistik der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster und im Sonderforschungsbereich 656 Molekulare Kardiovaskuläre Bildgebung in Münster

Dissertation

Beginn: Juni 2006
Institut: Institut für Mathematische Statistik
Betreuer: Prof. Dr. Gerold Alsmeyer

25. Juni 2009