Galton-Watson-Bäume und ihre Verwendung zum Beweis klassischer Grenzwertsätze für Verzweigungsprozesse

Diplomarbeit

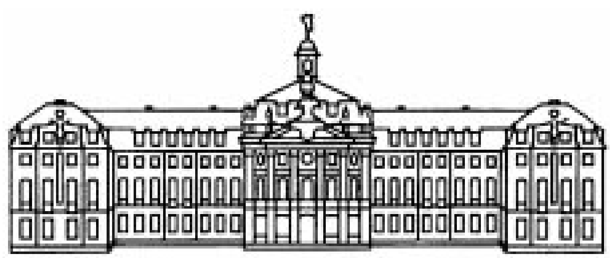
vorgelegt von

Dirk Kuhlbusch

Thema gestellt von

Prof. Dr. G. Alsmeyer

26. November 2001



Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Mathematische Statistik

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In der klassischen Theorie der Galton-Watson-Prozesse (GWP) basieren asymptotische Verteilungsaussagen zumeist auf der Analyse der zugehörigen erzeugenden Funktionen (☞ [Als3], [AH], [AN], [Har], [Jag]). Eine solche Sichtweise hat den Vorteil, daß sich die rekursive Struktur und gewisse Unabhängigkeitseigenschaften des betrachteten Prozesses, der zumeist mit $(Z_n)_{n\geq 0}$ bezeichnet wird, in günstiger Weise in brauchbare Eigenschaften dieser analytischen Transformierten übersetzen lassen. Insbesondere durch geeignete Taylor-Entwicklungen 1. oder 2. Ordnung dieser analytischen Werkzeuge gelangt man dann relativ schnell zu den gewünschten Aussagen, wobei der technische Anspruch in akzeptablen Grenzen bleibt. Ferner erlaubt eine Modifikation dieses analytisch geprägten Zugangs auch die Untersuchung gewisser Verallgemeinerungen von Galton-Watson-Prozessen; als Beispiel können hier *Galton-Watson-Prozesse mit Immigration* genannt werden (☞ [Als3], Kapitel II).

Andererseits verhindert diese Reduktion auf analytische und wenig intuitive Argumente ein tieferes Verständnis des betrachteten Prozesses: Man erkennt zwar, wie sich GWP asymptotisch verhalten, aber nicht warum, da die so geführten Beweise kaum eine probabilistische Interpretation zulassen.

Hier setzt nun die vorliegende Arbeit an und stellt verschiedene konzeptionelle Beweismethoden für weitestgehend wohlbekannte Grenzwertsätze vor. Dazu halte man sich vor Augen, daß GWP ja gerade das Langzeitverhalten einer nicht näher spezifizierten Population unter stark idealisierten Bedingungen beschreiben. Daher nehmen wir in dieser Arbeit einen eher genealogisch orientierten Standpunkt ein, d.h. wir stützen unsere Untersuchungen größtenteils auf die Betrachtung des resultierenden Populationsstammbaums T. Dies impliziert, daß wir – im Gegensatz zum zumeist verwendeten *Standardmodell* – die Individuen der Population formal unterscheiden und auch auf Verwandtschafts- und Abstammungsbeziehungen zwischen diesen zurückgreifen.

Ziel dieser Arbeit ist es somit nicht, bekannte Grenzwertsätze zu verschärfen oder gar neue asymptotische Aussagen zu gewinnen, sondern solche Beweise bekannter Konvergenzsätze vorzustellen, die ein tieferes und anschaulicheres Verständnis ermöglichen und eine intuitive Interpretation gestatten.

Dazu führen wir im ersten Kapitel den zu untersuchenden Galton-Watson-Prozeß formal ein und stellen einige im Rahmen späterer Untersuchungen benötigte elementare Eigenschaften vor, wobei wir wie im Rest der Arbeit gewisse Trivialfälle a priori ausschließen und uns auf die o.a. Werke stützen.

Im zweiten Kapitel werden wir den oben erwähnten Populationsstammbaum T, den sogenannten *Galton-Watson-Baum (GWB)*, exakt definieren, diesen selbst als Zufallsvariable mit einem gewissen Wertebereich $\mathbb{T}$ auffassen und einige grundlegende Eigenschaften diskutieren, die im weiteren Verlauf von Bedeutung sind.

Das dritte und umfangreichste Kapitel dieser Arbeit widmet sich einer von R. Lyons, R. Pemantle und Y. Peres (☞ [LP], Chapter 10; [LPP]) entwickelten Methode zum Beweis klassischer Grenzwertsätze. Neben den beiden ersten, vorbereitenden Kapiteln stützen wir uns wesentlich auf zwei noch einzuführende Hilfsmittel, namentlich die bereits zu Beginn erwähnten *GWP mit Immigration (GWPI)* und sogenannte *größenverzerrte GWB mit Rückgrat*. Präziser formuliert, konstruieren wir einen unendlichen zufälligen Baum $\widehat{T}$ (den wir ebenfalls als $\mathbb{T}$-wertige Zufallsvariable auffassen), in dem ein zufälliger Pfad, das Rückgrat, besonders ausgezeichnet ist. Unsere Untersuchung beruht dann auf einem Maßvergleich zwischen den Verteilungen von T und $\widehat{T}$, wobei wir die Generationsgrößen dieses größenverzerrten Baumes mit einem geeigneten GWPI assoziieren und so asymptotische Verteilungsaussagen für diesen Prozeß, die wir zu Beginn des Kapitels beweisen, zu Rate ziehen können.

Das vierte Kapitel befaßt sich mit neuen Beweisen klassischer bedingter Grenzwertsätze. Das dazu angewandte Verfahren wurde von J. Geiger (☞ [Gei1]) entwickelt und basiert auf folgender Überlegung: Da wir in diesem Kapitel die Verteilungen von Z_n gegeben $Z_n > 0$ untersuchen, existiert bei festem n für jedes $k \leq n$ ein eindeutig bestimmtes „kleinstes" Individuum in Generation k, das Nachfahren in Generation n hat. Indem wir den bedingten GWB entlang dieser „Ahnenlinie" zerlegen (dies wird von J. Geiger treffend als „Zersägen" bezeichnet), erhalten wir rekursiv eine Folge zufälliger Bäume $(\mathcal{T}^n)_{n\geq 0}$, so daß einerseits $\mathcal{T}^n$ für jedes n eine Kopie von T gegeben $Z_n > 0$ bildet und andererseits die Folge $(\mathcal{T}^n)_{n\geq 0}$ eine geeignete Abhängigkeitsstruktur besitzt, die uns die Analyse erheblich erleichtert.

Im fünften Kapitel liefern wir einen weiteren probabilistischen Beweis für den sogenannten *exponentiellen Grenzwertsatz von Yaglom*. Der vorgestellte Beweisansatz stammt ebenfalls von J. Geiger (☞ [Gei2]) und basiert auf der folgenden Zerlegung von Z_n auf $\{Z_n > 0\}$: Besitzt der letzte gemeinsame Vorfahr aller Individuen der n-ten Generation S_n Kinder, die selbst Nachfahren in Generation n haben, und bezeichnen wir diese Anzahl von Nachfahren mit $Y_{n,1}, \ldots , Y_{n,S_n}$, so gilt $Z_n = \sum_{j=1}^{S_n} Y_{n,j}$. Für eine geeignete Reskalierung dieser Summe weisen wir Konvergenz gegen die Exponentialverteilung mit Parameter 1 in einer adäquaten, noch einzuführenden Metrik nach.

Für die Vergabe dieser Diplomarbeit und die umfassende Betreuung während der Entstehungsphase möchte ich Herrn Prof. Dr. G. Alsmeyer meinen Dank aussprechen. Außerdem danke ich all denen, die mich auf die eine oder andere Weise bei der Erstellung dieser Arbeit unterstützt haben.

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem einführenden Kapitel, das zunächst den gewöhnlichen Galton-Watson-Prozeß vorstellt und elementare, spätere benötigte Eigenschaften dieses Prozesses zusammenfaßt, folgen wir im wesentlichen den Darstellungen in [Als3], [AN] und [Jag], wobei wir auf die Angabe von Beweisen weitestgehend verzichten. Für einen tieferen Einblick in die klassische Theorie der Galton-Watson-Prozesse weisen wir zudem auf die Standardwerke [AH] und [Har] hin.

Zum Einstieg geben wir eine verbale Beschreibung des zu modellierenden Sachverhaltes und gehen von einer nicht genauer bestimmten Population mit den folgenden Eigenschaften aus:

- Zum Zeitpunkt $n = 0$ besteht die Population aus einem Individuum, dem sogenannten *Urahnen*.

- Jedes Mitglied der Population hat die deterministische Lebensdauer von einer Zeiteinheit und generiert am Ende seines Lebens eine zufällige, endliche Anzahl von Nachkommen gemäß der *Reproduktionsverteilung* $(p_j)_{j\geq 0}$ (die nicht vom speziell betrachteten Individuum abhängt).

- Die Individuen reproduzieren unabhängig voneinander. Ferner ist die Reproduktion eines Individuums unabhängig von der Größe seiner Generation bzw. der vorangegangener Generationen.

Bezeichnet unter diesen Annahmen Z_n für $n \geq 0$ die Größe der n-ten Generation, so nennen wir $(Z_n)_{n\geq 0}$ einen *einfachen Galton-Watson-Prozeß* oder *Galton-Watson-*

Verzweigungsprozess. Als nächstes geben wir die entsprechende formale Definition an.

1.0.1. Definition. Es sei $(p_j)_{j\geq 0}$ eine W-Verteilung auf $(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$. Dann verstehen wir unter einem *Galton-Watson-Prozeß (GWP)* $(Z_n)_{n\geq 0}$ *mit Reproduktionsverteilung* $(p_j)_{j\geq 0}$ eine diskrete Markov-Kette mit Zustandsraum $\mathbb{N}_0$, $Z_0 = 1$ und Übergangsmatrix $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j\geq 0}$ der Form

$$p_{ij} = p_j^{*(i)}, \tag{1.0.1}$$

wobei $(p_j^{*(i)})_{j\geq 0}$ die i-fache Faltung von $(p_j)_{j\geq 0}$ angibt, im Fall $i = 0$ also das Dirac-Maß in 0. $\mu := \sum_{j\geq 1} jp_j$ wird als *Reproduktionsmittel* bezeichnet, entsprechend heißt $\sigma^2 := \sum_{j\geq 1} j^2 p_j - \mu^2$ *Reproduktionsvarianz.* $(Z_n)_{n\geq 0}$ heißt *superkritisch*, falls $\mu > 1$, *kritisch*, falls $\mu = 1$ und *subkritisch* im Fall $\mu < 1$.

1.0.2. Bemerkungen. (a) Wie aus Gleichung (1.0.1) ersichtlich, bilden Galton-Watson-Prozesse zeitlich homogene Markov-Ketten.

(b) Für $k, l \geq 0$ folgt aus Gleichung (1.0.1) die Implikation

$$Z_k = 0 \Longrightarrow Z_{k+l} = 0 \qquad P\text{-f.s.}, \tag{1.0.2}$$

d.h. 0 ist ein absorbierender Zustand für $(Z_n)_{n\geq 0}$.

Um die weitere Untersuchung von Galton-Watson-Prozessen zu vereinfachen, stellen wir nun das wohl einfachste Modell zur Konstruktion von Galton-Watson-Prozessen vor: das sogenannte *Standardmodell.* Dabei orientieren wir uns sehr an den zu Beginn des Kapitels genannten Quellen und schicken zunächst die folgende Vorbemerkung voraus:

1.0.3. Bemerkung. Im weiteren Verlauf der Arbeit sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein fest gewählter Wahrscheinlichkeitsraum, den wir als hinreichend groß voraussetzen, um für alle auftretenden Zufallsvariablen als Definitionsbereich dienen zu können.

Bezeichnet dann $(L_{nk})_{n,k\geq 0}$ eine Familie unabhängiger Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit derselben Verteilung $(p_j)_{j\geq 0}$, so setzen wir

$$Z_0 := 1 \qquad \text{und} \qquad Z_n := \sum_{k=1}^{Z_{n-1}} L_{nk} \qquad (n \geq 1), \tag{1.0.3}$$

wobei wie üblich leere Summen als 0 zu interpretieren sind.

Daß diese Definition uns weiterhilft, bestätigt das folgende Lemma (☞ [Jag], S. 19):

1.0.4. Lemma. *Ist $(Z_n)_{n\geq 0}$ in einem Standardmodell, d.h. durch Beziehung (1.0.3) gegeben, so bildet $(Z_n)_{n\geq 0}$ einen GWP mit Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j\geq 0}$.*

Das wohl wichtigste Hilfsmittel in der klassischen Theorie der Galton-Watson-Prozesse bilden die sogenannten *erzeugenden Funktionen (e.F.)*, gegeben durch

$$f_n(s) := Es^{Z_n} = \sum_{k\geq 0} P(Z_n = k)s^k \qquad (n \geq 0, s \in [0,1]).$$

Setzen wir $f := f_1$, so folgt (☞ [AN], S. 4; [Als3], S. 5f):

1.0.5. Satz. *Für $n \geq 1$ gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *f ist konvex und monoton wachsend auf* $[0,1]$.

(b) $f_n(1) = 1, f_n(0) = P(Z_n = 0)$.

(c) $f_n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n \ mal}$.

(d) $EZ_n = f_n'(1) = f'(1)^n = (\sum_{k\geq 1} kp_k)^n = \mu^n$.

(e) $\operatorname{Var} Z_n = \begin{cases} n\sigma^2, & \text{falls } \mu = 1, \\ \frac{\sigma^2\mu^{n-1}(\mu^n-1)}{\mu-1}, & \text{falls } \mu \neq 1. \end{cases}$

Als nächstes stellen wir einige Resultate bezüglich der sogenannten *Aussterbewahrscheinlichkeit* q, gegeben durch

$$q = P\left(Z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\right) = \lim_{n\to\infty} P(Z_n = 0),$$

zusammen. Dazu beachte man die Isotonie der Folge $(\{Z_n = 0\})_{n\geq 1}$.

Um dabei Trivialfälle auszuschließen, treffen wir die folgende

1.0.6. Generalvoraussetzung. Von nun an werden wir stets unterstellen, daß die zugrundeliegende Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j\geq 0}$ die Ungleichung

$$0 < p_0 \leq p_0 + p_1 < 1 \tag{1.0.4}$$

sowie

$$\mu = \sum_{j\geq 1} jp_j < \infty$$

erfüllt.

Zur Rechtfertigung dieser Einschränkung notieren wir zunächst, daß $p_0 = 0$ offenbar $q = 0$ impliziert. Andererseits liefert die Markov-Ungleichung

$$P(Z_n > 0) = P(Z_n \geq 1) \leq EZ_n = \mu^n, \tag{1.0.5}$$

so daß sich sofort die Implikation

$$p_0 + p_1 = 1, 0 < p_0 < 1 \Longrightarrow \mu < 1 \Longrightarrow q = 1$$

ergibt.

Für den Fall, daß unsere Generalvoraussetzung 1.0.6 erfüllt ist, halten wir fest (☞ [Als3], S. 6ff; [AN], S. 4ff):

1.0.7. Satz. *(a) q ist der kleinste Fixpunkt von f in $[0,1]$.*

(b) $\{s \in [0,1] : f(s) = s\} = \{q, 1\}$, d.h. f hat im Intervall $[0,1]$ genau die Fixpunkte q und 1.

(c) $\mu \leq 1 \Longrightarrow q = 1$.

(d) $\mu > 1 \Longrightarrow p_0 < q < 1$.

(e) $P\left(Z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty\right) = 1 - q$. Speziell gilt $P(Z_n = k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ für jedes $k \geq 1$.

1.0.8. Bemerkung. Ein Blick auf Satz 1.0.7(e) zeigt, daß die durch $(Z_n)_{n\geq 0}$ beschriebene Population f.s. entweder ausstirbt oder explodiert. Dieses Phänomen wird auch als *Explosions-Extinktions-Prinzip* bezeichnet (☞ [Als3], S. 6f).

Später werden wir auch die bedingten Verteilungen $P(Z_n \in \cdot | Z_n > 0)$ untersuchen. Dabei stellen sich die folgenden Hilfsresultate als nützlich heraus (☞ [Gei1]):

1.0.9. Lemma. *(a) Für jedes $n \geq 0$ gilt die Ungleichung*

$$(1-p_0)^n \leq P(Z_n > 0) \leq \mu^n.$$

(b) Die Folge $(c_n)_{n\geq 0}$, gegeben durch

$$c_n := \frac{P(Z_n > 0)}{P(Z_{n+1} > 0)} \qquad (n \geq 0), \tag{1.0.6}$$

ist monoton fallend. Im Fall $\mu \leq 1$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \mu^{-1},$$

insbesondere also

$$c_0 = (1-p_0)^{-1} \geq c_n \geq \mu^{-1} \qquad (n \geq 0).$$

(c) Im Fall $\mu \leq 1$ folgt für $n, k \geq 0$ die Abschätzung

$$P(Z_{n+k} > 0) \leq \mu^k P(Z_n > 0).$$

Beweis. (a) Für die erste Ungleichung führen wir eine Induktion nach n. Da der Fall $n = 0$ trivial ist, nehmen wir gleich an, daß die Behauptung für ein beliebiges, aber festes $n \geq 0$ bewiesen sei. Das führt uns zu

$$\begin{aligned} P(Z_{n+1} > 0) &= \sum_{k\geq 1:\, P(Z_n=k)>0} P(Z_{n+1} > 0 | Z_n = k) P(Z_n = k) \\ &= \sum_{k\geq 1:\, P(Z_n=k)>0} \left(1 - P(Z_{n+1} = 0 | Z_n = k)\right) P(Z_n = k) \\ &= \sum_{k\geq 1} \left(1 - p_0^k\right) P(Z_n = k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq (1-p_0)P(Z_n > 0) \\ &\geq (1-p_0)^{n+1}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Induktionsvoraussetzung benutzt haben.

Die zweite Ungleichung ist gerade Beziehung (1.0.5).

(b) Es sei $n \geq 0$. Die Konvexität von f liefert für $0 < x \leq y < 1$ die Ungleichung

$$\frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \leq \frac{f(1) - f(y)}{1 - y}$$

(☞ Lemma VI.1.1(d) in [Els]) und damit wegen $f(1) = 1$, $P(Z_k = 0) \leq P(Z_{k+1} = 0)$ und $P(Z_{k+1} = 0) = f_{k+1}(0) = f(f_k(0)) = f(P(Z_k = 0))$ für $k \geq 0$

$$c_n = \frac{1 - P(Z_n = 0)}{f(1) - f(P(Z_n = 0))} \geq \frac{1 - P(Z_{n+1} = 0)}{f(1) - f(P(Z_{n+1} = 0))} = c_{n+1}.$$

Setzen wir nun $\mu \leq 1$ voraus, so haben wir $P(Z_n = 0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} q = 1$ und folglich

$$c_n = \frac{1 - P(Z_n = 0)}{f(1) - f(P(Z_n = 0))} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f'(1)^{-1} = \mu^{-1}.$$

Daraus folgt (b).

(c) Unter Verwendung von (b) sehen wir $\prod_{i=0}^{k-1} c_{n+i} \geq \mu^{-k}$ und somit

$$P(Z_{n+k} > 0) = P(Z_n > 0) \prod_{i=0}^{k-1} c_{n+i}^{-1} \leq \mu^k P(Z_n > 0).$$

□

Wie in Satz 1.0.5 gesehen, wird der Erwartungswert von Z_n für $n \geq 0$ durch $EZ_n = (EZ_1)^n = \mu^n$ gegeben. Ist unsere Generalvoraussetzung 1.0.6 erfüllt, so folgt $0 < \mu < \infty$, und es ist naheliegend, die normierte Folge $(W_n)_{n\geq 0}$, gegeben durch

$$W_n := \mu^{-n} Z_n \qquad (n \geq 0),$$

zu untersuchen. Tatsächlich ergibt sich bei Gültigkeit von Generalvoraussetzung 1.0.6 (☞ [AN], Theorem I.6.1; [Als3], Satz I.5.1):

1.0.10. Satz. *Auf* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *existiert eine nichtnegative Zufallsgröße* W *mit* $EW \leq 1$ *und*

$$\lim_{n\to\infty} W_n = W \qquad P\text{-f.s.}$$

Genauer gilt: Ist $(Z_n)_{n\geq 0}$ *in einem Standardmodell gegeben,* $\mathfrak{G}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$ *sowie* $\mathfrak{G}_n := \sigma(\{L_{jk} : 1 \leq j \leq n, k \geq 1\})$ *für* $n \geq 1$*, so bildet* $(W_n)_{n\geq 0}$ *ein nichtnegatives Martingal bzgl.* $(\mathfrak{G}_n)_{n\geq 0}$ *mit* $EW_0 = 1$ *und ist somit f.s. konvergent.*

Es stellt sich die Frage, ob μ^n tatsächlich die „richtige“ Normierung für Z_n bildet. Dazu notieren wir die folgende Bemerkung:

1.0.11. Bemerkung. Im Fall $\mu \leq 1$ gilt gemäß Satz 1.0.7 $\lim_{n\to\infty} Z_n = 0$ f.s. Da jedes Z_n f.s. $\mathbb{N}_0$-wertig ist, folgt offenbar $W = 0$ P-f.s. Daher ist eine weitere Untersuchung der Folge $(W_n)_{n\geq 0}$ nur im superkritischen Fall interessant. Diese nehmen wir in Abschnitt 3.3 in Angriff und untersuchen, unter welchen Bedingungen tatsächlich μ^n die „richtige“ Normierung für Z_n bildet, d.h. wann

$$P(W > 0) = P\left(Z_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0\right) = 1 - q$$

gilt. Eine vollständige Antwort werden wir in Satz 3.3.3 geben, der auf Kesten und Stigum zurückgeht (☞ [KeSt]).

Kapitel 2

Galton-Watson-Bäume

2.1 Das Standardmodell mit Markierung

2.1.1 Das Modell

Das im vorangegangenen Kapitel vorgestellte Standardmodell wird aufgrund seiner Handlichkeit in der klassischen Theorie der GWP, die sich im wesentlichen auf die Untersuchung von erzeugenden Funktion stützt, bevorzugt verwendet.

Ein grundlegender Nachteil des Standardmodells liegt aber in der Tatsache, daß die in derselben Generation lebenden Individuen lediglich gezählt werden, nicht aber formal unterscheidbar sind. So ist das Standardmodell lax gesprochen zu „klein“, um die Stammbäume der verschiedenen Individuen zu analysieren oder Verwandtschafts- und Abstammungsbeziehungen zwischen den im Zeitablauf realisierten Individuen untersuchen zu können. Um dies zu ermöglichen, erhält jedes Individuum im nachfolgend einzuführenden *Standardmodell mit Markierung* (☞ [Als3], S. 2f.) eine *Markierung,* die nicht nur die Funktion eines Namens übernimmt und somit das Individuum eindeutig identifizierbar macht, sondern auch erkennen läßt, welche verwandtschaftlichen Beziehungen zu anderen Individuen der Population bestehen. Dabei verwenden wir das in [LP], Chapter 10 und [Rös3] benutzte Markierungsverfahren (☞ [Als3] für ein leicht modifiziertes Vorgehen), setzen $\mathbb{N}^0 := \{(\emptyset)\}$ und legen eine Familie

$$\left\{ L_v : v \in \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{N}^n \right\}$$

unabhängiger Zufallsgrößen mit derselben Verteilung $(p_j)_{j \geq 0}$ zugrunde. Sodann setzen wir $Z_0 := 1$, $T_0 := \{(\emptyset)\}$,

$$T_1 := \big\{(i) : 1 \leq i \leq L_{(\emptyset)}\big\}$$

und für $n \geq 2$

$$T_n := \big\{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n : (i_1, \dots, i_{n-1}) \in T_{n-1}, i_n \leq L_{(i_0, \dots, i_{n-1})}\big\} \tag{2.1.1}$$

sowie für $n \geq 1$

$$Z_n := |T_n| = \sum_{v \in T_{n-1}} L_v. \tag{2.1.2}$$

Bevor wir die dabei vorzunehmende Markierung erläutern, halten wir fest:

2.1.1. Bemerkung. Da die in (2.1.2) vorgenommene Definition von Z_n wiederum als Summe Z_{n-1} unabhängiger Zufallsgrößen mit Verteilung $(p_j)_{j\geq 0}$, die ferner unabhängig von Z_{n-1} sind, vorgenommen wurde, bildet $(Z_n)_{n\geq 0}$ wiederum einen GWP mit Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j\geq 0}$. Liegt $(Z_n)_{n\geq 0}$ in der obigen Form vor, so sagen wir, $(Z_n)_{n\geq 0}$ sei in einem *Standardmodell mit Markierung* gegeben.

Die schon angekündigte Markierung wird dabei wie folgt vorgenommen: In der 0-ten Generation haben wir nur den Urahnen, den wir mit $(\emptyset)$ bezeichnen. Die 1. Generation besteht definitionsgemäß aus den $Z_1 = L_{(\emptyset)}$ Nachfahren dieses Individuums, welche wir (im Fall $L_{(\emptyset)} > 0$) willkürlich ordnen und mit $(1), \dots, (L_{(\emptyset)})$ bezeichnen. Ist (j) ein Mitglied der 1. Generation mit $L_{(j)} > 0$ Kindern, so werden diese wiederum willkürlich geordnet und mit $(j, 1), \dots, (j, L_{(j)})$ markiert. Eine Fortführung dieses Vorgehens versieht jedes Individuum der n-ten Generation ($n \geq 1$) mit einer Markierung $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$, wobei $(i_1, \dots, i_{n-1})$ die Markierung dessen „Mutter“ angibt. Abbildung 2.1 veranschaulicht den soeben beschriebenen Markierungsvorgang, wobei die Individuen gleicher Generation in naheliegender Weise angeordnet werden. Für $n \geq 0$ gilt somit $T_n \subset \mathbb{N}^n$, und die Gesamtheit aller möglichen Markierungen ist gegeben durch

$$\mathcal{N} := \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{N}^n. \tag{2.1.3}$$

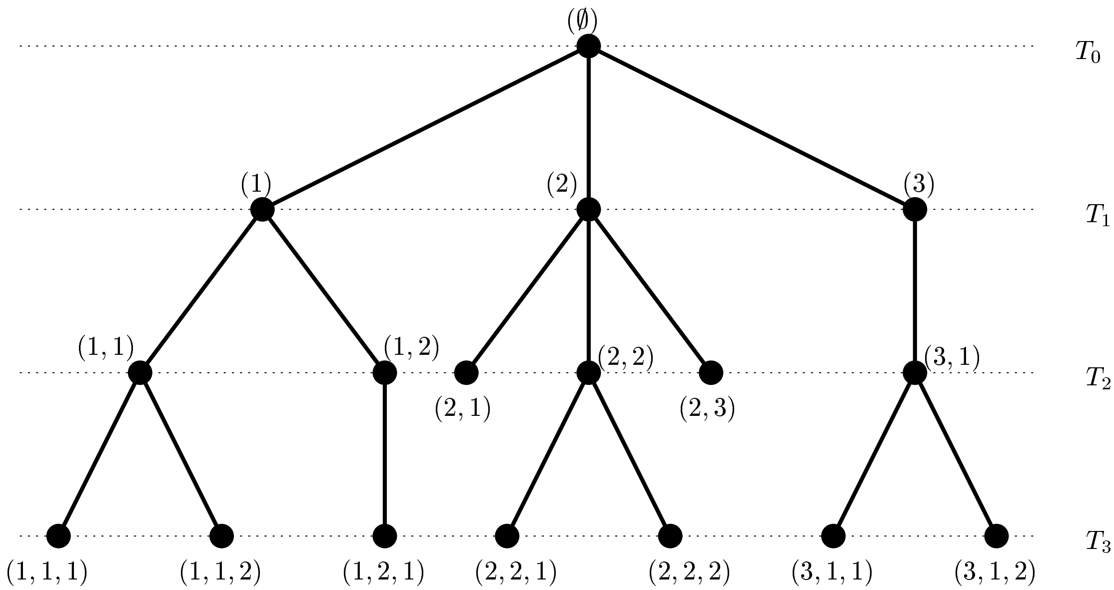


Abbildung 2.1: Die ersten Generationen eines Galton-Watson-Prozesses. Dabei denken wir uns die Individuen innerhalb einer Generation in der obigen, naheliegenden Weise von links nach rechts angeordnet.

2.1.2 Verwandtschaftsbeziehungen und eine Ordnung auf $\mathcal{N}$

Ist $v \in \mathbb{N}^n$ für ein $n \geq 0$, so setzen wir $\ell(v) := n$ und bezeichnen $\ell(v)$ als *Länge* oder *Generation* des Vektors v; speziell gilt also $\ell((\emptyset)) = 0$. Ferner setzen wir für $v \in \mathcal{N}$ $(v, (\emptyset)) := ((\emptyset), v) := v$.

Bevor wir die im vorigen Unterabschnitt vage angedeuteten Verwandtschaftsbeziehungen präzise definieren können, sind die folgenden Vorbemerkungen erforderlich: Im folgenden werden wir für $j \in \mathbb{N}$ stets (j) mit j sowie für $n, m \geq 1$ stets $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^m$ mit $\mathbb{N}^{n+m}$ identifizieren; sind etwa $v = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$, $w = (j_1, \ldots, j_m) \in \mathbb{N}^m$, so werden wir nicht zwischen den Vektoren $(v, w) = ((i_1, \ldots, i_n), (j_1, \ldots, j_m)) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^m$ und $(i_1, \ldots, i_n, j_1, \ldots, j_m) \in \mathbb{N}^{n+m}$ unterscheiden.

Gilt speziell $n = m$, aber $v \neq w$, so setzen wir

$$\phi(v, w) := \min\{1 \leq j \leq n : v_j \neq w_j\}.$$

Damit läßt sich die in Aussicht gestellte Definition in Angriff nehmen:

2.1.2. Definition. Es seien $v, w \in \mathcal{N}$.

(a) Besitzt w die Darstellung $w = (v, x)$ für ein $x \in \mathcal{N}$, so nennen wir v einen *Vorfahren* von w bzw. w einen *Nachkommen* oder *Nachfahren* von v und schreiben $v \preceq w$ bzw. $w \succeq v$.

(b) Gilt in (a) speziell $x \in \mathbb{N}$, so bezeichnen wir v als *Mutter* von w bzw. w als *Kind* von v.

(c) Wir definieren im Fall $v \neq w$

$$v < w :\Longleftrightarrow \begin{cases} \ell(v) < \ell(w), & \text{falls } \ell(v) \neq \ell(w), \\ v_{\phi(v,w)} < w_{\phi(v,w)}, & \text{falls } \ell(v) = \ell(w) \end{cases}$$

sowie allgemein

$$v \leq w :\Longleftrightarrow v = w \text{ oder } v < w.$$

Insbesondere gilt für jedes $v \in \mathcal{N}$ also $(\emptyset) \leq v$ und $(\emptyset) \preceq v$.

2.1.3. Bemerkung. Die in (c) eingeführte Relation „$\leq$“ bildet offenbar eine Ordnung auf $\mathcal{N}$, und je zwei $v, w \in \mathcal{N}$ sind vergleichbar. Daher besitzt jede endliche Teilmenge $N \subset \mathcal{N}$ ein Minimum und ein Maximum in N.

Zur Interpretation der Relation „$\leq$“ ist folgendes zu sagen: „$v \leq w$“ bedeutet anschaulich, daß v vor w geboren wurde und somit „älter“ als w ist. In Abbildung 2.1 sind die Individuen innerhalb einer Generation offenkundig der Größe nach angeordnet, wobei links mit dem kleinsten Individuum begonnen worden ist.

Offenbar besteht kein Bezeichnungskonflikt mit der gewöhnlichen Ordnung auf $\mathbb{N}$.

Um in dieser Arbeit Grenzwertsätze für GWP zu beweisen, greifen wir auf das soeben vorgestellte Standardmodell mit Markierung zurück, allerdings mit der folgenden Sichtweise: Wir interessieren uns nicht nur für den GWP $(Z_n)_{n\geq 0}$, sondern möchten gerne die Menge

$$T := \bigcup_{n\geq 0} T_n$$

aller im Zeitablauf realisierten Individuen als Zufallsvariable auffassen. Dazu stellen wir im folgenden Abschnitt einen geeigneten Meßraum $(\mathbb{T}, \mathfrak{T})$ vor, der als Wertebereich für T in Frage kommt, wobei wir uns im wesentlichen auf das in [LP], Chapter 10 skizzierte Vorgehen berufen.

2.2 Bäume

2.2.1. Definition. Eine Teilmenge $t \subset \mathcal{N}$ heißt *Baum*, falls sie den folgenden Bedingungen genügt:

(i) $(\emptyset) \in t$,

(ii) $(i_1, \dots, i_n) \in t \Longrightarrow (i_1, \dots, i_k) \in t \qquad$ für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$,

(iii) $(i_1, \dots, i_n, i_{n+1}) \in t \Longrightarrow (i_1, \dots, i_n, l) \in t \qquad$ für jedes $l \in \{1, \dots, i_{n+1}\}$.

Erfüllt t ferner die Bedingung

(iv) $z_n(t) := |t \cap \mathbb{N}^n| < \infty \qquad$ für jedes $n \geq 0$,

so heißt t *lokal endlich.*

Die Elemente von t nennen wir *Individuen;* das Individuum $(\emptyset)$ wird auch als *Wurzel* von t bezeichnet.

Wir beschäftigen uns im folgenden nur mit lokal endlichen Bäumen und setzen

$$\mathbb{T} := \{t \subset \mathcal{N} : t \text{ ist ein lokal endlicher Baum}\}$$

sowie für $t \in \mathbb{T}$

$$H(t) := \sup\{n \geq 0 : z_n(t) > 0\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}.$$

Dabei weisen wir auf die Implikation

$$z_n(t) = 0 \Rightarrow z_m(t) = 0$$

hin, die für alle $t \in \mathbb{T}$ und $m \geq n \geq 0$ gültig ist, und interpretieren $H(t)$ als die *Höhe* des Baumes t.

2.2.2. Bezeichnungen. Für $t \in \mathbb{T}$ und $n \geq 0$ setzen wir abkürzend

$$\begin{aligned} t_n &:= t \cap \mathbb{N}^n = \{v \in t : \ell(v) = n\}, \\ t_{|n} &:= \bigcup_{k=0}^{n} t_k = \{v \in t : \ell(v) \leq n\} \\ [t]_n &:= \left\{t' \in \mathbb{T} : t'_{|n} = t_{|n}\right\}. \end{aligned}$$

t_n bezeichnen wir als die *n-te Generation* von t, so daß $z_n(t) = |t_n|$ die Größe der n-ten Generation von t angibt.

Die oben konstruierte Menge $\mathbb{T}$ wird uns in den nächsten Kapiteln als Wertebereich verschiedener Abbildungen dienen. Um aus diesen Abbildungen Zufallsvariablen, d.h. meßbare Abbildungen zu machen, verschaffen wir uns zunächst eine geeignete σ-Algebra auf $\mathbb{T}$. Einen ersten Schritt in diese Richtung gibt uns das folgende Lemma, das uns eine Topologie auf $\mathbb{T}$ vermittelt:

2.2.3. Lemma. *(a) Die Abbildung $d : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to [0, \infty)$, gegeben durch*

$$d(t, t') := \frac{1}{1 + \sup\left\{n \geq 0 : t_{|n} = t'_{|n}\right\}} \qquad (t, t' \in \mathbb{T}),$$

ist eine Metrik auf $\mathbb{T}$.[1]

(b) $(\mathbb{T}, d)$ ist separabel. Genauer gilt:

$$\mathbb{T}^* := \{t \in \mathbb{T} : H(t) < \infty\} = \{t \in \mathbb{T} : t \text{ ist endlich}\}$$

ist abzählbar und liegt dicht in $\mathbb{T}$.

Beweis. (a) Hier ist offenbar nur die Dreiecksungleichung für paarweise verschiedene $t, t', t'' \in \mathbb{T}$ zu verifizieren. Sie ergibt sich aber mittels der Ungleichung

$$\sup\left\{n : t_{|n} = t''_{|n}\right\} \geq \min\left\{\sup\left\{n : t_{|n} = t'_{|n}\right\}, \sup\left\{n : t'_{|n} = t''_{|n}\right\}\right\},$$

denn diese Ungleichung liefert uns

$$\begin{aligned} d(t, t'') &\leq \left(1 + \min\left\{\sup\left\{n : t_{|n} = t'_{|n}\right\}, \sup\left\{n : t'_{|n} = t''_{|n}\right\}\right\}\right)^{-1} \\ &\leq d(t, t') + d(t', t''). \end{aligned}$$

[1] Dabei ist die übliche Konvention $\frac{1}{\infty} := 0$ zu berücksichtigen.

(b) Mit $\mathbb{T}_n := \{t \in \mathbb{T} : H(t) = n\} = \{t \in \mathbb{T} : z_n(t) > 0, z_{n+1}(t) = 0\}$ für $n \geq 0$ gilt

$$\mathbb{T}^* = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{T}_n.$$

Um die Abzählbarkeit von $\mathbb{T}^*$ einzusehen, zeigen wir, daß jedes $\mathbb{T}_n$ abzählbar ist: Setzen wir für $n \geq 0$ und $i \geq 1$

$$\mathcal{P}_i\left(\mathbb{N}^n\right) := \{A \subset \mathbb{N}^n : |A| = i\},$$

so haben wir für $t \in \mathbb{T}_n$ offenbar die Inklusion

$$t = \bigcup_{k=0}^{n} t_k \in \bigcup_{k=0}^{n} \bigcup_{i \geq 1} \mathcal{P}_i\left(\mathbb{N}^k\right).$$

Folglich ist

$$\mathbb{T}_n \subset \bigcup_{k=0}^{n} \bigcup_{i \geq 1} \mathcal{P}_i\left(\mathbb{N}^k\right)$$

und daher offenkundig abzählbar.

Seien nun $t \in \mathbb{T}$ und $0 < \varepsilon < 1$ vorgegeben. Wählt man $n = \left\lceil \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right\rceil$, wobei für $x \in \mathbb{R}$ wie üblich $\lceil x \rceil := \min\{m \in \mathbb{Z} : m \geq x\}$ gesetzt sei, so gilt $t_{|n} \in \mathbb{T}^*$ und

$$d(t, t_{|n}) \leq \frac{1}{1+n} \leq \varepsilon,$$

so daß $\mathbb{T}^*$ tatsächlich dicht in $\mathbb{T}$ liegt.

□

2.2.4. Bemerkung. Der soeben konstruierte metrische Raum $(\mathbb{T}, d)$ ist vollständig. Auf den Beweis verzichten wir jedoch, da diese Eigenschaft für unsere Untersuchungen keine Rolle spielen wird.

Bevor wir wie angekündigt $\mathbb{T}$ mit einer σ-Algebra ausstatten, stellen wir noch einige Vorüberlegungen an:

2.2.5. Bemerkungen. (a) Da die Abbildung d nur Werte in $\{0\} \cup \{1/k : k \geq 1\}$ annimmt, erhalten wir mit $B(s,\delta) := \{s' \in \mathbb{T} : d(s,s') < \delta\}$ für $s \in \mathbb{T}$ und $\delta > 0$ die Identität

$$\{B(t,\varepsilon) : t \in \mathbb{T}, \varepsilon > 0\} = \{B(t,1/k) : t \in \mathbb{T}, k \geq 1\} = \{[t]_k : t \in \mathbb{T}, k \geq 1\},$$

denn für $t, t' \in \mathbb{T}$ und $k \geq 1$ haben wir die Äquivalenzen

$$t' \in B(t,1/k) \iff 1 + \sup\left\{n : t_{|n} = t'_{|n}\right\} > k \iff t_{|k} = t'_{|k} \iff t' \in [t]_k.$$

(b) Es seien $t, t' \in \mathbb{T}$ und $l \geq k \geq 1$. Dann gilt

$$[t]_l \cap [t']_k = \left\{s \in \mathbb{T} : s_{|l} = t_{|l}, s_{|k} = t'_{|k}\right\} = \begin{cases} [t]_l, & \text{falls } t_{|k} = t'_{|k}, \\ \emptyset, & \text{falls } t_{|k} \neq t'_{|k}, \end{cases} \tag{2.2.1}$$

d.h.

$$\mathcal{E} := \{\emptyset, \mathbb{T}\} \cup \{[t]_k : t \in \mathbb{T}, k \geq 1\} \tag{2.2.2}$$

bildet ein $\cap$-stabiles System von Teilmengen von $\mathbb{T}$.

Damit definieren wir nun

$$\mathfrak{T} := \sigma(\mathcal{E}) = \sigma\left(\{[t]_k : t \in \mathbb{T}, k \geq 1\}\right) \tag{2.2.3}$$

und werden grundsätzlich diese σ-Algebra auf $\mathbb{T}$ zugrundelegen. Als einfache Folgerung halten wir fest:

2.2.6. Bemerkung. Da sich in einem separablen metrischen Raum jede nichtleere offene Teilmenge als abzählbare Vereinigung (nicht notwendig disjunkter) offener Kugeln darstellen läßt (☞ Theorem II.6.23 samt Beweis in [HS]), stimmt $\mathfrak{T}$ mit der Borelschen σ-Algebra über $\mathbb{T}$ überein: Bezeichnet $\mathcal{O}$ das System der offenen Teilmengen von $\mathbb{T}$, gilt also $\mathfrak{T} = \sigma(\mathcal{O})$. Wir haben jedoch $\mathfrak{T}$ via Beziehung (2.2.3) definiert, um für spätere Rechnungen einen handlichen, $\cap$-stabilen Erzeuger von $\mathfrak{T}$ zur Hand zu haben.

2.3 Eigenschaften von Galton-Watson-Bäumen

Im folgenden setzen wir stets voraus, daß die Folge $(T_n)_{n\geq 0}$ gemäß Beziehung (2.1.1) gegeben ist. Wie zu Beginn dieses Kapitels angekündigt, möchten wir im weiteren Verlauf

$$T = \bigcup_{n\geq 0} T_n \tag{2.3.1}$$

untersuchen. Offenbar liefert uns dies eine $\mathbb{T}$-wertige Abbildung.

2.3.1. Definition. Ist $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein in einem Standardmodell gegebener GWP mit Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j\geq 0}$, so heißt die Abbildung T gemäß Beziehung (2.3.1) *Galton-Watson-Baum mit Reproduktionsverteilung* $(p_j)_{j\geq 0}$.

Bevor wir T im folgenden Lemma als $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{T}$-meßbar identifizieren, notieren wir, daß für $n \geq 0$

$$Z_n = |T_n| = z_n \circ T$$

gilt, wobei an die Definition von z_n im Rahmen von Definition 2.2.1 erinnert sei.

Um diese faktorisierte Darstellung von Z_n für $n \geq 0$ ausnutzen zu können, benötigen wir neben der $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{T}$-Meßbarkeit von T auch die Meßbarkeit von z_n bezüglich $\mathfrak{T}$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$:

2.3.2. Lemma. *(a) T ist $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{T}$-meßbar.*

(b) Für jedes $n \geq 0$ ist die Abbildung z_n $\mathfrak{T}$-$\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$-meßbar.

Beweis. (a) Es ist lediglich $T^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathfrak{A}$ zu zeigen. Dazu sei $A \in \mathcal{E}$, o.B.d.A. $A = [t]_k$ für ein $t \in \mathbb{T}$ und ein $k \geq 1$. Dann folgt aber

$$\begin{aligned} T^{-1}(A) &= \{\omega \in \Omega : T_{|k}(\omega) = t_{|k}\} \\ &= \bigcap_{i=1}^{k} \{\omega \in \Omega : T_i(w) = t_i\} \\ &\in \sigma(\{L_v : \ell(v) \leq k-1\}) \subset \mathfrak{A}, \end{aligned}$$

also tatsächlich die gewünschte Meßbarkeit der Abbildung T.

(b) Für $k \geq 1$ erhalten wir

$$z_n^{-1}(\{k\}) = \{t \in \mathbb{T} : z_n(t) = k\} = \bigcup_{t \in \mathbb{T}_n : |t_n| = k} [t]_n \in \mathfrak{T},$$

da eine abzählbare Vereinigung vorliegt. Daraus folgt die Behauptung.

$\square$

Damit ist folgende Bezeichnungsweise sinnvoll:

2.3.3. Definition. Wir setzen $\mathbf{Q} := P^T$ und bezeichnen dieses Bildmaß als das *Galton-Watson-Maß* auf $(\mathbb{T}, \mathfrak{T})$.

Mit dieser Definition gilt beispielsweise

$$P(Z_n \in \cdot) = P(z_n \circ T \in \cdot) = \mathbf{Q}(z_n \in \cdot) \qquad (n \geq 0).$$

Wir betrachten nun die Individuen der ersten Generation, d.h. die Menge T_1. Die vorgenommene Konstruktion von Galton-Watson-Bäumen legt die Vermutung nahe, daß sich die Individuen der ersten Generation unabhängig fortpflanzen. Da T_1 aber selbst eine zufällige Menge ist, muß dazu sichergestellt werden, daß diese Individuen überhaupt realisiert werden, d.h. Elemente von T_1 sind. Bevor wir dieses anschaulich evidente Ergebnis formulieren können, benötigen wir die folgende Nomenklatur:

2.3.4. Bezeichnungen. Es seien $t \in \mathbb{T}$ und $\xi \in t$. Dann heißt

$$t^\xi := \{\xi' \in t : \xi' \succeq \xi\}$$

der *in ξ verwurzelte Teilbaum von t*. Dieser enthält alle Individuen in t, die von ξ abstammen (einschließlich ξ selbst); um aus dieser Teilmenge von t wiederum einen Baum gemäß Definition 2.2.1 zu machen, definieren wir den *Shiftoperator* $\pi_\xi : t^\xi \to \mathbb{T}$ zu ξ durch

$$\pi_\xi(\xi, w) := w \qquad (w \in \mathcal{N}),$$

speziell also $\pi_\xi(\xi) := (\emptyset)$, so daß $\pi_\xi\left(t^\xi\right) = \{w : (\xi, w) \in t\}$ den Bedingungen aus Definition 2.2.1 genügt. Im Prinzip wird der in ξ verwurzelte Teilbaum also derart verschoben, daß er $(\emptyset)$ als Wurzel besitzt.

Ist speziell $\xi = i$ für ein $i \in \mathbb{N}$, so setzen wir zur Abkürzung

$$t(i) := \pi_i\left(t^i\right) = \{w : (i, w) \in t\}.$$

Durch eine ähnliche Argumentation wie im Beweis von Lemma 2.3.2(a) erhält man im Fall $\xi \in T$ die $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{T}$-Meßbarkeit der Abbildung $\pi_\xi \circ T^\xi$, und in der Tat läßt sich die oben ausgesprochene Vermutung hinsichtlich der Unabhängigkeit der Teilbäume formal bestätigen:

2.3.5. Satz. *(a) Ist $p_k > 0$ für ein $k \geq 1$, so sind – gegeben $Z_1 = k$ – die von den Individuen der ersten Generation generierten (geshifteten) Teilbäume $T(i) = \pi_i \circ T^i$, $1 \leq i \leq k$, stochastisch unabhängig mit Verteilung $\mathbf{Q}$.*

(b) Analog gilt für $n \geq 2$: Ist $P(Z_n = k) > 0$, so sind – gegeben $Z_n = k$ – die von den Individuen der n-ten Generation erzeugten (geshifteten) Teilbäume stochastisch unabhängig mit derselben Verteilung $\mathbf{Q}$.

Beweis. Um den Schreibaufwand in erträglichen Grenzen zu halten, beweisen wir nur (a) und verzichten auf den analogen, aber hinsichtlich der Notation aufwendigen Beweis zu (b): Dazu seien $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{E}$. Nehmen wir o.B.d.A. $A_1, \ldots, A_k \neq \emptyset$ an, so existiert eine Familie $\left(B_v^{(i)}\right)_{v \in \mathcal{N}, 1 \leq i \leq k}$ von Teilmengen von $\mathbb{N}_0$, so daß die Gleichungskette

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{k} \mathbf{Q}(A_i) &= \prod_{i=1}^{k} \prod_{v \in \mathcal{N}} P\left(L_v \in B_v^{(i)}\right) \\
&= p_k^{-1} \prod_{i=1}^{k} \prod_{v \in \mathcal{N}} P\left(L_{(i,v)} \in B_v^{(i)}\right) P(L_{(\emptyset)} = k) \\
&= p_k^{-1} P\left(\{Z_1 = k\} \cap \bigcap_{i=1}^{k} \bigcap_{v \in \mathcal{N}} \{L_{(i,v)} \in B_v^{(i)}\}\right) \\
&= \frac{P(Z_1 = k, T(i) \in A_i \text{ für } 1 \leq i \leq k)}{P(Z_1 = k)} \\
&= P(T(i) \in A_i \text{ für } 1 \leq i \leq k | Z_1 = k)
\end{aligned}$$

gültig ist, wobei wir die Tatsache benutzt haben, daß die Familie $(L_v)_{v \in \mathcal{N}}$ unabhängig und identisch verteilt ist. Man beachte ferner die Abzählbarkeit von $\mathcal{N}$. Setzt man nun $A_i = \mathbb{T}$ für geeignete $i \in \{1, \dots, k\}$, so folgt zunächst die Verteilungsaussage und damit im Hinblick auf die obige Rechnung und unter Hinweis auf Satz 23.3 in [Als1] auch die Unabhängigkeit, da $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil ist. $\square$

Kapitel 3

Die Beweismethode von R. Lyons, R. Pemantle und Y. Peres

In diesem Kapitel beweisen wir klassische Grenzwertsätze für Galton-Watson-Prozesse mit den von R. Lyons, R. Pemantle und Y. Peres in [LP], Chapter 10 und [LPP] entwickelten Methoden. Diese beiden Quellen bilden daher die Grundlage für unsere Darstellung.

Im Gegensatz zur klassischen Theorie kommen wir bei unserer Analyse im wesentlichen ohne die Untersuchung von erzeugenden Funktionen aus. Stattdessen greifen wir zu zwei anderen methodischen Hilfsmitteln: den sogenannten *größenverzerrten Galton-Watson-Bäumen* und den sogenannten *Galton-Watson-Prozessen mit Immigration,* denen wir uns daher in den beiden folgenden Abschnitten zuwenden.

3.1 Größenverzerrte Galton-Watson-Bäume

Ein fundamentales methodisches Werkzeug für unsere weiteren Untersuchungen bilden die sogenannten *größenverzerrten Galton-Watson-Bäume mit Rückgrat,* die wir im folgenden konstruieren. Dabei handelt es sich um zufällige unendliche, aber lokal endliche Bäume $\widehat{T}$, in denen ein zufälliger absteigender Pfad V, das sogenannte *Rückgrat,* besonders ausgezeichnet ist.

Zum Beweis klassischer Grenzwertsätze werden wir später die Verteilung dieses Hilfsbaums $\widehat{T}$ mit dem Galton-Watson-Maß $\mathbf{Q}$ vergleichen.

3.1.1 Größenverzerrte Verteilungen und größenverzerrte Zufallsgrößen

Einen zenralen Grundbaustein zur oben angekündigten Konstruktion unserer Hilfsbäume bilden *größenverzerrte* Zufallsgrößen, die wir daher zunächst formal einführen:

3.1.1. Definition. (a) Es sei ν eine Verteilung auf $([0,\infty),\mathcal{B}_{[0,\infty)})$ mit positivem, endlichem Erwartungswert $\gamma := \int_{[0,\infty)} x\,\nu(dx)$. Dann heißt $\widehat{\nu}$, definiert durch

$$\widehat{\nu}(A) := \gamma^{-1}\int_A x\,\nu(dx) \qquad (A \in \mathcal{B}_{[0,\infty)}), \tag{3.1.1}$$

die zu ν gehörige *größenverzerrte (engl. size-biased) Verteilung* auf $[0,\infty)$ oder *Größenverzerrung* von ν.

(b) Ist X eine nichtnegative Zufallsgröße mit Verteilung ν und positivem, endlichem Erwartungswert, so heißt die Zufallsgröße $\widehat{X}$ eine zu X gehörige *größenverzerrte Zufallsgröße* bzw. eine *Größenverzerrung* von X, falls $\widehat{X}$ die Verteilung $\widehat{\nu}$ besitzt.

3.1.2. Bemerkungen. (a) Wir werden hauptsächlich Größenverzerrungen von Verteilungen auf $(\mathbb{N}_0,\mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$ betrachten. Ist $\nu = (\nu_k)_{k\geq 0}$ eine solche, so gilt offenbar $\widehat{\nu} = (\widehat{\nu}_k)_{k\geq 0}$ mit

$$\widehat{\nu}_k = \gamma^{-1} k\nu_k \qquad (k \geq 0),$$

wenn γ gemäß Definition 3.1.1 gewählt ist.

(b) In der Situation von Definition 3.1.1(b) ist $P^{\widehat{X}}$ durch P^X dominiert mit P^X-Dichte

$$\frac{dP^{\widehat{X}}}{dP^X}(x) = \frac{x}{EX}.$$

Somit haben wir für jedes Borel-meßbare $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ die für uns sehr wichtige Rechenregel

$$\begin{aligned} E\varphi(\widehat{X}) &= \int_{[0,\infty)} \varphi(x)\, P^{\widehat{X}}(dx) \\ &= \int_{[0,\infty)} \varphi(x)(EX)^{-1} x\, P^X(dx) \\ &= \frac{EX\varphi(X)}{EX}. \end{aligned}$$

Ferner notieren wir, daß $\widehat{X}$ P-f.s. positiv ist.

(c) Ist in (b) P^X selbst durch das Lebesgue-Maß $\boldsymbol{\lambda}$ dominiert mit Dichte g, so gilt offenbar für $A \in \mathcal{B}_{[0,\infty)}$

$$P^{\widehat{X}}(A) = (EX)^{-1} \int_A x\, P^X(dx) = (EX)^{-1} \int_A x g(x)\, \boldsymbol{\lambda}(dx),$$

d.h. $P^{\widehat{X}}$ hat die $\boldsymbol{\lambda}$-Dichte $\widehat{g}$, gegeben durch

$$\widehat{g}(x) = (EX)^{-1} x g(x) \qquad (x \geq 0).$$

3.1.2 Konstruktion und Eigenschaften größenverzerrter Galton-Watson-Bäume

Wir möchten nun das Konzept der Größenverzerrung nichtnegativer Zufallsgrößen in geeigneter Weise auf unseren Galton-Watson-Baum T übertragen und eine Größenverzerrung $\widehat{T}$ von T konstruieren. Später werden wir im Zusammenhang mit dem zu beweisenden Satz von Kesten und Stigum (Satz 3.3.3) der Frage nachgehen, ob bzw. unter welchen Bedingungen – in Analogie zu Lemma 3.1.2(b) – die mit $\widehat{\mathbf{Q}}$ bezeichnete Verteilung von $\widehat{T}$ durch das Galton-Watson-Maß $\mathbf{Q}$ dominiert wird. Ist dies nicht der Fall, so sind die beiden Maße notwendig zueinander singulär (☞ Lemma 3.3.2 und Satz 3.3.3 samt Beweis).

Zunächst schreiten wir jedoch zur angekündigten Konstruktion.

3.1.3. Konstruktion. Auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sei $\left(\left(\widehat{L}_n, C_n\right)\right)_{n\geq 0}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvektoren, die ferner unabhängig von $(L_v)_{v\in\mathcal{N}}$ sei. Für $n \geq 0$ gelte

$$P\left(\widehat{L}_n \in \cdot\right) = (\widehat{p}_j)_{j\geq 0} = \left(\mu^{-1} j p_j\right)_{j\geq 0}$$

sowie im Fall $p_k > 0$ für $k \geq m \geq 1$

$$P\left(C_n = m \middle| \widehat{L}_n = k\right) = \frac{1}{k},$$

d.h. gegeben $\widehat{L}_n = k$ sei C_n Laplace-verteilt auf $\{1, \ldots, k\}$, und $\widehat{L}_n$ besitze die größenverzerrte Reproduktionsverteilung $(\widehat{p}_j)_{j\geq 0}$.[1]

Damit wird der *größenverzerrte Galton-Watson-Baum* $\widehat{T} = \bigcup_{n\geq 0} \widehat{T}_n$ *mit Rückgrat* $V = (V_n)_{n\geq 0}$ wie folgt definiert: Wir setzen $\widehat{T}_0 := \{(\emptyset)\}$, $V_0 := (\emptyset)$ und induktiv für $n \geq 0$

$$\widehat{T}_{n+1} := A_{n+1} \cup B_{n+1}$$

mit

$$A_{n+1} := \left\{(w, i) \in \mathbb{N}^{n+1} : w \in \widehat{T}_n \setminus \{V_n\},\ i \leq L_w\right\}$$

und

$$B_{n+1} := \left\{(V_n, k) : 1 \leq k \leq \widehat{L}_n\right\},$$

sowie

$$V_{n+1} := (V_n, C_n) \in B_{n+1}.$$

In Worten läßt sich die obige Konstruktion wie folgt beschreiben: Wir starten wieder mit $(\emptyset)$ als einzigem Individuum in der 0-ten Generation, welches zugleich die 0-te Komponente V_0 des Rückgrats bildet. Dieses Individuum bekommt eine zufällige Anzahl $\widehat{L}_0 \geq 1$ von Nachfahren. Aus diesen Nachkommen wird zufällig gemäß einer entsprechenden Laplace-Verteilung (vermöge C_0) die erste Komponente V_1 des Rückgrats ausgewählt. Dieses Individuum V_1 reproduziert sich gemäß der größenverzerrten Reproduktionsverteilung $(\widehat{p}_j)_{j\geq 0}$ und generiert $\widehat{L}_1$ Nachfahren, während die restlichen Individuen der ersten Generation $\widehat{T}_1$ unabhängig Nachfahren gemäß der Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j\geq 0}$ hervorbringen. So fortfahrend, wird V_{n+1} zufällig

[1] Die Existenz solcher Zufallsvektoren $\left(\widehat{L}_n, C_n\right)$ ist offenbar durch den Satz von Ionescu Tulcea (☞ Satz 54.4 in [Als1]) gesichert.

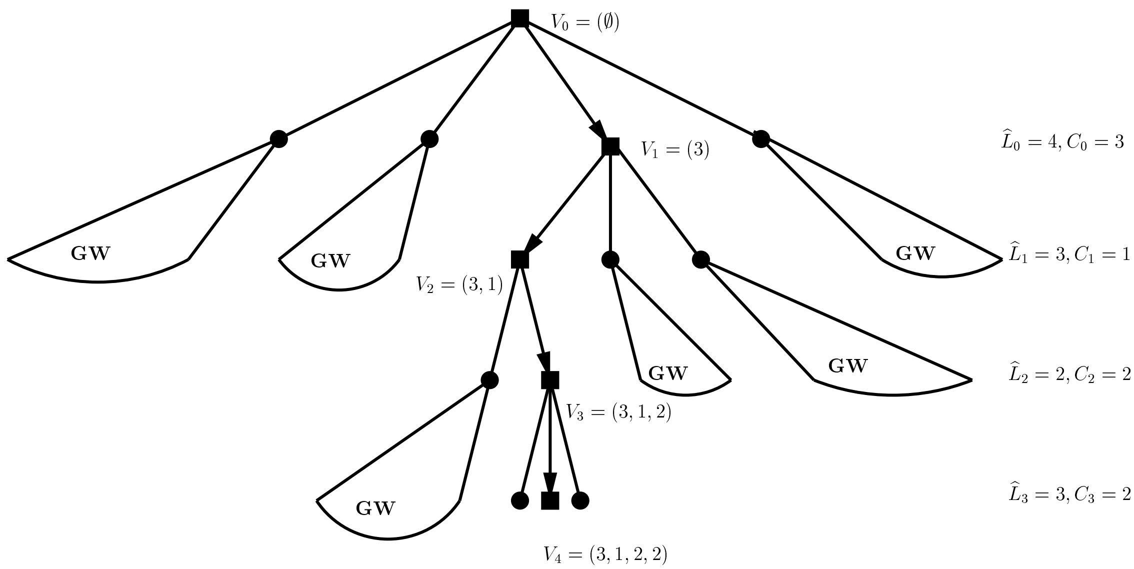


Abbildung 3.1: Ausschnitt aus einem größenverzerrten Galton-Watson-Baum

aus den $\widehat{L}_n$ Kindern von V_n gewählt und produziert Nachfahren gemäß $(\widehat{p}_j)_{j\geq 0}$; alle Individuen, die keine Komponente von V bilden, erzeugen Kinder wie im gewöhnlichen Galton-Watson-Baum. Insgesamt erhalten wir somit einen zufälligen Baum $\widehat{T}$, in dem eine absteigende Folge von Knoten $(V_n)_{n\geq 0}$, das *Rückgrat*, besonders ausgezeichnet ist. Der Terminus „absteigend“ bedeutet hier natürlich, daß in jeder Generation genau ein Individuum ausgewählt wird. Abbildung 3.1 veranschaulicht unsere Konstruktion, wobei die Rückgratkomponenten als Quadrate dargestellt sind und die mit **GW** gekennzeichneten Teilbäume (verschobene) gewöhnliche GWB darstellen.

Wegen $P\left(\widehat{L}_n = 0\right) = 0$ für $n \geq 0$ gilt offenbar $|\widehat{T}| = \infty$ f.s., d.h. die durch $\widehat{T}$ beschriebene Population stirbt im Gegensatz zum gewöhnlichen Galton-Watson-Prozeß mit Wahrscheinlichkeit 1 nicht aus.[2]

Die obige Konstruktion liefert uns eine Abbildung

$$(\widehat{T}, V) : \Omega \to \mathbb{T} \times \mathbb{V}$$

mit

$$\mathbb{V} := \bigcup_{n\geq 0} \mathbb{V}_n,$$

[2] Vermöge Satz 1.0.7 gilt offenkundig $P(|T| = \infty) = P(Z_n \not\to 0) = 1 - q < 1$.

wobei wir

$$\mathbb{V}_0 := \big\{(v_j)_{j\geq 0} : v_j \in \mathbb{N}^j \text{ und } v_{j+1} \succeq v_j \text{ für } j \geq 0\big\}$$

sowie für $n \geq 1$

$$\mathbb{V}_n := \big\{(v_0, \ldots, v_n, 0, 0, \ldots) : v_j \in \mathbb{N}^j \text{ für } 1 \leq j \leq n \text{ und } v_{j+1} \succeq v_j \text{ für } 0 \leq j < n\big\}$$

gesetzt haben.

Tatsächlich nimmt die Abbildung V nur Werte in $\mathbb{V}_0$ an. Die oben vorgenommene, zunächst künstlich erscheinende Vergrößerung des Bildbereichs erweist sich aber bald als nützlich, um ein Gegenstück zu Lemma 2.2.3 erbringen zu können. Analog zu unserem Vorgehen bei der Konstruktion von Galton-Watson-Bäumen besteht unsere nächste Aufgabe nämlich in der Bereitstellung einer geeigneten σ-Algebra auf dem Produktraum $\mathbb{T} \times \mathbb{V}$, so daß $(\widehat{T}, V)$ zu einer meßbaren Abbildung wird. Diesem Zweck dient das folgende Lemma:

3.1.4. Lemma. *(a) Die Abbildung $d' : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to [0, \infty)$, gegeben durch*

$$d'\left((v_n)_{n\geq 0}, (w_n)_{n\geq 0}\right) := \frac{1}{1 + \sup\{n \geq 0 : v_m = w_m \text{ für alle } m \leq n\}},$$

ist eine Metrik auf $\mathbb{V}$.

(b) $(\mathbb{V}, d')$ ist separabel. Genauer ist $\mathbb{V}^* := \mathbb{V} \backslash \mathbb{V}_0$ eine abzählbare dichte Teilmenge von $\mathbb{V}$.

Beweis. Da der Beweis analog zum Beweis von Lemma 2.2.3 verläuft, verzichten wir auf die Angabe. □

In Analogie zur Konstruktion von $\mathfrak{T}$ setzen wir nun für $v \in \mathbb{V}$ und $\varepsilon > 0$

$$B'(v, \varepsilon) := \{w \in \mathbb{V} : d'(v, w) < \varepsilon\}$$

und damit

$$\mathfrak{V} := \sigma\left(\{B'(v, \varepsilon) : v \in \mathbb{V}, \varepsilon > 0\}\right).$$

Die gute Nachricht lautet dann:

3.1.5. Lemma. *Die Abbildung* $(\widehat{T}, V)$ *ist* $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{T} \otimes \mathfrak{V}$*-meßbar.*

Beweis. Unter Rückgriff auf Satz 19.3 in [Als1] reicht es zu zeigen, daß

(i) $\widehat{T}$ $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{T}$-meßbar und

(ii) V $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{V}$-meßbar ist.

Der Nachweis von (i) erfolgt dabei wie der Beweis von Lemma 2.3.2: Gegeben $t \in \mathbb{T}$ und $k \geq 1$, erhalten wir

$$\widehat{T}^{-1}([t]_k) = \left\{\omega \in \Omega : \widehat{T}_{|k}(\omega) = t_{|k}\right\} \in \sigma\left(\left(\widehat{L}_n, C_n\right)_{0 \leq n \leq k-1}, (L_v)_{v \in \mathcal{N}: \ell(v) \leq k-1}\right) \subset \mathfrak{A}$$

und daraus die gewünschte Meßbarkeit von $\widehat{T}$.

Ähnlich gehen wir im Beweis von (ii) vor: Gegeben $v = (v_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{V}, 0 < \varepsilon < 1$ und $l := 1 + \left\lfloor \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right\rfloor$, ergeben sich für $\omega \in \Omega$ die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} V(\omega) \in B'(v, \varepsilon) &\iff \sup\{n : V_m(\omega) = v_m \text{ für alle } m \leq n\} > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \\ &\iff V_m(\omega) = v_m \quad \text{für alle } m \leq l \\ &\iff V_l(\omega) = v_l \end{aligned}$$

und weiter

$$V^{-1}\left(B'(v, \varepsilon)\right) = \{\omega \in \Omega : V_l(\omega) = v_l\} \in \sigma\left(\left(\widehat{L}_n, C_n\right)_{0 \leq n \leq l-1}\right) \subset \mathfrak{A},$$

also das Verlangte. □

Nachdem wir $(\widehat{T}, V)$ als $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{T} \otimes \mathfrak{V}$-meßbar erkannt haben, setzen wir zur Abkürzung

$$\widehat{\mathbf{Q}}_* := P^{(\widehat{T}, V)}$$

und

$$\widehat{\mathbf{Q}} := P^{\widehat{T}}.$$

Die hier vorgestellten Techniken stützen sich massiv auf den Zusammenhang zwischen den W-Maßen $\mathbf{Q}$ und $\widehat{\mathbf{Q}}$. Den Grundstein legt dabei das folgende, eminent wichtige Lemma. Vorab benötigen wir jedoch noch folgende abkürzende Bezeichnung:

Für $t \in \mathbb{T}$ und $\varrho \in t_n$ setzen wir

$$[t; \varrho]_n := \{(t', (v_n)_{n\geq 0}) \in \mathbb{T} \times \mathbb{V} : t' \in [t]_n, v_n = \varrho\} . \tag{3.1.2}$$

Diese Menge besteht also aus allen Tupeln $(t', (v_n)_{n\geq 0}) \in \mathbb{T} \times \mathbb{V}$, so daß der Baum t' in den ersten n Generationen mit t übereinstimmt und der Pfad $(v_n)_{n\geq 0}$ durch ϱ verläuft.

Damit können wir das in Aussicht gestellte wichtige Resultat formulieren, wobei vor allem (b) und (c) von Bedeutung sind.

3.1.6. Vergleichslemma. *Setzen wir $w_n(t) := \mu^{-n} z_n(t)$ für $t \in \mathbb{T}$ und $n \geq 0$, so gelten die folgenden Identitäten:*

(a)

$$\mathbf{Q}\left([t]_{n+1}\right) = p_{z_1(t)} \prod_{j=1}^{z_1(t)} \mathbf{Q}\left([t(j)]_n\right) \tag{3.1.3}$$

für alle $t \in \mathbb{T}$ und $n \geq 0$.

(b)

$$\widehat{\mathbf{Q}}_*\left([t; \varrho_n]_n\right) = \mu^{-n} \mathbf{Q}\left([t]_n\right) \tag{3.1.4}$$

für alle $t \in \mathbb{T}$, $n \geq 0$ und $\varrho_n \in t_n$.

(c)

$$\widehat{\mathbf{Q}}\left([t]_n\right) = w_n(t) \mathbf{Q}\left([t]_n\right) \tag{3.1.5}$$

für alle $t \in \mathbb{T}$ und $n \geq 0$.

(d) Setzen wir $\widehat{Z}_n := z_n \circ \widehat{T}$ für $n \geq 0$, so bildet $\widehat{Z}_n$ eine Größenverzerrung von Z_n, d.h. für $k \geq 1$ gilt

$$P(\widehat{Z}_n = k) = \frac{kP(Z_n = k)}{\mu^n} = \frac{kP(Z_n = k)}{EZ_n}. \tag{3.1.6}$$

Beweis. (a) Setzen wir abkürzend $k := z_1(t)$ und nehmen o.B.d.A. $k \geq 1$ an (sonst stimmen offenbar beide Seiten mit p_0 überein, wenn man leere Produkte als 1 interpretiert), so gilt offenbar

$$\{T \in [t]_{n+1}\} = \{Z_1 = k\} \cap \bigcap_{i=1}^{k} \{T(i) \in [t(i)]_n\};$$

o.B.d.A. $p_k > 0$ voraussetzend[3], erhalten wir unter Benutzung von Satz 2.3.5

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}\left([t]_{n+1}\right) &= p_k P\left(T(j) \in [t(j)]_n \text{ für } 1 \leq j \leq k | Z_1 = k\right) \\ &= p_k \prod_{j=1}^{k} P(T(j) \in [t(j)]_n | Z_1 = k) \\ &= p_k \prod_{j=1}^{k} \mathbf{Q}([t(j)]_n). \end{aligned}$$

(b) Wir verifizieren die Behauptung per Induktion nach n: Für $n = 0$ impliziert $T_0 = \widehat{T}_0 = \{(\emptyset)\}$ offenbar $\varrho_0 = (\emptyset)$ und somit für jedes $t \in \mathbb{T}$

$$\widehat{\mathbf{Q}}_* \left([t; \varrho_0]_0\right) = \widehat{\mathbf{Q}}_* \left([t; (\emptyset)]_0\right) = 1 = \mathbf{Q}\left([t]_0\right).$$

Die Behauptung sei nun für ein beliebiges, aber festes $n \geq 0$, alle $\overline{t} \in \mathbb{T}$ und $\overline{\varrho}_n \in \overline{t}_n$ bewiesen. Für den Induktionsschritt benötigen wir die folgende Zwischenrechnung:

Gegeben $t \in \mathbb{T}$ mit $k = z_1(t) \geq 1$ und $\varrho_{n+1} \in t_{n+1}$, existiert offenkundig ein eindeutig bestimmtes $i \in \{1, \ldots, k\}$ mit $\varrho_{n+1} \in t^{(i)}$, und es gilt

$$\widehat{\mathbf{Q}}_* \left([t; \varrho_{n+1}]_{n+1}\right) = \mu^{-1} p_k \widehat{\mathbf{Q}}_* \left([t(i); \pi_i(\varrho_{n+1})]_n\right) \prod_{j \neq i} \mathbf{Q}\left([t(j)]_n\right). \tag{3.1.7}$$

Zur Begründung ziehen wir folgendes Analogon zu Satz 2.3.5 heran: Offenbar können wir wiederum o.B.d.A. $p_k > 0$ annehmen. Dann gilt

$$P\left(\left(\widehat{L}_0, C_0\right) = (k, i)\right) = \mu^{-1} k p_k \cdot \frac{1}{k} > 0,$$

[3] Sonst verschwinden offenbar beide Seiten.

und gegeben $\left(\widehat{L}_0, C_0\right) = (k,i)$ sind die Abbildungen $\left(\widehat{T}(i), \pi_{(i)} \circ V\right)$ und $\widehat{T}(j), j \in \{1,\dots,k\} \setminus \{i\}$ meßbar und stochastisch unabhängig mit Verteilungen $\widehat{\mathbf{Q}}_*$ bzw. $\mathbf{Q}$. Damit folgt für

$$A := \left\{\left(\widehat{T}(i), \pi_{(i)} \circ V\right) \in [t(i); \pi_{(i)}(\varrho_{n+1})]\right\} \cap \bigcap_{j \neq i} \{T(j) \in [t(j)]_n\}$$

wie verlangt

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{Q}}_*\left([t;\varrho_{n+1}]_{n+1}\right) &= P(\{(\widehat{L}_0, C_0) = (k,i)\} \cap A) \\
&= P((\widehat{L}_0, C_0) = (k,i)) \cdot P\left(A \middle| \left(\widehat{L}_0, C_0\right) = (k,i)\right) \\
&= \mu^{-1} p_k \widehat{\mathbf{Q}}_*\left([t(i); \pi_{(i)}(\varrho_{n+1})]_n\right) \prod_{j \neq i} \mathbf{Q}\left([t(j)]_n\right).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir von der konstruktionsbedingten Tatsache Gebrauch gemacht, daß sich der größenverzerrte Galton-Watson-Baum „außerhalb“ des Rückgrats genauso verhält wie ein gewöhnlicher Galton-Watson-Baum (und unabhängig von der Fortpflanzung der Rückgratkomponenten $(V_n)_{n \geq 0}$).

Kombinieren wir dies in $(\star)$ mit der Induktionsvoraussetzung sowie mit (a), folgt wie verlangt

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{Q}}_*\left([t;\varrho_{n+1}]_{n+1}\right) &= \mu^{-1} p_k \widehat{\mathbf{Q}}_*\left([t(i); \pi_{(i)}(\varrho_{n+1})]_n\right) \prod_{j \neq i} \mathbf{Q}\left([t(j)]_n\right) \\
&\overset{(\star)}{=} \mu^{-1} p_k \mu^{-n} \mathbf{Q}([t(i)]_n) \prod_{j \neq i} \mathbf{Q}\left([t(j)]_n\right) \\
&\overset{\text{(a)}}{=} \mu^{-(n+1)} \mathbf{Q}([t]_{n+1}).
\end{aligned}$$

(c) Unter Benutzung von (b) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{Q}}([t]_n) &= P\left(\widehat{T} \in [t]_n\right) \\
&= \sum_{\xi \in t_n} P\left(\widehat{T} \in [t]_n, V_n = \xi\right) \\
&= \sum_{\xi \in t_n} \widehat{\mathbf{Q}}_*([t;\xi]_n) \\
&\overset{\text{(b)}}{=} \sum_{\xi \in t_n} \mu^{-n} \mathbf{Q}([t]_n) \\
&= w_n(t) \mathbf{Q}([t]_n).
\end{aligned}$$

(d) Mit (c) folgt für $k \geq 1$

$$\begin{aligned} P(\widehat{Z}_n = k) &= \sum_{t \in \mathbb{T}_n : z_n(t) = k} \widehat{\mathbf{Q}}([t]_n) \\ &\overset{(c)}{=} \sum_{t \in \mathbb{T}_n : z_n(t) = k} w_n(t) \mathbf{Q}([t]_n) \\ &= \sum_{t \in \mathbb{T}_n : z_n(t) = k} \mathbf{Q}([t]_n) \cdot \frac{k}{\mu^n} \\ &= \frac{k P(Z_n = k)}{\mu^n}. \end{aligned}$$

□

3.1.7. Bemerkungen. (a) Das soeben bewiesene Lemma zeigt für $n \geq 1$ insbesondere, daß – gegeben $B_n := \left\{ \widehat{T}_n = \{\xi_1, \ldots, \xi_p\} \right\}$ für ein $p \geq 1$ – die Rückgrat-Komponente V_n eine Laplace-Verteilung auf $\{\xi_1, \ldots, \xi_p\}$ besitzt.[4] Dies ist zum einen anschaulich evident, da in (b) der Term $\widehat{\mathbf{Q}}_* ([t; \varrho_n]_n)$ nicht von ϱ_n abhängt, zum anderen läßt sich diese Aussage durch eine formale Rechnung unter Verwendung der Teile (b) und (c) des obigen Vergleichslemmas bestätigen. Da wir diese Aussage aber nicht explizit benötigen, verzichten wir auf die Rechnung.

(b) Zu Beginn dieses Abschnitts hatten wir die Frage aufgeworfen, wann $\widehat{\mathbf{Q}}$ durch das Galton-Watson-Maß $\mathbf{Q}$ dominiert wird. Immerhin zeigt das Vergleichslemma für $n \geq 1$ und $t \in \mathbb{T}$

$$\widehat{\mathbf{Q}}([t]_n) = w_n(t) \mathbf{Q}([t]_n) = \int_{[t]_n} w_n(s)\, \mathbf{Q}(ds),$$

da w_n auf $[t]_n$ konstant ist. Bei dieser Feststellung belassen wir es aber zunächst und kommen für den Beweis des Satzes von Kesten und Stigum (☞ Satz 3.3.3) auf diesen Sachverhalt zurück.

Bei der Untersuchung superkritischer und subkritischer GWP kommen wir mit unseren bisherigen Werkzeugen allein nicht aus. Deshalb erweitern wir unser Repertoire an Hilfsmitteln im nächsten Abschnitt um Galton-Watson-Prozesse mit Immigration.

[4] Dabei unterstellen wir natürlich $P(B) > 0$.

3.2 Galton-Watson-Prozesse mit Immigration

In diesem Abschnitt stellen wir eine hilfreiche Erweiterung von Galton-Watson-Prozessen vor, die *Immigration* gestattet. Bemerkenswert ist dabei die Tatsache, daß wir die resultierenden *Galton-Watson-Prozesse mit Immigration (GWPI)* nicht primär als Verallgemeinerung von GWP betrachten, sondern umgekehrt Aussagen über GWPI für Beweise klassischer Konvergenzsätze für GWP nutzen. Dabei sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß zum Beweis dieser Hilfsaussagen keine tiefliegenden Ergebnisse über GWP erforderlich sind. Die beiden hier vorgestellten asymptotischen Resultate können mit Standardmethoden der Wahrscheinlichkeitstheorie bewiesen werden, so daß wir uns zu keiner Zeit der Gefahr eines „Ringschlusses" aussetzen.

3.2.1 Modellbeschreibung und eine nützliche Verteilungsidentität

Wir beginnen mit der formalen Definition von Galton-Watson-Prozessen mit Immigration.

3.2.1. Definition. Gegeben sei eine unabhängige Folge $(Y_n)_{n\geq 1}$ identisch verteilter Zufallsgrößen mit Werten in $\mathbb{N}_0$ und Verteilung $(p'_j)_{j\geq 0}$, die ferner unabhängig von $(L_{nk})_{n,k\geq 1}$ gewählt sei. Wir setzen $\Xi_0 := 0$ sowie für $n \geq 1$

$$\Xi_n := Y_n + \sum_{i=1}^{\Xi_{n-1}} L_{ni}. \tag{3.2.1}$$

Dann heißt $(\Xi_n)_{n\geq 0}$ *Galton-Watson-Prozeß mit Immigration (GWPI)* mit *Reproduktionsverteilung* $(p_j)_{j\geq 0}$, *Immigration* $(Y_n)_{n\geq 1}$ und *Immigrationsverteilung* $(p'_j)_{j\geq 0}$. $(\Xi_n)_{n\geq 0}$ wird wiederum als *superkritisch* (*kritisch, subkritisch*) bezeichnet, falls $\mu >$ $(=, <)$ 1 ist.

Diese Namensgebung läßt sich durch folgende Interpretation rechtfertigen: Wir starten mit $\Xi_0 = 0$ Individuen in Generation 0. In jeder der folgenden Generationen immigriert eine zufällige Anzahl von Individuen in unsere Population; dieser

Einwanderungsvorgang wird durch die Folge $(Y_n)_{n\geq 1}$ beschrieben. Anschließend erzeugen die Immigranten unabhängig wie die anderen Individuen (und unabhängig von diesen) Nachfahren gemäß der Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j\geq 0}$.

3.2.2. Bemerkungen. (a) Unsere Definition 3.2.1 weicht leicht von der in der Literatur üblichen Definition von GWPI ab (☞ [Als3], Kapitel II und [Jag], Chapter 3). Dort enthält bereits die 0-te Generation eine zufallsabhängige Anzahl von Immigranten gemäß der Verteilung $(p'_j)_{j\geq 0}$.

Satz 3.2.3 erklärt, warum wir gerade diesen Ansatz wählen.

(b) Im Verlauf dieses Abschnittes greifen wir noch auf eine andere Darstellung von GWPI zurück: Bezeichnet

$$((\zeta_n^{i,k})_{n\geq 0})_{i,k\geq 1}$$

eine Familie unabhängiger GWP mit Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j\geq 0}$, die unabhängig von $(Y_n)_{n\geq 1}$ ist, und setzen wir $\widetilde{\Xi}_0 := 0$ sowie für $n \geq 1$

$$\widetilde{\Xi}_n := \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\Xi}_{n,k} := \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{Y_k} \zeta_{n-k}^{i,k} \tag{3.2.2}$$

(☞ [AH], S. 50ff), so folgt

$$(\Xi_n)_{n\geq 0} \stackrel{d}{=} (\widetilde{\Xi}_n)_{n\geq 0},$$

d.h. $(\Xi_n)_{n\geq 0}$ und $(\widetilde{\Xi}_n)_{n\geq 0}$ besitzen dieselbe Verteilung. Zur Begründung ist lediglich eine geeignete, jedoch etwas umständliche Umindizierung der Zufallsgrößen $(L_{nk})_{n,k\geq 1}$ vorzunehmen.

Daher werden wir später gelegentlich annehmen, daß Ξ_n in der Form (3.2.2) vorliegt. Die Interpretation von (3.2.2) ist die folgende: Für $k \in \{1, \ldots, n\}$ löst jeder der Y_k Immigranten einen neuen GWP $((\zeta_n^{i,k})_{n\geq 0})$ aus, und

$$\widetilde{\Xi}_{n,k} = \sum_{i=1}^{Y_k} \zeta_{n-k}^{i,k}$$

beschreibt die Anzahl der Individuen in Generation n, die von Immigranten der Generation k abstammen.

(c) Im Fall $p'_0 < 1$ ist der Zustand 0 offenbar nicht absorbierend für $(\Xi_n)_{n\geq 0}$ (☞ Bemerkung 1.0.2(b)).

Das Fundament für die spätere Verwendung von GWPI zur Herleitung asymptotischer Resultate für gewöhnliche Galton-Watson-Prozesse bildet der folgende Satz, der die entscheidende Verbindung zwischen GWPI und größenverzerrten Galton-Watson-Bäumen (und somit via Vergleichslemma 3.1.6 zwischen GWPI und gewöhnlichen GWP) herstellt:

3.2.3. Satz. *Gegeben sei ein GWPI* $(\Xi_n)_{n\geq 0}$ *mit Immigration* $Y_n := \widehat{L}_n - 1$ *für* $n \geq 1$. *Dann gilt*

$$P^{(\Xi_n)_{n\geq 0}} = \widehat{\mathbf{Q}}^{(z_n-1)_{n\geq 0}} = P^{\left(\widehat{Z}_n-1\right)_{n\geq 0}}.$$

Beweis. Offenbar gilt $\widehat{\mathbf{Q}}^{z_0-1} = \delta_0 = P^{\Xi_0}$ und für $n \geq 0, (k_0, \ldots, k_{n+1}) \in \mathbb{N}_0^{n+2}$ unter Beachtung der stochastischen Unabhängigkeit von $Y_{n+1}, (L_{n+1,k})_{k\geq 1}$ und $(\Xi_0, \ldots, \Xi_n)$

$$\begin{aligned}
& P\left(\Xi_0 = k_0, \ldots, \Xi_n = k_n, \Xi_{n+1} = k_{n+1}\right) \\
= \; & P\left(\Xi_0 = k_0, \ldots, \Xi_n = k_n, Y_{n+1} + \sum_{i=1}^{k_n} L_{n+1,i} = k_{n+1}\right) \\
= \; & P\left(Y_{n+1} + \sum_{i=1}^{k_n} L_{n+1,i} = k_{n+1}\right) \cdot P\left(\Xi_0 = k_0, \ldots, \Xi_n = k_n\right) \\
= \; & P\left(\Xi_0 = k_0, \ldots, \Xi_n = k_n\right) \cdot \sum_{l=0}^{k_{n+1}} P\left(\widehat{L}_{n+1} = l+1, \sum_{i=1}^{k_n} L_{n+1,i} = k_{n+1} - l\right) \\
= \; & P\left(\Xi_0 = k_0, \ldots, \Xi_n = k_n\right) \cdot \sum_{l=0}^{k_{n+1}} (l+1) p_{l+1} \mu^{-1} p_{k_{n+1}-l}^{*(k_n)}
\end{aligned}$$

sowie andererseits mit $\Pi(k_0, \ldots, k_n) := \{t \in \mathbb{T}_n : z_0(t) = 1 + k_0, \ldots, z_n(t) = 1 + k_n\}$

$$\begin{aligned}
& \widehat{\mathbf{Q}}\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} \{z_i - 1 = k_i\}\right) \\
= \; & \sum_{t\in\Pi(k_0,\ldots,k_n)} \sum_{\xi\in t_n} P\left(\widehat{T} \in [t]_n, V_n = \xi, \widehat{L}_n + \sum_{w\in t_n, w\neq\xi} L_w = 1 + k_{n+1}\right) \\
\overset{(\star)}{=} \; & \sum_{t\in\Pi(k_0,\ldots,k_n)} \sum_{\xi\in t_n} \widehat{\mathbf{Q}}_*\left([t;\xi]_n\right) \cdot P\left(\widehat{L}_n + \sum_{w\in t_n, w\neq\xi} L_w = 1 + k_{n+1}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{t\in\Pi(k_0,\dots,k_n)} \widehat{\mathbf{Q}}\left([t]_n\right)\right)\cdot\left(\sum_{l=0}^{k_{n+1}}(l+1)p_{l+1}\mu^{-1}p^{*(k_n)}_{k_{n+1}-l}\right)\\
&= \widehat{\mathbf{Q}}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{z_i-1=k_i\}\right)\cdot\left(\sum_{l=0}^{k_{n+1}}(l+1)p_{l+1}\mu^{-1}p^{*(k_n)}_{k_{n+1}-l}\right).
\end{aligned}
$$

Dabei ist für $(\star)$ zu beachten, daß die Abbildungen $\left(\widehat{T}_n, V_n\right)$ und $\left(\widehat{L}_n, (L_w)_{w\in\mathbb{N}^n}\right)$ (bei festem n) offenbar stochastisch unabhängig sind.

Diese beiden Rechnungen zeigen induktiv die Identität

$$
P\left(\Xi_0=l_0,\dots,\Xi_m=l_m\right)=\widehat{\mathbf{Q}}\left(\bigcap_{i=1}^{m}\{z_i-1=l_i\}\right)
$$

für alle $m\geq 0$ und $(l_0,\dots,l_m)\in\mathbb{N}^{m+1}$.

Setzen wir noch

$$
\mathbb{P}_n((k_0,\dots,k_n),\cdot):=P(\Xi_{n+1}\in\cdot|\Xi_0=k_0,\dots,\Xi_n=k_n)
$$

für $n\geq 0$, so folgt unter Beachtung der Konvention $\frac{0}{0}:=0$ nun

$$
\mathbb{P}_n((k_0,\dots,k_n),\cdot)=\widehat{\mathbf{Q}}\left(z_{n+1}\in\cdot\,\middle|\,\bigcap_{i=1}^{n}\{z_i-1=k_i\}\right),
$$

so daß der Satz von Ionescu Tulcea (Satz 54.4 in [Als1])

$$
P^{(\Xi_n)_{n\geq 0}}=\delta_0\otimes\bigotimes_{n\geq 0}\mathbb{P}_n=\widehat{\mathbf{Q}}^{(z_n-1)_{n\geq 0}}=P^{\left(\widehat{Z}_n-1\right)_{n\geq 0}}
$$

zeigt. □

3.2.4. Bemerkung. Da $\widehat{Z}_n-1$ für $n\geq 0$ gerade die Mächtigkeit von $\widehat{T}_n\setminus\{V_n\}$ angibt, liefert Satz 3.2.3 die folgende anschauliche Interpretation größenverzerrter GWB mit Rückgrat: Nehmen wir an, daß die Familie $(L_{nk})_{n,k\geq 1}$ unabhängig von $(\widehat{L}_n)_{n\geq 0}$ und $(L_v)_{v\in\mathcal{N}}$ ist, so haben wir in der Situation von Satz 3.2.3 für $n\geq 0$ die Verteilungsidentität[5]

$$
\widehat{Z}_{n+1}-1\stackrel{d}{=}\Xi_{n+1}=\widehat{L}_{n+1}-1+\sum_{i=1}^{\Xi_n}L_{n+1,i}\stackrel{d}{=}\widehat{L}_n-1+\sum_{i=1}^{\widehat{Z}_n-1}L_{ni},
$$

[5]Man beachte hierzu auch die stochastische Unabhängigkeit von $\widehat{Z}_n$ und $(\widehat{L}_n,\widehat{L}_{n+1})$.

d.h. wir können $\widehat{L}_n - 1$, die um eins verringerte Anzahl der Nachfahren von V_n, als Immigration interpretieren.[6] Entsprechend läßt sich $\widehat{Z}_n - 1$ als Größe der n-ten Generation eines geeigneten GWPI auffassen.

Dieser Zusammenhang ist insofern hilfreich, da wir zwei für uns später wichtige Resultate hinsichtlich des asymptotischen Verhalten von GWPI in diesem Abschnitt bereitstellen können. Dabei kümmern wir uns zunächst um den superkritischen Fall.

3.2.2 Superkritische GWPI

Wir benötigen als erstes die folgende Hilfsaussage, die auf dem Lemma von Borel-Cantelli basiert:

3.2.5. Lemma. *Gegeben eine unabhängige Folge $(X_n)_{n\geq 0}$ identisch verteilter, nicht-negativer Zufallsgrößen mit $\eta := EX_0 \in [0,\infty]$, gelten die folgenden Aussagen:*

(a) $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = 0$ *f.s., falls* $\eta < \infty$.

(b) $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = \infty$ *f.s., falls* $\eta = \infty$.

(c) $\sum\limits_{n\geq 1} e^{X_n} c^n < \infty$ *f.s. für alle* $c \in (0,1)$, *falls* $\eta < \infty$.

(d) $\sum\limits_{n\geq 1} e^{X_n} c^n = \infty$ *f.s. für alle* $c \in (0,1)$, *falls* $\eta = \infty$.

Beweis. Eine Anwendung von Ungleichung (A.12) auf S. 115 in [Als1] auf X_0/ε liefert für $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} P\left(\frac{X_n}{n} > \varepsilon\right) &= \sum_{n\geq 1} P\left(\frac{X_0}{\varepsilon} > n\right) \\
&\leq \frac{EX_0}{\varepsilon} \\
&\leq \sum_{n\geq 0} P\left(\frac{X_0}{\varepsilon} > n\right) \\
&= \sum_{n\geq 0} P\left(\frac{X_n}{n} > \varepsilon\right).
\end{aligned}$$

[6] In Abbildung 3.1 entspricht $\widehat{L}_n - 1$ gerade der Anzahl der runden Knoten in Generation $n+1$.

Im Fall $\eta = EX_0 < \infty$ liefert das Borel-Cantelli-Lemma nun $P\left(\frac{X_n}{n} > \varepsilon \text{ u.o.}\right) = 0$ für jedes $\varepsilon > 0$, im Fall $\eta = \infty$ dagegen $P\left(\frac{X_n}{n} > \varepsilon \text{ u.o.}\right) = 1$ für jedes $\varepsilon > 0$. Daraus folgen (a) und (b).

(c) Für $A := \left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{X_n(\omega)}{n} = 0\right\}$ gilt $P(A) = 1$ gemäß Teil (a). Für $\omega \in A$, $0 < \varepsilon < -\log c$ und alle hinreichend großen n erhalten wir aber $X_n(\omega) \le n\varepsilon$, also

$$e^{X_n(\omega)}c^n \le e^{n(\varepsilon+\log c)} = (\underbrace{e^{\varepsilon+\log c}}_{<1})^n.$$

Dies liefert die f.s. Konvergenz der Reihe.

(d) Analog gilt im Fall $\eta = \infty$ gemäß (b) $P(B) = 1$ für

$$B := \left\{\omega \in \Omega : \limsup_{n\to\infty} \frac{X_n(\omega)}{n} = \infty\right\}.$$

Ist nun $\omega \in B$, so können wir nach eventuellem Übergang zu einer geeigneten Teilfolge $\lim_{n\to\infty} \frac{X_n(\omega)}{n} = \infty$ annehmen. Für alle hinreichend großen n gilt daher $X_n(\omega) \ge -n\log c$, also $e^{X_n(\omega)}c^n \ge 1$, was die f.s. Divergenz der Reihe bestätigt. $\square$

Bevor wir das von uns später benötigte Ergebnis über superkritische GWPI vorstellen können, ist noch eine Verallgemeinerung des wohlbekannten Martingal-Konvergenzsatzes (☞ Satz 17.2 in [Als2]) erforderlich, die Teil (a) des anschließenden Lemmas bildet:

3.2.6. Lemma. *(a) Es seien $(M_n)_{n\ge 0}$ eine Folge (nicht notwendig integrierbarer)*[7] *nichtnegativer Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $\liminf_{n\to\infty} M_n < \infty$ f.s. sowie $(\mathcal{G}_n)_{n\ge 0}$ eine Filtration von $(\Omega, \mathfrak{A})$, die den folgenden Bedingungen genügt:*

(i) $\mathcal{G}'_n := \sigma(M_0, \ldots, M_n) \subset \mathcal{G}_n \qquad (n \ge 0)$,

(ii) $E(M_{n+1}|\mathcal{G}_n) \ge M_n$ *f.s.* $\qquad (n \ge 0)$,

(iii) $\sup_{n\ge 0} E(M_n|\mathcal{G}_0) < \infty$ *f.s.*

Dann konvergiert $(M_n)_{n\ge 0}$ f.s. gegen eine endliche Zufallsgröße M_∞.

[7] Daher bildet die Folge $(M_n)_{n\ge 0}$ i.a. kein Martingal, so daß eine direkte Anwendung des Martingal-Konvergenzsatzes nicht in Frage kommt.

(b) *Es seien L, M nichtnegative Zufallsgrößen sowie N eine Zufallsvariable. Sind L und (M, N) stochastisch unabhängig sowie $l := EL$ endlich, so gilt*

$$E(L \cdot M|N) = l \cdot E(M|N) \quad P\text{-}f.s.$$

Beweis. (a) Eine Kopie der Beweise von Satz 15.3. sowie von Lemma 16.1. in [Als2] liefert für jede bzgl. $(\mathcal{G}'_n)_{n\geq 0}$ (und somit auch bzgl. $(\mathcal{G}_n)_{n\geq 0}$) vorhersagbare Folge $H = (H_n)_{n\geq 0}$ beschränkter, nichtnegativer Zufallsgrößen und

$$M^{(a)} := \left((M_n - a)^+\right)_{n\geq 0} \qquad (a \in \mathbb{R})$$

die Ungleichung

$$E\left(\left(H \cdot M^{(a)}\right)_{n+1} \middle| \mathcal{G}_n\right) \geq \left(H \cdot M^{(a)}\right)_n \qquad P\text{-f.s.},$$

da die Abbildung $x \mapsto (x-a)^+$ monoton wachsend ist. Daraufhin führt uns eine Kopie des Beweises der Überquerungsungleichung 17.1. in [Als2] für beliebige $b > a$ zur Ungleichung

$$(b-a)E\left(U_n(a,b)|\mathcal{G}_0\right) \leq E\left((M_n - a)^+\middle|\mathcal{G}_0\right) - E\left((M_0 - a)^+\middle|\mathcal{G}_0\right) \qquad P\text{-f.s.}; \tag{3.2.3}$$

dabei gibt $U_n(a,b)$ für $n \geq 0$ die Anzahl der aufsteigenden Überquerungen von $(M_k)_{k\geq 0}$ des Intervalls (a,b) bis zum Zeitpunkt n an. Nennen wir die Gesamtzahl der aufsteigenden Überquerungen von $(M_k)_{k\geq 0}$ dieses Intervalls $U_\infty(a,b)$, so gilt $U_n(a,b) \uparrow U_\infty(a,b) \quad (n \to \infty)$ und somit aufgrund monotoner Konvergenz (☞ Satz 51.3 in [Als1]) $\sup_{n\geq 0} E\left(U_n(a,b)|\mathcal{G}_0\right) = E(U_\infty(a,b)|\mathcal{G}_0)$. Das ergibt vermöge Abschätzung (3.2.3) und Bedingung (iii)

$$(b-a)E(U_\infty(a,b)|\mathcal{G}_0) \leq \sup_{n\geq 0} E\left((M_n - a)^+\middle|\mathcal{G}_0\right) \leq |a| + \sup_{n\geq 0} E(M_n|\mathcal{G}_0) < \infty$$

P-f.s., also

$$U_\infty(a,b) < \infty \qquad P\text{-f.s.}$$

Der Beweis des Martingalkonvergenzsatzes 17.2. in [Als2] liefert nun

$$P\left(\liminf_{n\to\infty} M_n < \limsup_{n\to\infty} M_n\right) = 0,$$

so daß $(M_n)_{n\geq 0}$ f.s. konvergiert. Aufgrund der Voraussetzung $\liminf_{n\to\infty} M_n < \infty$ f.s. folgt die Behauptung.

(b) Unter Verwendung von Satz 51.6(a) und (b) in [Als1] ergibt sich P-f.s.

$$E(L\cdot M|N) = E\left(E(L\cdot M|M,N)\big|N\right) = E\left(M\cdot E(L|N,M)\big|N\right) = l\cdot E(M|N).$$

$\square$

Nach diesen Vorarbeiten läßt sich jetzt das Hauptergebnis dieses Unterabschnitts beweisen (☞ Theorem II.6.1 oder Corollary II.6.2 in [AH]):

3.2.7. Satz. *Es sei $(\Xi_n)_{n\geq 0}$ ein superkritischer GWPI mit Immigration $(Y_n)_{n\geq 0}$.*

(a) Ist $\eta := E\log^+ Y_1 < \infty$, so konvergiert $(\Xi_n/\mu^n)_{n\geq 0}$ fast sicher gegen eine endliche Zufallsgröße Ξ_∞.

(b) Ist dagegen $\eta := E\log^+ Y_1 = \infty$, so gilt für jedes $c\in(0,\infty)$

$$\limsup_{n\to\infty} \Xi_n/c^n = \infty \qquad P\text{-}f.s.$$

Beweis. (a) Setzen wir $\mathcal{G} := \sigma((Y_k)_{k\geq 1})$, so ergibt sich unter Verwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz und von Lemma 3.2.6(b)

$$\begin{aligned} E\left(\Xi_n\big|\mathcal{G}\right) &= Y_n + \sum_{l\geq 0} E\left(\mathbb{1}_{\{\Xi_{n-1}=l\}}\sum_{i=1}^{l} L_{ni}\bigg|\mathcal{G}\right) \\ &= Y_n + \sum_{l\geq 0}(l\mu)E\left(\mathbb{1}_{\{\Xi_{n-1}=l\}}|\mathcal{G}\right) \\ &= Y_n + \mu E\left(\Xi_{n-1}|\mathcal{G}\right) \quad P\text{-f.s.}, \end{aligned}$$

denn für jedes $l\geq 0$ ist $\sum_{i=1}^{l} L_{ni}$ unabhängig von $(\mathbb{1}_{\{\Xi_{n-1}=l\}},(Y_k)_{k\geq 1})$ mit Erwartungswert $l\mu$. Bei Beachtung von $\Xi_0 = 0$ folgt daraus induktiv

$$E(\Xi_n/\mu^n|\mathcal{G}) = \sum_{k=1}^{n} Y_k/\mu^k \quad P\text{-f.s.}$$

Wenden wir nun Lemma 3.2.5 auf die Folge $\left(\log^+ Y_n\right)_{n\geq 1}$ an, so impliziert $\eta<\infty$

$$\sum_{k\geq 1} Y_k/\mu^k \leq \sum_{k\geq 1} e^{\log^+ Y_k}/\mu^k < \infty \qquad P\text{-f.s.}$$

Somit liefert das Lemma von Fatou für bedingte Erwartungswerte (Theorem 7.1.2 in [CT])

$$E\left(\liminf_{n\to\infty} \Xi_n/\mu^n \middle| \mathcal{G}\right) \le \liminf_{n\to\infty} E\left(\Xi_n/\mu^n \middle| \mathcal{G}\right) = \sum_{k\ge1} Y_k/\mu^k < \infty \qquad P\text{-f.s.}$$

und damit

$$\liminf_{n\to\infty} \Xi_n/\mu^n < \infty \qquad P\text{-f.s.}$$

Wir müssen nun nur noch verifizieren, daß die Folge $(\Xi_n/\mu^n)_{n\ge0}$ f.s. konvergiert. Dazu setzen wir für $n \ge 0$

$$\mathcal{G}_n := \sigma\left((Y_k)_{k\ge1}, \Xi_0, \ldots, \Xi_n\right) \supset \sigma(\Xi_0, \ldots, \Xi_n)$$

und erhalten für jedes $n \ge 0$

$$\begin{aligned} E\left(\Xi_{n+1}/\mu^{n+1} \middle| \mathcal{G}_n\right) &= Y_{n+1}/\mu^{n+1} + \mu^{-n-1} E\left(\sum_{i=1}^{\Xi_n} L_{n+1,i} \middle| \mathcal{G}_n\right) \\ &\ge \mu^{-n-1} \sum_{l\ge0} E\left(\mathbb{1}_{\{\Xi_n = l\}} \sum_{i=1}^{l} L_{n+1,i} \middle| \mathcal{G}_n\right) \\ &= \mu^{-n-1} \sum_{l\ge0} \mathbb{1}_{\{\Xi_n = l\}} \sum_{i=1}^{l} \underbrace{E L_{n+1,i}}_{=\mu} \\ &= \Xi_n/\mu^n \qquad P\text{-f.s.} \end{aligned}$$

Durch Anwendung von Lemma 3.2.6(a) erhalten wir nun die Behauptung, da

$$\sup_{n\ge0} E(\Xi_n/\mu^n | \mathcal{G}_0) = \sup_{n\ge0} E(\Xi_n/\mu^n | \mathcal{G}) = \sum_{k\ge1} Y_k/\mu^k < \infty \qquad P\text{-f.s.}$$

(b) Im Fall $\eta = \infty$ liefert Lemma 3.2.5 unmittelbar

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log^+ Y_n = \infty \qquad P\text{-f.s.}$$

und damit für jedes $c > 0$

$$\limsup_{n\to\infty} c^{-1} \exp\left(\frac{1}{n}\log Y_n\right) = \limsup_{n\to\infty} c^{-1} Y_n^{1/n} = \infty \qquad P\text{-f.s.},$$

also wegen $\Xi_n \ge Y_n$ wie gewünscht

$$\limsup_{n\to\infty} \Xi_n/c^n \ge \limsup_{n\to\infty} Y_n/c^n = \limsup_{n\to\infty} \left(c^{-1} Y_n^{1/n}\right)^n = \infty \qquad P\text{-f.s.}$$

□

3.2.3 Subkritische GWPI

In Analogie zum vorigen Unterabschnitt stellen wir nun ein später hilfreiches Konvergenzresultat über subkritische GWPI vor. Dazu verwenden wir das folgende Lemma, das eine Verallgemeinerung des Borel-Cantelli-Lemmas beinhaltet:

3.2.8. Lemma. *Es seien $(l_n)_{n\geq 1}$ eine Folge nichtnegativer, ganzer Zahlen, $(A_{n,l})_{n,l\geq 1}$ eine Familie stochastisch unabhängiger Ereignisse und $B_n := \bigcup_{l=1}^{l_n} A_{n,l}$ für $n \geq 1$, wobei diese Vereinigung im Fall $l_n = 0$ als leere Menge zu interpretieren ist. Dann haben wir die Implikation*

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} B_n\right) = 0 \Longrightarrow \sum_{n\geq 1}\sum_{l=1}^{l_n} P(A_{n,l}) < \infty.$$

Beweis. Wäre die besagte Reihe divergent, so folgte (☞ Beweis von Lemma 33.4 in [Als1]) aus der Unabhängigkeit der Ereignisse $(A_{n,l})_{n,l\geq 1}$ der Widerspruch

$$\begin{aligned} 1 &= P\left(\liminf_{n\to\infty} B_n^c\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{k\geq n}\bigcap_{l=1}^{l_k} A_{k,l}^c\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \prod_{k\geq n}\prod_{l=1}^{l_k} (1 - P(A_{k,l})) \\ &= \lim_{n\to\infty} \exp\left(\sum_{k\geq n}\sum_{l=1}^{l_k} \log(1 - P(A_{k,l}))\right) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \exp\left(-\sum_{k\geq n}\sum_{l=1}^{l_k} P(A_{k,l})\right) = 0. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Stetigkeit von P sowie die (bei Beachtung der Konvention $\log 0 := -\infty$) für $x \in [0,1]$ gültige Ungleichung $\log x \leq x - 1$ verwendet. □

Damit zeigen wir nun (vgl. auch Theorem II.6.4 in [AH]):

3.2.9. Satz. *Für einen subkritischen GWPI $(\Xi_n)_{n\geq 0}$ mit Immigration $(Y_n)_{n\geq 0}$ gelten die folgenden Aussagen:*

(a) Ist $\eta = E\log^+ Y_1 < \infty$, so konvergiert $(\Xi_n)_{n\geq 0}$ in Verteilung gegen eine endliche Zufallsgröße Ξ_∞.

(b) Im Fall $\eta = \infty$ konvergiert $(\Xi_n)_{n\geq 0}$ dagegen in Wahrscheinlichkeit gegen unendlich, d.h. für jedes $k \geq 1$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} P(\Xi_n \leq k) = 0.$$

Beweis. Wir benutzen die Darstellung

$$\Xi_n \stackrel{d}{=} \widetilde{\Xi}_n = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\Xi}_{n,k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{Y_k} \zeta_{n-k}^{i,k}$$

gemäß (3.2.2). Bezeichnen wir hierbei für $n \geq 1$ die e.F. von Ξ_n, Y_1 und $\zeta_n^{1,1}$ mit h_n, g bzw. f_n,[8] so erhalten wir für $s \in [0,1]$ unter Benutzung der bestehenden Unabhängigkeitsbeziehungen, von Lemma I.2.1 in [Als3] sowie der identischen Verteilung der Folge $(Y_k)_{k\geq 1}$

$$\begin{aligned} h_n(s) &= Es^{\widetilde{\Xi}_n} \\ &= Es^{\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{Y_k}\zeta_{n-k}^{i,k}} \\ &= \prod_{k=1}^{n} Es^{\sum_{i=1}^{Y_k}\zeta_{n-k}^{i,k}} \\ &= \prod_{k=1}^{n} g\circ f_{n-k} \\ &= \prod_{k=1}^{n} g\circ f_{k-1} \\ &= \prod_{k=1}^{n} Es^{\sum_{i=1}^{Y_k}\zeta_{k-1}^{i,k}} \\ &= Es^{\sum_{k=1}^{n}\widetilde{\Xi}_{2k-1,k}}, \end{aligned}$$

[8] Aufgrund der Verteilungsidentität $\zeta_n^{i,k} \stackrel{d}{=} Z_n$ besitzt jedes $\zeta_n^{i,k}$ die in Kapitel 1 definierte e.F. f_n.

so daß der Eindeutigkeitssatz für e.F. bzw. Laplace-Transformierte (☞ Satz 42.4 in [Als1]) für $n \geq 1$

$$\Xi_n \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\widetilde{\Xi}}_{2k-1,k} =: S_n$$

zeigt. Offenbar ist die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$ monoton wachsend und daher konvergent mit Limes

$$\Xi_\infty := \sum_{k\geq 1} \widetilde{\widetilde{\Xi}}_{2k-1,k}.$$

Da die Zuwächse

$$X_k := \widetilde{\widetilde{\Xi}}_{2k-1,k} = \sum_{i=1}^{Y_k} \zeta_{k-1}^{i,k} = \sum_{l\geq 1} \mathbb{1}_{\{Y_k=l\}} \sum_{i=1}^{l} \zeta_{k-1}^{i,k}$$

offenbar stochastisch unabhängig sind, erhalten wir mit dem Lemma von Borel-Cantelli unter Beachtung von $P(X_k \in \mathbb{N}_0) = 1$ für jedes k die Implikationen

$$\sum_{k\geq 1} P(X_k \geq 1) < \infty \Longrightarrow P\left(\limsup_{k\to\infty}\{X_k \geq 1\}\right) = 0 \Longrightarrow P(\Xi_\infty < \infty) = 1$$

und

$$\sum_{k\geq 1} P(X_k \geq 1) = \infty \Longrightarrow P\left(\limsup_{k\to\infty}\{X_k \geq 1\}\right) = 1 \Longrightarrow P(\Xi_\infty < \infty) = 0,$$

folglich

$$P(\Xi_\infty < \infty) \in \{0, 1\}. \tag{3.2.4}$$

(a) Es sei nun $\eta < \infty$ vorausgesetzt. Dann zeigt eine elementare Rechnung

$$E(\Xi_\infty|\mathcal{G}) = \sum_{k\geq 1}\sum_{l\geq 1} \mathbb{1}\underbrace{\{Y_k = l\}}_{\in\mathcal{G}} \underbrace{E\left(\sum_{i=1}^{l} \zeta_{k-1}^{i,k}\middle|\mathcal{G}\right)}_{=l\mu^{k-1}} = \sum_{k\geq 1} Y_k \mu^{k-1} \qquad P\text{-f.s.},$$

wobei $\mathcal{G}$ weiterhin die von $(Y_k)_{k\geq 1}$ erzeugte σ-Algebra bezeichne. Nun kommt erneut Lemma 3.2.5 ins Spiel: Angewandt auf die Folge $(\log^+ Y_n)_{n\geq 1}$ und $c = \mu \in (0,1)$ garantiert es wegen $\eta < \infty$ die f.s. Konvergenz der Reihe $\sum_{k\geq 1} \mu^k e^{\log^+ Y_k}$, so daß

$$\sum_{k\geq 1} Y_k \mu^{k-1} = E(\Xi_\infty|\mathcal{G}) < \infty \qquad P\text{-f.s.}$$

erfüllt ist. Daher gilt

$$P(\Xi_\infty < \infty) = 1,$$

so daß wir insgesamt

$$\Xi_n \stackrel{d}{=} S_n \xrightarrow{d} \Xi_\infty \qquad (n \to \infty)$$

und damit das Verlangte erhalten, da Ξ_∞ wie gesehen f.s. endlich ist.

(b) Für den Nachweis dieser Aussage setzen wir $\eta = \infty$ voraus und zeigen im folgenden $P(\Xi_\infty = \infty) = 1$. Dazu nehmen wir $P(\Xi_\infty = \infty) < 1$, also gemäß (3.2.4)

$$P(\Xi_\infty = \infty) = P\left(\sum_{k\geq 1}\sum_{i=1}^{Y_k} \zeta_{k-1}^{i,k} = \infty\right) = 0$$

an, so daß für $D_k := \{\sum_{i=1}^{Y_k} \zeta_{k-1}^{i,k} \geq 1\}$

$$P\left(\limsup_{k\to\infty} D_k\right) = P\left(\limsup_{k\to\infty} D_k \middle| \mathcal{G}\right) = 0 \qquad P\text{-f.s.}$$

gilt. Da $\mathcal{G}$ und $\left(\left(\zeta_n^{i,k}\right)_{n\geq 0}\right)_{i,k\geq 1}$ stochastisch unabhängig sind, erhalten wir

$$\begin{aligned} P\left(\limsup_{k\to\infty} D_k \middle| Y_i = y_i,\ i \geq 1\right) &= P\left(\limsup_{k\to\infty} \left\{\sum_{i=1}^{y_k} \zeta_{k-1}^{i,k} \geq 1\right\}\right) \\ &= P\left(\limsup_{k\to\infty} B_k\right) = 0 \end{aligned}$$

für $P^{(Y_k)_{k\geq 1}}$-f.a. $(y_k)_{k\geq 1}$, wobei wir abkürzend $B_k := \bigcup_{i=1}^{y_k} \underbrace{\left\{\zeta_{k-1}^{i,k} \geq 1\right\}}_{=:A_{k,i}}$ gesetzt haben. Die Familie $(A_{k,i})_{k,i\geq 1}$ erfüllt offenbar die Voraussetzungen des vorangegangenen Lemmas (mit $(l_k)_{k\geq 1} = (y_k)_{k\geq 1}$), woraus wir mit diesem

$$\sum_{k\geq 1}\sum_{i=1}^{y_k} P(A_{k,i}) = \sum_{k\geq 1}\sum_{i=1}^{y_k} P(Z_{k-1} \geq 1) = \sum_{k\geq 1} y_k P(Z_{k-1} \geq 1) < \infty$$

für $P^{(Y_k)_{k\geq 1}}$-f.a. $(y_k)_{k\geq 1}$, also

$$\sum_{k\geq 1} Y_k P(Z_{k-1} \geq 1) < \infty \qquad P\text{-f.s.}$$

schließen können. Beachten wir für $k \geq 1$ noch die einfache Ungleichung $e^{\log^+ Y_k} \leq 1 + Y_k$ sowie die Abschätzung $P(Z_{k-1} \geq 1) \geq (1-p_0)^{k-1}$ (☞ Lemma 1.0.9), so ergibt sich wegen $0 < p_0 < 1$ (☞ Generalvoraussetzung 1.0.6)

$$\sum_{k \geq 1} e^{\log^+ Y_k} (1-p_0)^k < \infty$$

und folglich im Hinblick auf Lemma 3.2.5(d) (mit $c = 1 - p_0$) der Widerspruch

$$\eta = E \log^+ Y_1 < \infty.$$

Deshalb gilt $P(\Xi_\infty = \infty) = 1$ und somit für jedes $k \geq 1$ unter Berücksichtigung der Monotonie der Folge $(S_n)_{n \geq 1}$ und der Stetigkeit von P

$$1 = P\left(\bigcup_{n \geq 1} \{S_n > k\}\right) = \lim_{n \to \infty} P(S_n > k) = 1 - \lim_{n \to \infty} P(\Xi_n \leq k).$$

Dies bestätigt unsere Behauptung.

□

Wir haben nun alle notwendigen Vorbereitungen für die Untersuchung von GWP erledigt und widmen uns im nächsten Abschnitt dem superkritischen Fall ($\mu > 1$).

3.3 Superkritische Galton-Watson-Prozesse

Wir haben bereits in Kapitel 1 erwähnt, daß für jeden superkritischen GWP $(Z_n)_{n \geq 0}$ die Folge $(W_n)_{n \geq 0}$, gegeben durch $W_n = \mu^{-n} Z_n$ für $n \geq 0$, f.s. gegen eine endliche Zufallsgröße W mit $EW \leq EW_0 = 1$ konvergiert, und zugleich die Frage aufgeworfen, unter welchen Bedingungen W nicht f.s. verschwindet, d.h. die Folge $(\mu^n)_{n \geq 0}$ eine geeignete Normierungsfolge für $(Z_n)_{n \geq 0}$ bildet. Eine vollständige Antwort auf diese Frage werden wir in diesem Abschnitt liefern (☞ Satz 3.3.3). Dabei nehmen wir gemäß Bemerkung 2.1.1 o.B.d.A. an, daß Z_n in der Form $Z_n = z_n \circ T$ für einen Galton-Watson-Baum T gegeben ist; außerdem halten wir weiterhin an unserer Generalvoraussetzung 1.0.6 fest und erinnern an die Tatsache, daß im superkritischen Fall die Aussterbewahrscheinlichkeit q die Ungleichung $0 < q < 1$ erfüllt (☞ Satz 1.0.7).

Sodann beinhaltet der folgende Satz ein erstes Ergebnis im Hinblick auf die zu diskutierende Fragestellung:

3.3.1. Satz. *Für jeden Galton-Watson-Prozeß* $(Z_n)_{n\geq 0}$ *gilt*

$$P(W=0) \in \{q, 1\}.$$

Mit anderen Worten:

Entweder ist $W = 0$ *P-f.s. oder* $W > 0$ *P-f.s. auf* $\{Z_n \not\to 0\} = \{Z_n \to \infty\}$.

Beweis. In diesem Beweis greifen wir auf die erzeugende Funktion von Z_1 zurück, die wir in Kapitel 1 vorgestellt haben. Da bei Gültigkeit von Generalvoraussetzung 1.0.6 q und 1 die einzigen Fixpunkte von f in $[0,1]$ sind (☞ Satz 1.0.7), genügt es zu zeigen, daß $P(W=0)$ ein solcher Fixpunkt ist. Dazu verwenden wir Satz 2.3.5: Offenbar haben wir für $n \geq 0$ die Zerlegung

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_1} \underbrace{z_n \circ T(i)}_{=:Z_n(i)},$$

wobei weiterhin $T(i) = \{w \in \mathcal{N} : (i,w) \in T\}$ den i-ten geshifteten Teilbaum von T bezeichne, und somit für jedes $n \geq 0$

$$Z_{n+1}/\mu^{n+1} = \mu^{-1} \sum_{i=1}^{Z_1} \underbrace{Z_n(i)/\mu^n}_{=:W_n(i)}.$$

Da die linke Seite f.s. gegen W konvergiert, können wir $n \to \infty$ gehen lassen und erhalten

$$\lim_{n\to\infty} \mu^{-1} \sum_{i=1}^{Z_1} W_n(i) = W \qquad P\text{-f.s..}$$

Bei vorgegebenem $k \geq 1$ mit $p_k > 0$ steht uns aber vermöge Satz 2.3.5 die Identität

$$P^{(W_n)_{n\geq 0}} = P\left((W_n(i))_{n\geq 0} \in \cdot | Z_1 = k\right)$$

zur Verfügung, speziell also

$$P\left((W_n(i))_{n\geq 0} \text{ konvergiert } | Z_1 = k\right) = 1$$

für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$. Bezeichnen wir die (unter $P(\cdot|Z_1 = k)$) fast sicheren Grenzwerte mit $W(i)$, so sind diese gegeben $Z_1 = k$ ebenfalls stochastisch unabhängig mit derselben Verteilung wie W, denn Satz 2.3.5 impliziert, daß die Folgen $(W_n(1))_{n\geq 0}, \dots, (W_n(k))_{n\geq 0}$ gegeben $Z_1 = k$ stochastisch unabhängig sind.

Insgesamt sehen wir damit

$$\begin{aligned} P(W=0) &= \sum_{k\geq 0:\, p_k>0} p_k P(W=0|Z_1=k) \\ &= \sum_{k\geq 0:\, p_k>0} p_k P\left(\lim_{n\to\infty} \mu^{-1} \sum_{i=1}^{k} W_n(i) = 0 \middle| Z_1 = k\right) \\ &= \sum_{k\geq 0:\, p_k>0} p_k P\left(\sum_{i=1}^{k} W(i) = 0 \middle| Z_1 = k\right) \\ &= \sum_{k\geq 0} p_k P(W=0)^k \\ &= f(P(W=0)), \end{aligned}$$

so daß $P(W = 0)$ tatsächlich einen Fixpunkt von f in $[0, 1]$ bildet. □

In Bemerkung 3.1.7(b) mußten wir die Frage, wann die Verteilung $\widehat{\mathbf{Q}}$ des größenverzerrten GWB durch das Galton-Watson-Maß $\mathbf{Q}$ dominiert wird, zurückstellen. Das folgende, sehr allgemein formulierte Lemma ebnet nun den Weg, um auch diesen Sachverhalt in Satz 3.3.3 aufdecken zu können:

3.3.2. Lemma. *Es seien $(\Omega^*, \mathcal{F})$ ein meßbarer Raum, α, β Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega^*, \mathcal{F})$ sowie $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ eine Filtration von $(\Omega^*, \mathcal{F})$ mit $\sigma(\cup_{n\geq 0}\mathcal{F}_n) = \mathcal{F}$. Für $\alpha_n := \alpha_{|\mathcal{F}_n}$ und $\beta_n := \beta_{|\mathcal{F}_n}$ gelte $\alpha_n \ll \beta_n$ mit $\frac{d\alpha_n}{d\beta_n} = X_n$ für $n \geq 0$.*

Dann folgt mit $X := \limsup_{n\to\infty} X_n$:

(a) α besitzt die folgende Zerlegung in einen absolut β-stetigen und einen β-singulären Summanden:

$$\alpha(A) = \int_A X\, d\beta + \alpha\left(A \cap \{X = \infty\}\right) \qquad (A \in \mathcal{F}). \tag{3.3.1}$$

(b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) $\alpha \ll \beta$

(ii) $X < \infty \quad \alpha$*-f.s.*

(iii) $\int_{\Omega^*} X \, d\beta = \alpha(\Omega^*) = 1.$

(c) Dual dazu sind äquivalent:

(iv) $\alpha \perp \beta$

(v) $X = \infty \quad \alpha$*-f.s.*

(vi) $\int_{\Omega^*} X \, d\beta = 0.$

Beweis. (a) Wir zeigen als erstes, daß $(X_n)_{n\geq 0}$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ und β bildet: Jedes X_n ist offenkundig $\mathcal{F}_n$-meßbar sowie β-integrierbar wegen $1 = \alpha(\Omega^*) = \int X_n \, d\beta$. Seien nun $n \geq 0$ und $A \in \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$. Dann ergibt sich

$$\int_A X_{n+1} \, d\beta = \alpha_{n+1}(A) = \alpha_n(A) = \int_A X_n \, d\beta; \tag{3.3.2}$$

da X_n $\mathcal{F}_n$-meßbar ist, bildet somit tatsächlich X_n eine Version von $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$, so daß wir $(X_n)_{n\geq 0}$ als nichtnegatives Martingal erkannt haben. Der Martingal-Konvergenzsatz (Satz 17.2 in [Als2]) liefert daher

$$X = \lim_{n\to\infty} X_n < \infty \qquad \beta\text{-f.s.}$$

Um nun Beziehung (3.3.1) nachzuweisen, nehmen wir zunächst $\alpha \ll \beta$ mit $\frac{d\alpha}{d\beta} = Y$ an. Dann ist Y β-integrierbar sowie X_n eine Version von $E(Y|\mathcal{F}_n)$ bzgl. β, wie eine zu (3.3.2) analoge Rechnung zeigt, so daß Satz 18.3 in [Als2]

$$X_n \xrightarrow{\mathfrak{L}_1} X \qquad (n \to \infty)$$

liefert. Ist nun $B \in \mathcal{F}_n$ für ein $n \geq 0$, so folgt für alle $m \geq n$

$$\int_B Y \, d\beta = \int_B X_m \, d\beta \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_B X \, d\beta \leq 1,$$

d.h.

$$\alpha(B) = \int_B Y \, d\beta = \int_B X \, d\beta.$$

Da $\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{F}_n$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{F}$ ist, schließen wir vermöge Satz 3.8 in [Als1] für alle $A \in \mathcal{F}$

$$\alpha(A) = \int_A X\, d\beta. \tag{3.3.3}$$

Beziehung (3.3.1) folgt, da $\beta\left(A \cap \{X = \infty\}\right) \leq \beta(X = \infty) = 0$, also auch $\alpha\left(A \cap \{X = \infty\}\right) = 0$.

Für den allgemeinen Fall setzen wir $\varrho := \frac{\alpha+\beta}{2}$ und $\varrho_n := \varrho_{|\mathcal{F}_n}$. Dann gilt $\alpha, \beta \ll \varrho$, und wir können das soeben Bewiesene auf $U_n := \frac{d\alpha_n}{d\varrho_n}$ und $V_n := \frac{d\beta_n}{d\varrho_n}$ anwenden. Dazu setzen wir $U := \limsup_{n\to\infty} U_n$ sowie $V := \limsup_{n\to\infty} V_n$. Für jedes $n \geq 1$ und $B \in \mathcal{F}_n$ gilt

$$\int_B (U_n + V_n)\, d\varrho = \alpha(B) + \beta(B) = 2\varrho(B) = \int_B 2\, d\varrho,$$

also

$$\varrho(U_n + V_n = 2) = 1. \tag{3.3.4}$$

Die gleiche Argumentation wie oben liefert $U_n \to U$ und $V_n \to V$ ϱ-f.s. für $n \to \infty$; in Verbindung mit Gleichung (3.3.4) zeigt dies $\varrho(U = V = 0) = 0$, so daß U/V ϱ-f.s. wohldefiniert ist. Weiter folgt damit unter Hinweis auf Korollar 13.5 in [Als1]

$$\frac{U}{V} = \frac{\lim_{n\to\infty} U_n}{\lim_{n\to\infty} V_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{d\alpha_n/d\varrho_n}{d\beta_n/d\varrho_n} = \lim_{n\to\infty} X_n = X \;\; \varrho\text{-f.s.}$$

Ferner erhalten wir für $A \in \mathcal{F}$ in Analogie zu (3.3.3)

$$\alpha(A) = \int_A U\, d\varrho \qquad \text{und} \qquad \beta(A) = \int_A V\, d\varrho$$

und daher letztlich

$$\begin{aligned}
\alpha(A) &= \int_A U\, d\varrho \\
&= \int_A U \mathbb{1}_{\{V\neq 0\}}\, d\varrho + \int_A U \mathbb{1}_{\{V=0\}}\, d\varrho \\
&= \int_A XV\, d\varrho + \int_A U \mathbb{1}_{\{V=0\}}\, d\varrho \\
&= \int_A X\, d\beta + \int_A U \mathbb{1}_{\{X=\infty\}}\, d\varrho
\end{aligned}$$

$$= \int_A X\, d\beta + \alpha\left(A \cap \{X = \infty\}\right),$$

also (a).

Damit können wir nun zum Beweis von (b) und (c) schreiten:

(b) „(i)⇒ (ii)“: Ist α absolut stetig bzgl. β, so ist wegen $\beta(X = \infty) = 0$ die Menge $\{X = \infty\}$ auch eine α-Nullmenge.

„(ii)⇒ (iii)“: Gilt $\alpha(X = \infty) = 0$, so liefert (a) $1 = \alpha(\Omega^*) = \int_{\Omega^*} X\, d\beta$.

„(iii)⇒ (i)“: Ist (iii) erfüllt, so zeigt (a)

$$1 = \alpha(\Omega^*) = \underbrace{\int_{\Omega^*} X\ d\beta}_{=1} + \alpha(X = \infty)$$

und folglich $\alpha(X = \infty) = 0$. Das ergibt mit (a) $\alpha(A) = \int_A X\, d\beta$ für $A \in \mathcal{F}$, d.h. $\alpha \ll \beta$.

(c) „(iv)⇒ (v)“: Sind α und β singulär, so existiert ein $A \in \mathcal{F}$ mit $\alpha(A^c) = \beta(A) = 0$. Unter Benutzung von (a) erhalten wir

$$1 = \alpha(A) = \underbrace{\int_A X\ d\beta}_{=0} + \alpha\left(A \cap \{X = \infty\}\right) = \alpha\left(A \cap \{X = \infty\}\right),$$

also $\alpha(X = \infty) = 1$.

„(v)⇒ (vi)“: Im Fall $\alpha(X = \infty) = 1$ folgt vermöge (a)

$$\alpha(\Omega^*) = 1 = \underbrace{\alpha(X = \infty)}_{=1} + \int_{\Omega^*} X\, d\beta,$$

also $\int_{\Omega^*} X\, d\beta = 0$.

„(vi)⇒ (iv)“: Wegen $\int_{\{X<\infty\}} X\, d\beta = 0$ ergibt sich mit (a)

$$\alpha(X < \infty) = \alpha(\emptyset) = 0 = \beta(X = \infty)$$

und damit die Singularität von α und β.

□

Wir kommen nun zum Hauptergebnis dieses Abschnitts, einer erstmalig im Jahre 1966 von H. Kesten und B. Stigum (in der allgemeineren Situation mehrdimensionaler GWP) bewiesenen Charakterisierung des asymptotischen Verhaltens der Folge $(W_n)_{n\geq 0}$ (☞ [KeSt]). Für einen auf die spezielle Situation gewöhnlicher GWP zugeschnittenen Beweis mittels erzeugender Funktionen sei auf [Jag], Theorem (2.7.1) hingewiesen; ein anderer Zugang findet sich in [AH], Theorem II.2.1.

Für den Beweis des Satzes verwenden wir die Teile (b) und (c) des soeben bewiesenen Lemmas, Aussage (a) diente uns lediglich als Hilfsmittel zum Beweis dieser beiden Teile.

3.3.3. Satz. (Kesten, Stigum) *Es seien $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein superkritischer GWP und $W = \lim_{n\to\infty} W_n$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $P(W = 0) = q$

(ii) $EW = 1$

(iii) $EZ_1 \log^+ Z_1 = \sum_{k\geq 1} p_k k \log k < \infty.$

Beweis. Für $n \geq 0$ setzen wir $\mathcal{E}_n := \{[t]_n :\ t \in \mathbb{T}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{T}\}$ und $\mathcal{F}_n := \sigma(\mathcal{E}_n)$. Zum Beweis des Satzes wenden wir das vorangegangene Lemma auf $\Omega^* = \mathbb{T}$, $\mathcal{F} = \mathfrak{T}$, $\alpha = \widehat{\mathbf{Q}}$ und $\beta = \mathbf{Q}$ an. Dazu weisen wir zunächst nach, daß die Folge $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ wirklich eine Filtration von $(\mathbb{T}, \mathfrak{T})$ bildet: Offenbar gilt wegen $\mathcal{E}_0 = \{\emptyset, \mathbb{T}\}$

$$\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{E}_n = \mathcal{E},$$

wobei wir an Beziehung (2.2.2) erinnern, und somit $\mathcal{F}_k \subset \mathfrak{T}$ für jedes $k \geq 0$ sowie $\sigma\left(\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{F}_n\right) = \mathfrak{T}$.

Für $n \geq 0$ ist noch $\mathcal{E}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ zu zeigen; diese Inklusion ergibt sich aber mittels der Darstellung

$$[t^*]_n = \bigcup_{t\in\mathbb{T}\cap[t^*]_n :\, H(t)\leq n+1} [t]_{n+1} \subset \mathcal{F}_{n+1}$$

(abzählbare Vereinigung) für jedes $t^* \in \mathbb{T}$. Insgesamt haben wir also $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ als Filtration von $(\mathbb{T}, \mathfrak{T})$ erkannt.

Betrachten wir jetzt für $n \geq 1$ das durch

$$\zeta_n(B) := \int_B w_n(s)\, \mathbf{Q}(ds)$$

definierte Wahrscheinlichkeitsmaß ζ_n auf $(\mathbb{T}, \mathfrak{T})$ (man beachte die einfache Identität $\zeta_n(\mathbb{T}) = \int_{\mathbb{T}} z_n(s)/\mu^n\, \mathbf{Q}(ds) = \mu^{-n} E(z_n \circ T) = 1$), so liefert uns Vergleichslemma 3.1.6(c) für $A = [t]_n \in \mathcal{E}_n$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{Q}}(A) &= w_n(t)\mathbf{Q}([t]_n) \\ &= \int_{[t]_n} w_n(t)\, \mathbf{Q}(dt') \\ &= \int_A w_n(t')\, \mathbf{Q}(dt') \\ &= \zeta_n(A), \end{aligned}$$

denn für $t' \in [t]_n$ gilt offenbar $w_n(t') = w_n(t)$.

Somit stimmen die W-Maße ζ_n und $\widehat{\mathbf{Q}}$ auf $\mathcal{E}_n$ überein. Um diese Gleichheit auf $\mathcal{F}_n$ auszudehnen, haben wir gemäß Satz 3.8 in [Als1] nur noch die $\cap$-Stabilität von $\mathcal{E}_n$ zu verifizieren; diese Eigenschaft läßt sich jedoch unmittelbar aus Gleichung (2.2.1) ablesen.

Insgesamt erhalten wir

$$\widehat{\mathbf{Q}}_{|\mathcal{F}_n} \ll \mathbf{Q}_{|\mathcal{F}_n}$$

mit

$$\frac{d\widehat{\mathbf{Q}}_{|\mathcal{F}_n}}{d\mathbf{Q}_{|\mathcal{F}_n}} = w_n.$$

Dazu ist anzumerken, daß für $k \geq 1$

$$z_n^{-1}(\{k\}) = \{t \in \mathbb{T} : z_n(t) = k\} = \bigcup_{t \in \mathbb{T}_n :\, |t_n| = k} [t]_n \in \mathcal{F}_n$$

gilt (abzählbare Vereinigung) und somit z_n, daher auch w_n $\mathcal{F}_n$-meßbar ist für jedes n.

Für den restlichen Beweis setzen wir $w := \limsup_{n\to\infty} w_n$, so daß $W = w \circ T$ gilt. Da – wie oben nachgeprüft – alle Voraussetzungen für Lemma 3.3.2 erfüllt sind, ergibt sich mit den Teilen (b) und (c) desselben die entscheidende Dichotomie: Wir haben einerseits die Äquivalenzen

$$\int_{\mathbb{T}} w\, d\mathbf{Q} = 1 \iff \widehat{\mathbf{Q}} \ll \mathbf{Q} \iff w < \infty \quad \widehat{\mathbf{Q}}\text{-f.s.} \tag{3.3.5}$$

und andererseits die Äquivalenzen

$$w = 0 \quad \mathbf{Q}\text{-f.s.} \iff \widehat{\mathbf{Q}} \perp \mathbf{Q} \iff w = \infty \quad \widehat{\mathbf{Q}}\text{-f.s.} \tag{3.3.6}$$

Diese Dichotomie wird uns helfen, da sie die Verteilung von w unter $\mathbf{Q}$ mit der unter $\widehat{\mathbf{Q}}$ in Verbindung bringt, zu deren Untersuchung wir im folgenden Satz 3.2.7 heranziehen können:

„(iii) ⇒ (ii)": Die Integrierbarkeit von $Z_1 \log^+ Z_1$ impliziert offenkundig

$$E \log^+(\widehat{L}_1 - 1) = \mu^{-1} E Z_1 \log^+(Z_1 - 1) < \infty$$

(☞ Bemerkung 3.1.2(b)). Bezeichnet nun $(\Xi_n)_{n\geq 0}$ einen GWPI mit Immigration $Y_n = \widehat{L}_n - 1$ für $n \geq 1$ und Reproduktionsverteilung $(p_k)_{k\geq 0}$, so zeigt Satz 3.2.7

$$\Xi_\infty := \lim_{n\to\infty} \mu^{-n} \Xi_n < \infty \qquad P\text{-f.s.}$$

Da die Wahrscheinlichkeitsmaße $P^{(\Xi_n/\mu^n)_{n\geq 0}}$ und $\widehat{\mathbf{Q}}^{(w_n - \mu^{-n})_{n\geq 0}}$ gemäß Satz 3.2.3 übereinstimmen, gilt vermöge $\lim_{n\to\infty} \mu^{-n} = 0$ offenbar auch

$$\widehat{\mathbf{Q}}(w < \infty) = \widehat{\mathbf{Q}}\left(\limsup_{n\to\infty} \left(w_n - \mu^{-n}\right) < \infty\right) = 1.$$

Also erhalten wir mit Beziehung (3.3.5)

$$1 = \int_{\mathbb{T}} w \, d\mathbf{Q} = \int_\Omega w \circ T \, dP = EW$$

und somit (ii).

„(ii) ⇒ (i)": Im Fall $EW = 1$ folgt notwendigerweise $P(W = 0) < 1$, also unter Rückgriff auf Satz 3.3.1 wie gewünscht $P(W = 0) = q$.

„(i) ⇒ (iii)": Für die noch fehlende Implikation nehmen wir $EZ_1 \log^+ Z_1 = \infty$ an. Mit einer analogen Argumentation wie im Beweisteil „(iii) ⇒ (ii)" folgt dann unter Verwendung von Satz 3.2.7 und Satz 3.2.3

$$\widehat{\mathbf{Q}}(w = \infty) = 1,$$

also unter Berücksichtigung von Beziehung (3.3.6)

$$\mathbf{Q}(w = 0) = 1,$$

im Widerspruch zu

$$\int_{\mathbb{T}} w \, d\mathbf{Q} = EW = 1.$$

Damit ist der Satz von Kesten und Stigum vollständig bewiesen. □

3.3.4. Bemerkungen. (a) Bedingung (iii) wird in der Literatur oft als $Z \log Z$-*Bedingung* bezeichnet (☞ [Als3]). Sie ist häufig ausschlaggebend für das asymptotische Verhalten von Galton-Watson-Prozessen (vgl. etwa Satz I.8.1, Satz I.8.3 oder Satz I.11.1 in [Als3]) und wird uns in Satz 3.4.2 erneut begegnen.

(b) In der Situation des vorangegangenen Satzes sind die Aussagen (i) – (iii) ferner äquivalent zu den folgenden Bedingungen:

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} E|W_n - W| = 0$, d.h. $W_n \xrightarrow{\mathfrak{L}_1} W \quad (n \to \infty)$.

(v) $(W_n)_{n\geq 0}$ ist gleichgradig integrierbar.

(vi) $E \sup\limits_{n\geq 1} W_n < \infty$.

Dabei ist der Beweis der Implikationen „(vi) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (ii)" offenbar unproblematisch. Da sich unser Beweis von Satz 3.3.3 aber nicht ohne weiteres auf die noch fehlende Implikation „(iii) $\Rightarrow$ (vi)" ausdehnen läßt, belassen wir es bei dieser Bemerkung und verweisen auf [Als3], Abschnitt I.6.

(c) Ein Blick auf Satz 3.3.3 rechtfertigt die Frage, ob es – weiterhin $\mu > 1$ und $p_0 > 0$ vorausgesetzt – auch im Fall, daß die $Z \log Z$-Bedingung verletzt ist, eine geeignete Normierungsfolge $(k_n)_{n\geq 0}$ reeller Zahlen gibt, so daß die Folge $(k_n^{-1} Z_n)_{n\geq 0}$ f.s. konvergiert und einen nicht-degenerierten Limes W^* besitzt. In der Tat läßt sich diese Frage positiv beantworten, wobei die Folge $(k_n)_{n\geq 0}$ derart gewählt werden kann, daß die Bedingung $k_{n+1}/k_n \to \mu$ für $n \to \infty$ erfüllt ist. Dies bildet die Aussage des Satzes von Heyde und Seneta (☞ Satz I.6.1 in [Als3]). Wir verzichten jedoch auf einen eigenen Beweis und gehen im folgenden Abschnitt zur Untersuchung subkritischer GWP über.

3.4 Subkritische Galton-Watson-Prozesse

Im subkritischen Fall ($\mu < 1$) gibt die Abschätzung

$$P(Z_n > 0) \leq EZ_n = \mu^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

einen ersten Anhaltspunkt für die Konvergenzgeschwindigkeit von $P(Z_n > 0)$ gegen 0, wie wir bereits in Lemma 1.0.9 gesehen haben. Damit drängt sich die Frage auf, ob bzw. unter welchen Bedingungen μ^n die richtige Konvergenzrate für $P(X_n > 0)$ angibt, und es ist naheliegend, die Folgen $(x_n)_{n\geq 0}$ und $(a_n)_{n\geq 0}$ mit

$$x_n := \mu^{-n} P(Z_n > 0) \in (0,1] \qquad (n \geq 0)$$

und

$$a_n := E(Z_n | Z_n > 0) = x_n^{-1} \qquad (n \geq 0)$$

zu untersuchen. Dabei werden wir u.a. sehen, daß die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ stets konvergiert (mit Limes $x \in [0,1]$). Dieser Grenzwert x wird – bei Festhalten an Generalvoraussetzung 1.0.6 – genau dann positiv sein, wenn $Z_1 \log^+ Z_1$ integrierbar ist, d.h. die $Z \log Z$-Bedingung ist wie in Satz 3.3.3 richtungsweisend.

Ähnlich zum Vorgehen bei superkritischen Prozessen kombinieren wir ein Ergebnis über GWPI mit einem allgemeinen Lemma (über größenverzerrte Verteilungen), das wir daher zunächst angeben:

3.4.1. Lemma. *Es sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von f.s. $\mathbb{N}$-wertigen Zufallsgrößen mit Verteilungen P_n, endlichen Erwartungswerten $\alpha_n := \sum_{k\geq 1} kP_n(\{k\})$ sowie einer zugehörigen Folge größenverzerrter Zufallsgrößen $(\widehat{X}_n)_{n\geq 0}$.*

(a) Ist die Folge $(P^{\widehat{X}_n})_{n\geq 0}$ straff, so folgt $M := \sup_{n\geq 0} \alpha_n < \infty$.

(b) Gilt dagegen $\widehat{X}_n \xrightarrow{P} \infty$, d.h. $\lim_{n\to\infty} P(\widehat{X}_n \leq K) = 0$ für jedes $K \geq 1$, so ist $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$.

Beweis. (a) Die Straffheit der Folge $(P^{\widehat{X}_n})_{n\geq 0}$ garantiert die Existenz einer ganzen Zahl $N \geq 1$, so daß

$$\inf_{n\geq 0} P(\widehat{X}_n \in \{1,\ldots,N\}) = \inf_{n\geq 0} \alpha_n^{-1} \sum_{k=1}^{N} kP_n(\{k\}) \geq 1/2$$

und damit

$$\sup_{n\geq 0} \alpha_n \Bigg(\underbrace{\sum_{k=1}^{N} kP_n(\{k\})}_{\leq N} \Bigg)^{-1} \leq 2, \qquad \text{ergo} \qquad \sup_{n\geq 0} \alpha_n \leq 2N < \infty.$$

(b) Für den Beweis des zweiten Teils nehmen wir $\alpha_n \not\to \infty$ an, so daß wir nach evtl. Übergang zu einer geeigneten Teilfolge gleich $M < \infty$ voraussetzen können. Da für jedes $K \geq 1$

$$\lim_{n\to\infty} P(\widehat{X}_n \leq K) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\alpha_n^{-1}}_{\geq M^{-1} > 0} \sum_{k=1}^{K} kP_n(\{k\}) = 0$$

gilt, erhalten wir

$$P(X_n \leq K) \leq \sum_{k=1}^{K} kP_n(\{k\}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ist nun $L \geq 1$ beliebig vorgegeben, existiert daher ein $n_0 \geq 1$ mit der Eigenschaft

$$\inf_{n \geq n_0} P(X_n > L) \geq 1/2.$$

Bei Verwendung von Ungleichung (A.12) auf S. 115 in [Als1] liefert uns das für $n \geq n_0$

$$\alpha_n \geq \sum_{l \geq 1} P(X_n > l) \geq \sum_{l=1}^{L} P(X_n > L) \geq L/2,$$

im Widerspruch zu unserer Annahme, daß die Folge $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ beschränkt ist. Das zeigt unsere Behauptung.

$\square$

Damit läßt sich nun der folgende Satz beweisen, der das zu Beginn des Abschnitts gestellte Problem, die Konvergenzgeschwindigkeit der Folge $(P(Z_n > 0))_{n\geq 0}$ zu ermitteln, löst. Für eine rein analytische Argumentation verweisen wir auf [Als3], Satz I.8.1 und [AH], Theorem III.1.7.

3.4.2. Satz. *Für jeden GWP $(Z_n)_{n\geq 0}$ mit positivem, endlichem Reproduktionsmittel μ ist die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ mit $x_n = P(Z_n > 0)/\mu^n$ für $n \geq 0$ monoton fallend (und somit konvergent).*

Mit $a_n = E(Z_n|Z_n > 0)$ für $n \geq 0$ sind im Fall $\mu < 1$ ferner die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $x := \lim_{n\to\infty} x_n > 0$

(ii) $\sup_{n\geq 0} a_n < \infty$

(iii) $EZ_1 \log^+ Z_1 < \infty$.

Beweis. Wir nehmen wieder an, daß Z_n in der Form $Z_n = z_n \circ T$ mit einem GWB T vorliegt, und schreiben für $n \geq 0, u \in T_1$ abkürzend $\lambda_n := P(Z_n \in \cdot | Z_n > 0)$ und $Z_n(u) = z_n \circ T(u)$. Auf $\{Z_n > 0\}$ setzen wir im Fall $n \geq 1$ weiter

$$\xi_n := \inf \underbrace{\{u \in T_1 : \; Z_{n-1}(u) > 0\}}_{\neq \emptyset \text{ auf } \{Z_n > 0\}}$$

und dann

$$\mathcal{H}_n := z_{n-1} \circ \pi_{\xi_n} \circ T^{\xi_n} \cdot 1\!\!1_{\{Z_n > 0\}},$$

so daß ξ_n das kleinste Individuum in der ersten Generation bezeichnet, das Nachfahren in Generation n hat, während $\mathcal{H}_n$ die Anzahl der Nachfahren desselben angibt. Eine einfache Rechnung liefert für $n, k \geq 1$

$$\begin{aligned}
P(\mathcal{H}_n = k) &= \sum_{l \geq 1} P(\xi_n = l, Z_n > 0, \mathcal{H}_n = k) \\
&= \sum_{l \geq 1} P(Z_1 \geq l, Z_{n-1}(m) = 0 \text{ für } m < l, \; Z_{n-1}(l) = k) \\
&= \sum_{l \geq 1} \sum_{j \geq l : p_j > 0} p_j P(Z_{n-1}(m) = 0 \text{ für } m < l, \; Z_{n-1}(l) = k | Z_1 = j) \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{l \geq 1} \sum_{j \geq l : p_j > 0} p_j P(Z_{n-1} = k) P(Z_{n-1} = 0)^{l-1} \\
&= P(Z_{n-1} = k) \sum_{l \geq 1} P(Z_1 \geq l) P(Z_{n-1} = 0)^{l-1},
\end{aligned}$$

wobei in $(*)$ erneut Satz 2.3.5 eingegangen ist. Aus dieser Rechnung folgt nun

$$\begin{aligned}
P(Z_n > 0) &= \sum_{m \geq 1} P(\mathcal{H}_n = m) \\
&= P(Z_{n-1} > 0) \sum_{l \geq 1} P(Z_1 \geq l) P(Z_{n-1} = 0)^{l-1}
\end{aligned}$$

und daraus für $k \geq 1$ durch Division

$$\begin{aligned}
P(\mathcal{H}_n = k | Z_n > 0) &= P(\mathcal{H}_n = k) / P(Z_n > 0) \\
&= P(Z_{n-1} = k) / P(Z_{n-1} > 0) \\
&= P(Z_{n-1} = k | Z_{n-1} > 0),
\end{aligned}$$

d.h. die bedingte Verteilung von $\mathcal{H}_n$ gegeben $Z_n > 0$ wird für $n \geq 1$ gerade durch λ_{n-1} gegeben.

Wegen $\mathcal{H}_n \leq Z_n$ erhalten wir für $n, k \geq 1$

$$\begin{aligned}
\lambda_n(\{k, k+1, \dots\}) &= P(Z_n \geq k | Z_n > 0) \\
&\geq P(\mathcal{H}_n \geq k | Z_n > 0) \\
&= P(Z_{n-1} \geq k | Z_{n-1} > 0) \\
&= \lambda_{n-1}(\{k, k+1, \dots\})
\end{aligned}$$

und daraus mit Hilfe von Formel (A.9) auf S.115 in [Als1]

$$\begin{aligned}
E(Z_n | Z_n > 0) &= \sum_{k \geq 1} \lambda_n(\{k, k+1, \dots\}) \\
&\geq \sum_{k \geq 1} \lambda_{n-1}(\{k, k+1, \dots\}) \\
&= E(Z_{n-1} | Z_{n-1} > 0),
\end{aligned}$$

so daß wir die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ als monoton wachsend erkannt haben. Mittels der Darstellung

$$x_n = \mu^{-n} P(Z_n > 0) = \mu^{-n} \frac{EZ_n}{E(Z_n | Z_n > 0)} = \frac{1}{E(Z_n | Z_n > 0)} = \frac{1}{a_n}$$

ergibt sich einerseits, daß $(x_n)_{n \geq 0}$ monoton fallend ist und andererseits vermöge

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n = \inf_{n \geq 0} x_n = \frac{1}{\sup_{n \geq 0} a_n}$$

die behauptete Äquivalenz von (i) und (ii).

Für den restlichen Beweis setzen wir $\mu < 1$ voraus und bringen die Folge $(\widehat{Z}_n)_{n \geq 0}$ ins Spiel, wobei an $\widehat{Z}_n = z_n \circ \widehat{T}$ erinnert sei. Bezeichnet $\widehat{\lambda}_n$ für $n \geq 0$ die Größenverzerrung von λ_n, so erhalten wir für $k \geq 0$ via Vergleichslemma 3.1.6(d)

$$\begin{aligned}
P(\widehat{Z}_n = k) &= \mu^{-n} k P(Z_n = k) \\
&= \frac{k P(Z_n = k) / P(Z_n > 0)}{a_n} \\
&= \frac{k \lambda_n(\{k\})}{E(Z_n | Z_n > 0)} \\
&= \widehat{\lambda}_n(\{k\}),
\end{aligned}$$

d.h. die Maßidentität

$$\widehat{\lambda}_n = P(\widehat{Z}_n \in \cdot) = P(1 + \Xi_n \in \cdot) \tag{3.4.1}$$

für jedes $n \geq 0$ gemäß Satz 3.2.3, wenn $(\Xi_m)_{m\geq 0}$ weiterhin einen GWPI mit Immigration $Y_m = \widehat{L}_m - 1$ für $m \geq 1$ bezeichnet. Damit nehmen wir nun den Beweisteil „(ii) $\Rightarrow$ (iii)" in Angriff: Ist die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ beschränkt, so liefert uns Lemma 3.4.1(b) unmittelbar, daß $(\widehat{Z}_n)_{n\geq 0}$ nicht nach Wahrscheinlichkeit gegen unendlich konvergieren kann. Im Hinblick auf Gleichung (3.4.1) folgt dasselbe auch für den GWPI $(\Xi_n)_{n\geq 0}$, so daß Satz 3.2.9(b) in Verbindung mit Bemerkung 3.1.2(b)

$$\eta = E\log^+ Y_1 = E\log^+(\widehat{L}_1 - 1) = \mu^{-1} EZ_1 \log^+(Z_1 - 1) < \infty \tag{3.4.2}$$

und damit offenbar auch $EZ_1 \log^+ Z_1 < \infty$, d.h. (iii) impliziert. Für die noch zu erledigende Implikation
„(iii) $\Rightarrow$ (ii)" argumentieren wir wie folgt: Mit $Z_1 \log^+ Z_1$ ist offenkundig auch $\log^+ Y_1$ integrierbar, wie ein Blick auf (3.4.2) zeigt. Für den zugehörigen GWPI $(\Xi_n)_{n\geq 0}$ besagt Satz 3.2.9(a) nun, daß $(\Xi_n)_{n\geq 0}$ in Verteilung gegen eine endliche Zufallsgröße konvergiert. Damit gilt dasselbe auch für $(\Xi_n + 1)_{n\geq 0}$ und wegen Gleichung (3.4.1) auch für $(\widehat{Z}_n)_{n\geq 0}$. In Verbindung mit Satz 43.3 in [Als1] sichert uns dies die Straffheit der Folge $(P^{\widehat{Z}_n})_{n\geq 0} = (\widehat{\lambda}_n)_{n\geq 0}$. Unter erneutem Rückgriff auf Lemma 3.4.1 können wir daraus

$$\sup_{n\geq 0} E(Z_n | Z_n > 0) = \sup_{n\geq 0} \int_{\mathbb{N}} x\, \lambda_n(dx) < \infty$$

schließen und unseren Beweis beenden. □

3.4.3. Bemerkung. (☞ [Als3], S. 40) Für den *Aussterbezeitpunkt*

$$\tau := \inf\{j \geq 0 :\ Z_j = 0\}$$

(mit der Konvention $\inf \emptyset := \infty$) besagt Teil (i) gerade

$$P(\tau > n) \simeq x\mu^n \qquad (n \to \infty).$$

Wie bereits in Kapitel 1 gesehen, gilt im Fall $\mu < 1$

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = 0 \qquad P\text{-f.s.}$$

Deshalb gehen wir nun der Frage nach, ob λ_n, die bedingte Verteilung von Z_n gegeben $Z_n > 0$, für $n \to \infty$ schwach konvergiert. In der Tat ist sogar die folgende stärkere Aussage gültig:

3.4.4. Satz. *Im Fall* $\mu < 1$ *konvergiert die Folge* $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ *im folgenden Sinn:*

Bezeichnet für Wahrscheinlichkeitsmaße α, α' *auf* $(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$

$$\| \alpha - \alpha' \| := \sup_{A\subset\mathbb{N}_0} |\alpha(A) - \alpha'(A)|$$

die Totalvariation von α und α', so gilt

$$\sum_{n\geq 1} \| \lambda_n - \lambda_{n-1} \| < \infty.$$

Beweis. Im Beweis von Satz 3.4.2 haben wir gesehen, daß die bedingte Verteilung von $\mathcal{H}_n$ gegeben $Z_n > 0$ für $n \geq 1$ gerade durch λ_{n-1} gegeben wird. Daher impliziert die sogenannte *Kopplungsungleichung* (☞ [Als2], S. 75) für $n \geq 1$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\lambda_n - \lambda_{n-1}\| &= \|P(Z_n \in \cdot|Z_n > 0) - P(\mathcal{H}_n \in \cdot|Z_n > 0)\| \\ &\leq P(\mathcal{H}_n \neq Z_n|Z_n > 0). \end{aligned}$$

Da das Ereignis $\{\mathcal{H}_n \neq Z_n\} = \sum_{m\geq 1}\{\xi_n = m, \mathcal{H}_n \neq Z_n\}$ mit dem Ereignis

$$\sum_{k\geq m\geq 1} \left\{ Z_1 = k,\ \sum_{u=1}^{m-1} Z_{n-1}(u) = 0,\ Z_{n-1}(m) > 0,\ \sum_{u=m+1}^{k} Z_{n-1}(u) > 0 \right\}$$

übereinstimmt (wobei wir an die Notation aus dem Beweis von Satz 3.4.2 erinnern), zeigt eine erneute Anwendung von Satz 2.3.5

$$\begin{aligned} \|\lambda_n - \lambda_{n-1}\| &\leq P(\mathcal{H}_n \neq Z_n|Z_n > 0) \\ &= c_{n-1} \sum_{k\geq m\geq 1} p_k P(Z_{n-1} = 0)^{m-1}(1 - P(Z_{n-1} = 0)^{k-m}) \end{aligned}$$

mit $c_{n-1} = P(Z_{n-1} > 0)/P(Z_n > 0)$. Wegen $\lim_{n\to\infty} c_n = \mu^{-1} > 1$ (☞ Lemma 1.0.9) gilt $\delta := \sup_{n\geq 1} c_{n-1} < \infty$ und damit unter Verwendung der Bezeichnung

$$\alpha(k) := \min\{n \geq 1 : P(Z_n > 0) < 1/k\} \qquad (k \geq 1)^9$$

[9] Man beachte, daß diese Definition wegen $\lim_{n\to\infty} P(Z_n > 0) = 1 - q = 0$ sinnvoll ist.

durch geeignete Umordnung

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} \|\lambda_n - \lambda_{n-1}\| &\leq \delta \sum_{n,k\geq 1} \sum_{m=1}^{k} p_k P(Z_n = 0)^{m-1}(1 - P(Z_n = 0)^{k-m}) \\
&= \delta \sum_{k\geq 1} \sum_{n=1}^{\alpha(k)-1} \sum_{m=1}^{k} p_k P(Z_n = 0)^{m-1}(1 - P(Z_n = 0)^{k-m}) \\
&\quad +\delta \sum_{k\geq 1} \sum_{n\geq \alpha(k)} \sum_{m=1}^{k} p_k P(Z_n = 0)^{m-1}(1 - P(Z_n = 0)^{k-m}) \\
&= \delta(I_1 + I_2).
\end{aligned}$$

Hier gilt einerseits genauer

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{k\geq 1} \sum_{n=1}^{\alpha(k)-1} \sum_{m=1}^{k} p_k P(Z_n = 0)^{m-1}(1 - P(Z_n = 0)^{k-m}) \\
&\leq \sum_{k\geq 1} \sum_{n=1}^{\alpha(k)-1} \sum_{m=1}^{k} p_k P(Z_n = 0)^{m-1} \\
&\leq \sum_{k\geq 1} p_k \sum_{n=1}^{\alpha(k)-1} \frac{1}{P(Z_n > 0)} \\
&\leq \sum_{k\geq 1} p_k \sum_{n=1}^{\alpha(k)-1} \mu^{\alpha(k)-1-n} \underbrace{\frac{1}{P(Z_{\alpha(k)-1} > 0)}}_{\leq k} \\
&\leq \sum_{k\geq 1} k p_k \sum_{n\geq 0} \mu^n \\
&= \frac{\mu}{1-\mu} < \infty,
\end{aligned}$$

wobei die gemäß Lemma 1.0.9(c) für $n \leq \alpha(k) - 1$ gültige Ungleichung

$$P(Z_{\alpha(k)-1} > 0) \leq \mu^{\alpha(k)-1-n} P(Z_n > 0)$$

eingegangen ist. Eine ähnliche Rechnung unter Verwendung der für $x \in [0,1]$ und $j \geq 0$ erfüllten Abschätzung

$$1 - (1-x)^j \leq jx, \tag{3.4.3}$$

die man leicht durch Differentiation überprüft, zeigt andererseits

$$\begin{aligned}
I_2 &= \sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq\alpha(k)}\sum_{m=1}^{k} p_k P(Z_n=0)^{m-1}(1-P(Z_n=0)^{k-m}) \\
&\leq \sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq\alpha(k)}\sum_{m=1}^{k} p_k(1-P(Z_n=0)^{k-m}) \\
&\leq \sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq\alpha(k)} p_k P(Z_n>0)\sum_{m=1}^{k}(k-m) \\
&\leq \sum_{k\geq 1} p_k k^2 \sum_{n\geq\alpha(k)} P(Z_n>0) \\
&\leq \sum_{k\geq 1} p_k k^2 \sum_{n\geq 0}\mu^n \underbrace{P(Z_{\alpha(k)}>0)}_{\leq 1/k} \\
&\leq \frac{\mu}{1-\mu} < \infty.
\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir also

$$\sum_{n\geq 1}\|\lambda_n-\lambda_{n-1}\| \leq \delta(I_1+I_2) < \infty$$

verifiziert. □

Die soeben bewiesene Konvergenzaussage erzwingt bereits die gewünschte schwache Konvergenz, wie das folgende Korollar lehrt (☞ Corollary I.8.1 in [AN], Corollary III.1.3 in [AH] oder Satz I.8.2 in [Als3] für einen klassischen Beweis):

3.4.5. Korollar. *In der Situation von Satz 3.4.4 existiert für jedes* $k\geq 1$

$$b_k := \lim_{n\to\infty} P(Z_n=k|Z_n>0),$$

und es gilt $\sum_{k\geq 1} b_k = 1$*, d.h. die Folge* $(b_k)_{k\geq 1}$ *definiert eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf* $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$*. Insbesondere erhalten wir*

$$\lambda_n \xrightarrow{w} (b_k)_{k\geq 1} \qquad (n\to\infty).$$

Beweis. Da jedes λ_n auf $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ konzentriert ist, impliziert der vorangegangene Satz in Verbindung mit der gemäß Lemma 29.5 in [Als1] gültigen Darstellung

$$2\|\lambda_n-\lambda_{n-1}\| = \sum_{l\geq 1}|\lambda_n(\{l\})-\lambda_{n-1}(\{l\})|$$

die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n\geq 1}\sum_{l\geq 1}|\lambda_n(\{l\})-\lambda_{n-1}(\{l\})|.$$

Speziell existiert für jedes $k \geq 1$

$$b_k = \lambda_0(\{k\}) + \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}(\lambda_m-\lambda_{m-1})(\{k\}) = \lim_{n\to\infty}\lambda_n(\{k\}),$$

und für den Limes b_k erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 1} b_k &= \sum_{k\geq 1}\lambda_0(\{k\}) + \sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq 1}(\lambda_n-\lambda_{n-1})(\{k\}) \\ &\overset{(\star)}{=} 1+\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1}(\lambda_n-\lambda_{n-1})(\{k\}) \\ &= 1+\sum_{n\geq 1}\big(\lambda_n(\mathbb{N})-\lambda_{n-1}(\mathbb{N})\big) = 1,\end{aligned}$$

wobei wir in $(\star)$ aufgrund der weiter oben bestätigten absoluten Konvergenz die Summationsreihenfolge vertauschen dürfen.

Die behauptete Verteilungskonvergenz ergibt sich nun aus dem Lemma von Scheffé (Lemma 7.3 in [Schm]). □

3.4.6. Bemerkungen. (a) Vereinbaren wir $\frac{1}{0} := \infty$, so gilt in der Situation von Korollar 3.4.5

$$\sum_{k\geq 1} kb_k = \frac{1}{x} \leq \infty, \tag{3.4.4}$$

d.h. der Erwartungswert von $(b_k)_{k\geq 1}$ wird gerade durch $\frac{1}{x}$ gegeben, wobei weiterhin $x = \lim_{n\to\infty}\mu^{-n}P(Z_n > 0)$ gesetzt sei. Insbesondere steht uns im Hinblick auf Satz 3.4.2 die Äquivalenz

$$\sum_{k\geq 1} kb_k < \infty \Longleftrightarrow EZ_1 \log^+ Z_1 < \infty$$

zur Verfügung. Auf den Beweis von Gleichung (3.4.4) verzichten wir aber und verweisen auf [Als3], Satz I.8.2.

(b) Man beachte, daß wir für die Beweise von Satz 3.4.4 und Korollar 3.4.5 lediglich die Voraussetzung $\mu < 1$ benötigt haben und keine Bedingungen an höhere Momente stellen mußten. Dies ist insofern erwähnenswert, da Korollar 3.4.5 ursprünglich nur unter der einschränkenden Annahme $\operatorname{Var} Z_1 < \infty$ gezeigt werden konnte (☞ [Yag] oder [Har], Theorem I.9.1).

3.5 Kritische Galton-Watson-Prozesse

Wie in Kapitel 1 gesehen, gilt auch im Fall $\mu = 1$ (kritischer Fall)

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n > 0) = 0.$$

Hier ist es jedoch weniger einfach als im subkritischen Fall, die richtige Konvergenzgeschwindigkeit zu erahnen, denn offenbar ist die einfache Abschätzung

$$P(Z_n > 0) \leq \mu^n = 1$$

wertlos. Dennoch können wir im Fall endlicher Reproduktionsvarianz σ^2 die Konvergenzrate ermitteln. Genauer werden wir

$$P(Z_n > 0) \simeq \frac{2}{n\sigma^2} \qquad (n \to \infty) \tag{3.5.1}$$

erhalten.

Unsere Untersuchung kritischer Galton-Watson-Prozesse basiert auf folgender Zerlegung von $\widehat{Z}_n = z_n \circ \widehat{T}$:

Bei festem $(j,n) \in \mathbb{N}^2_{\leq} := \{(k,l) \in \mathbb{N}^2 : k \leq l\}$ und $\zeta \in \widehat{T}_j$ setzen wir

$$\widehat{Z}^{\zeta}_{n-j} := z_{n-j} \circ \pi_\zeta \circ \widehat{T}^{\zeta}$$

und erinnern an die in Unterabschnitt 2.1.2 eingeführte Notation. Sodann definieren wir

$$S_{n,j} := \sum_{\zeta \in \widehat{T}_j : \zeta \succeq V_{j-1}, \zeta \neq V_j} \widehat{Z}^{\zeta}_{n-j} = \widehat{Z}^{V_{j-1}}_{n-j+1} - \widehat{Z}^{V_j}_{n-j}$$

und

$$R_{n,j} := \sum_{\zeta \in \widehat{T}_j : \zeta \succeq V_{j-1}, \zeta > V_j} \widehat{Z}^{\zeta}_{n-j}.$$

Damit gibt $S_{n,j}$ die Anzahl der Nachfahren von V_{j-1} in $\widehat{T}_n$ an, die keine Nachfahren von V_j sind; $R_{n,j}$ beschreibt gerade die Anzahl der Nachfahren von V_{j-1} in $\widehat{T}_n$, deren (eindeutig bestimmter) Vorfahr in Generation j sich im größenverzerrten Galton-Watson-Baum $\widehat{T}$ rechts von V_j befindet, d.h. größer als V_j ist.

$\widehat{Z}_n$ besitzt nun offenbar die Darstellung

$$\widehat{Z}_n = 1 + \widehat{Z}_n^{V_0} - \widehat{Z}_n^{V_n} = 1 + \sum_{j=1}^{n} S_{n,j} \tag{3.5.2}$$

(Teleskop-Summe), und es gilt $R_{n,j} \leq S_{n,j}$ für $(j,n) \in \mathbb{N}^2_{\leq}$.

Setzen wir für $(j,n) \in \mathbb{N}^2_{\leq}$ noch

$$A_{n,j} := \{R_{n,j} = S_{n,j}\},$$

so hält das folgende Lemma weitere für uns wesentliche Eigenschaften der soeben eingeführten Zufallsgrößen fest:

3.5.1. Lemma. *(a) Bei festem $n \geq 1$ sind die Zufallsvektoren*

$$(R_{n,1}, S_{n,1}), \dots, (R_{n,n}, S_{n,n})$$

stochastisch unabhängig, speziell auch die Ereignisse $A_{n,1}, \dots, A_{n,n}$.

(b) Es gilt $ER_{n,j} = \sigma^2/2 \in (0,\infty]$ $\qquad ((j,n) \in \mathbb{N}^2_{\leq})$.

(c) $P(A_{n,j}) = \frac{P(Z_{n-j+1}>0)}{P(Z_{n-j}>0)} = c_{n-j}^{-1}$ $\qquad ((j,n) \in \mathbb{N}^2_{\leq})$.

(d) Bei festgehaltenem $j \geq 1$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} E\left(R_{n,j} \mathbb{1}_{A_{n,j}}\right) = \sigma^2/2$$

und im Fall $\sigma^2 < \infty$

$$\lim_{n\to\infty} E\left(R_{n,j} \mathbb{1}_{A_{n,j}^c}\right) = 0.$$

Beweis. (a) Es seien $(a_1,b_1), \dots, (a_n,b_n) \in \mathbb{N}^2_{\leq}$. Für $1 \leq j \leq n$ schreiben wir abkürzend

$$M_j := \{\zeta \in \widehat{T}_j : \zeta \succeq V_{j-1},\, \zeta < V_j\}$$

und

$$N_j := \{\zeta \in \widehat{T}_j : \zeta \succeq V_{j-1},\, \zeta > V_j\},$$

so daß M_j bzw. N_j alle Kinder von V_{j-1} enthält, die kleiner bzw. größer als V_j sind und sich folglich im größenverzerrten GWB links bzw. rechts von V_j befinden.

Auf dem Ereignis $D_n := \bigcap_{i=0}^{n-1}\{\widehat{L}_i = k_i, C_i = m_i\}$ gilt einerseits

$$V_j = (m_0, \ldots, m_{j-1}) \in \mathbb{N}^j \qquad (1 \leq j \leq n);$$

andererseits ergibt sich in Analogie zu Satz 2.3.5 aus unserer Konstruktion größenverzerrter Galton-Watson-Bäume, daß bei festem n die Zufallsgrößen

$$\widehat{Z}_{n-j}^{\zeta} \qquad (1 \leq j \leq n, \zeta \in M_j \cup N_j)$$

(im Fall $P(D_n) = \prod_{i=0}^{n-1} p_{k_i} > 0$) gegeben D_n stochastisch unabhängig sind und dieselbe Verteilung $\Gamma_{n-j} := P^{Z_{n-j}}$ besitzen. Da für jedes j offenbar

$$\{R_{n,j} = a_j, S_{n,j} = b_j\} = \left\{ \sum_{\zeta \in M_j} \widehat{Z}_{n-j}^{\zeta} = b_j - a_j, \sum_{\zeta \in N_j} \widehat{Z}_{n-j}^{\zeta} = a_j \right\}$$

gilt, folgt

$$\begin{aligned} & P\left(\bigcap_{j=1}^{n}\{R_{n,j} = a_j, S_{n,j} = b_j\}\right) \\ = \quad & \sum_{(\mathbb{N}^2_{\leq})^n} \prod_{i=0}^{n-1} p_{k_i} \prod_{j=1}^{n} \Gamma_{n-j}^{*(m_{j-1}-1)}(\{b_j - a_j\}) \cdot \Gamma_{n-j}^{*(k_{j-1}-m_{j-1})}(\{a_j\}); \end{aligned}$$

dabei erstreckt sich die Summation $\sum_{(\mathbb{N}^2_{\leq})^n}$ über alle Tupel

$$((m_0, k_0), \ldots, (m_{n-1}, k_{n-1})) \in (\mathbb{N}^2_{\leq}))^n.$$

Andererseits folgt für $1 \leq j \leq n$ durch geeignete Summation

$$\begin{aligned} & P(R_{n,j} = a_j, S_{n,j} = b_j) \\ = \quad & \sum_{(\mathbb{N}^2_{\leq})^n} \prod_{i=0}^{n-1} p_{k_i} \Gamma_{n-j}^{*(m_{j-1}-1)}(\{b_j - a_j\}) \cdot \Gamma_{n-j}^{*(k_{j-1}-m_{j-1})}(\{a_j\}) \qquad (3.5.3) \\ = \quad & \sum_{1 \leq m_{j-1} \leq k_{j-1}} p_{k_{j-1}} \Gamma_{n-j}^{*(m_{j-1}-1)}(\{b_j - a_j\}) \cdot \Gamma_{n-j}^{*(k_{j-1}-m_{j-1})}(\{a_j\}) \end{aligned}$$

und daraus durch Umordnung in der resultierenden Summe

$$\prod_{j=1}^{n} P(R_{n,j} = a_j, S_{n,j} = b_j) = P\left(\bigcap_{j=1}^{n}\{R_{n,j} = a_j, S_{n,j} = b_j\}\right),$$

also die gewünschte Unabhängigkeitsaussage.

(b) Aus Gleichung (3.5.3) folgt

$$\begin{aligned}
ER_{n,j} &= \sum_{l\geq 1} lP(R_{n,j}=l) \\
&= \sum_{l\geq 1} l \sum_{k\geq 1}\sum_{m=1}^{k} p_k \Gamma_{n-j}^{*(k-m)}(\{l\}) \\
&= \sum_{k\geq 1} p_k \sum_{m=1}^{k}\sum_{l\geq 1} l\Gamma_{n-j}^{*(k-m)}(\{l\}) \\
&= \sum_{k\geq 1} p_k \sum_{m=1}^{k}(k-m)\underbrace{EZ_{n-j}}_{=1} \\
&= \sum_{k\geq 1} p_k \frac{k(k-1)}{2} \\
&= \frac{\sigma^2}{2}.
\end{aligned}$$

(c) Auch hier ergibt sich aus Gleichung (3.5.3)

$$\begin{aligned}
P(A_{n,j}) &= P(R_{n,j}=S_{n,j}) \\
&= \sum_{(m,k)\in\mathbb{N}^2_{\leq}} p_k \Gamma_{n-j}^{*(m-1)}(\{0\}) \\
&= \sum_{k\geq 1} p_k \sum_{m=1}^{k} P(Z_{n-j}=0)^{m-1} \\
&= \frac{1}{P(Z_{n-j}>0)} \sum_{k\geq 1} p_k \left(1-P(Z_{n-j}=0)^k\right) \\
&= \frac{1}{P(Z_{n-j}>0)} \sum_{k\geq 1:\, p_k>0} p_k P(Z_{n-j+1}>0|Z_1=k) \\
&= \frac{P(Z_{n-j+1}>0)}{P(Z_{n-j}>0)}.
\end{aligned}$$

(d) Der besagte Erwartungswert besitzt gemäß Gleichung (3.5.3) die Darstellung

$$\begin{aligned}
E\left(R_{n,j}\mathbb{1}_{A_{n,j}}\right) &= \sum_{l\geq 1} lP(R_{n,j}=l, R_{n,j}=S_{n,j}) \\
&= \sum_{l\geq 1} l \sum_{(m,k)\in\mathbb{N}^2_{\leq}} p_k \Gamma_{n-j}^{*(m-1)}(\{0\})\cdot\Gamma_{n-j}^{*(k-m)}(\{l\})
\end{aligned}$$

$$= \sum_{(m,k)\in\mathbb{N}^2_\leq} p_k P(Z_{n-j}=0)^{m-1} \sum_{l\geq 1} l\Gamma_{n-j}^{*(k-m)}(\{l\})$$

$$= \sum_{k\geq 1}\sum_{m=1}^{k} p_k P(Z_{n-j}=0)^{m-1}(k-m).$$

Hier können wir wegen $P(Z_n = 0)\uparrow 1$ für $n\to\infty$ den Satz von der monotonen Konvergenz anwenden und erhalten unter Hinweis auf die in (b) geführte Rechnung

$$E\left(R_{n,j}\mathbb{1}_{A_{n,j}}\right)\uparrow \sum_{k\geq 1}\sum_{m=1}^{k} p_k(k-m) = \frac{\sigma^2}{2} \qquad \text{für } n\to\infty.$$

Im Fall $\sigma^2<\infty$ folgt mit (b) sofort

$$E\left(R_{n,j}\mathbb{1}_{A^c_{n,j}}\right) = \frac{\sigma^2}{2} - E\left(R_{n,j}\mathbb{1}_{A_{n,j}}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

3.5.2. Bemerkungen. (a) Durch ein ähnliches Vorgehen wie im Beweis von Lemma 3.5.1(b) erhält man $ES_{n,j}=\sigma^2$. Auf die Rechnung verzichten wir aber, da wir diese Aussage nicht benötigen.

(b) Wie im vorangegangenen Beweis gesehen, hängen die Terme $E\left(R_{n,j}\mathbb{1}_{A_{n,j}}\right)$, $P(A_{n,j})$ bzw. $E\left(R_{n,j}\mathbb{1}_{A^c_{n,j}}\right)$ von (n,j) nur über $n-j$ ab. Deshalb sind die im folgenden verwendeten Schreibweisen

$$\beta_{n-j} := E\left(R_{n,j}\mathbb{1}_{A_{n,j}}\right),$$

$$\gamma_{n-j} := P(A_{n,j})$$

und

$$\delta_{n-j} := E\left(R_{n,j}\mathbb{1}_{A^c_{n,j}}\right)$$

sinnvoll, und Lemma 3.5.1 sichert

$$\lim_{i\to\infty}\beta_i = \sigma^2/2, \qquad \lim_{i\to\infty}\gamma_i = 1$$

sowie unter der Voraussetzung $\sigma^2<\infty$

$$\lim_{i\to\infty}\delta_i = 0.$$

Bevor wir die Asymptotik (3.5.1) bestätigen können, notieren wir den folgenden, sehr einfachen Sachverhalt:

3.5.3. Lemma. *Es sei $(b_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit Limes $b \in [0,\infty]$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} b_k = b,$$

d.h. die Folge der Césaro-Mittel von $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergiert ebenfalls gegen b.

Beweis. Für den Beweis im Fall $b < \infty$ verweisen wir auf Satz 27.1 in [Heu] und nehmen gleich $b = \infty$ an. Dann existiert zu vorgegebenem $K > 0$ ein $n_0 \geq 1$ mit der Eigenschaft $\inf_{n\geq n_0} b_n \geq 2K$, was für alle $n \geq 2n_0$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} b_k \geq \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n-1} b_k \geq \underbrace{\frac{n-n_0}{n}}_{\geq 1/2} 2K \geq K$$

impliziert. □

Damit sind wir jetzt in der Lage, für das folgende, im Fall $\sigma^2 < \infty$ erstmals von Kesten, Ney und Spitzer im Jahre 1966 (☞ [KNS]) in dieser Allgemeinheit bewiesene Resultat einen probabilistischen Beweis zu führen, geben an dieser Stelle aber den Hinweis, daß dieses Ergebnis unter der Zusatzvorausssetzung $EZ_1^3 < \infty$ (bzw. $f'''(1) < \infty$) erstmalig 1938 von Kolmogorov bewiesen wurde (☞ [Har], S. 21).

3.5.4. Satz. *Im Fall $\mu = 1$ und $\sigma^2 \in (0,\infty]$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} nP(Z_n > 0) = \frac{2}{\sigma^2},$$

wobei wie üblich $\frac{2}{\infty} := 0$ vereinbart sei.

Beweis. Bei vorgegebenem $n \geq 1$ setzen wir $R_n := 1 + \sum_{j=1}^n R_{n,j}$. Da $R_{n,j}$ die Anzahl der Individuen in $\widehat{T}_n$ angibt, die größer als V_n sind und von V_{j-1}, nicht aber von V_j abstammen, bezeichnet R_n gerade die Anzahl der Individuen in $\widehat{T}_n$, die nicht kleiner als V_n sind.[10] Definieren wir

$$A_n := \{V_n = \min \widehat{T}_n\},$$

so folgt wegen $R_{n,j} \leq S_{n,j}$ für jedes $j \leq n$ offenbar

$$A_n = \{R_n = \widehat{Z}_n\} = \bigcap_{j=1}^n \{R_{n,j} = S_{n,j}\} = \bigcap_{j=1}^n A_{n,j} \tag{3.5.4}$$

und via Lemma 3.5.1 (Teleskop-Produkt)

$$P(A_n) = \prod_{j=1}^n P(A_{n,j}) = \frac{P(Z_n > 0)}{P(Z_0 > 0)} = P(Z_n > 0). \tag{3.5.5}$$

Die für $k \geq 1$ gültige Rechnung

$$\begin{aligned} P(\{\widehat{Z}_n = k\} \cap A_n) &= P(\widehat{Z}_n = k,\, V_n = \min \widehat{T}_n) \\ &= \sum_{t \in \mathbb{T}_n : z_n(t) = k} \widehat{\mathbf{Q}}_* \left([t; \min t_n]_n\right) \\ &\overset{(\star)}{=} \sum_{t \in \mathbb{T}_n : z_n(t) = k} \mathbf{Q}([t]_n) \\ &= P(Z_n = k), \end{aligned}$$

für die wir in $(\star)$ einmal mehr Vergleichslemma 3.1.6 benutzt haben, impliziert somit die Verteilungsidentität

$$P(\widehat{Z}_n \in \cdot | A_n) = P(Z_n \in \cdot | Z_n > 0) = \lambda_n. \tag{3.5.6}$$

Diese Darstellung erweist sich als hilfreich, da sie uns die Konstruktion geeigneter Zufallsgrößen R_n^* erleichtert, die die Verteilung λ_n besitzen und somit Kopien von Z_n gegeben $Z_n > 0$ bilden: Bei festem $n \geq 1$ seien dazu $R'_{n,1}, \ldots, R'_{n,n}$ stochastisch unabhängige Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit

$$P(R'_{n,j} \in \cdot) = P(R_{n,j} \in \cdot | A_{n,j}) = P(S_{n,j} \in \cdot | A_{n,j}) \tag{3.5.7}$$

[10] $R_n - 1$ gibt also die Zahl aller Individuen in $\widehat{T}_n$ an, die sich rechts von V_n befinden.

für $j \leq n$, wobei wir auf $P(A_{n,j}) = \gamma_{n-j} > 0$ hinweisen. Dabei sei der Vektor $(R'_{n,1}, \ldots, R'_{n,n})$ ferner stochastisch unabhängig von $((R_{n,1}, S_{n,1}), \ldots, (R_{n,n}, S_{n,n}))$ gewählt. Definieren wir nun

$$R^*_{n,j} := R_{n,j} \mathbb{1}_{A_{n,j}} + R'_{n,j} \mathbb{1}_{A^c_{n,j}} \tag{3.5.8}$$

sowie

$$R^*_n := 1 + \sum_{j=1}^{n} R^*_{n,j}, \tag{3.5.9}$$

so sind vermöge Lemma 3.5.1 auch die Zufallsgrößen $R^*_{n,1}, \ldots, R^*_{n,n}$ stochastisch unabhängig, und es gilt für $k \geq 1$ und $j \leq n$ aufgrund der getroffenen Unabhängigkeitsannahmen zunächst

$$\begin{aligned} P(R^*_{n,j} = k) &= P(\{R_{n,j} = k\} \cap A_{n,j}) + P(\{R'_{n,j} = k\} \cap A^c_{n,j}) \\ &= P(\{S_{n,j} = k\} \cap A_{n,j}) + P(A^c_{n,j}) P(R'_{n,j} = k) \\ &= \big(P(A_{n,j}) + P(A^c_{n,j})\big) \cdot P(S_{n,j} = k | A_{n,j}) \\ &= P(S_{n,j} = k | A_{n,j}) \end{aligned}$$

und damit im Hinblick auf (3.5.2) und (3.5.4) weiter

$$\begin{aligned} P(R^*_n = k) &= \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_n \geq 0: \\ k_1 + \ldots + k_n = k-1}} P\left(\bigcap_{j=1}^{n} \{R^*_{n,j} = k_j\}\right) \\ &= \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_n \geq 0: \\ k_1 + \ldots + k_n = k-1}} \prod_{j=1}^{n} P(R^*_{n,j} = k_j) \\ &= \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_n \geq 0: \\ k_1 + \ldots + k_n = k-1}} \prod_{j=1}^{n} P(S_{n,j} = k_j | A_{n,j}) \\ &= \frac{1}{P(A_n)} \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_n \geq 0: \\ k_1 + \ldots + k_n = k-1}} P\left(A_n \cap \bigcap_{j=1}^{n} \{S_{n,j} = k_j\}\right) \\ &= \frac{1}{P(A_n)} P(A_n \cap \{\widehat{Z}_n = k\}) \\ &= P(\widehat{Z}_n = k | A_n). \end{aligned}$$

Das garantiert unter Hinweis auf Gleichung (3.5.6) wie angekündigt

$$P(R^*_n \in \cdot) = \lambda_n = P(Z_n \in \cdot | Z_n > 0), \tag{3.5.10}$$

so daß R_n^* tatsächlich eine Kopie von Z_n gegeben $Z_n > 0$ bildet.

Sei nun zunächst $\sigma^2 < \infty$ vorausgesetzt. Dann gilt nach Definition der Zufallsgrößen $R_{n,j}^*$ sowie mit Blick auf Lemma 3.5.3, Lemma 3.5.1 und die im Anschluß an dieses gemachten Bemerkungen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}|ER_n - ER_n^*| &\leq \frac{1}{n}E|R_n - R_n^*| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E|R_{n,j} - R_{n,j}^*| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{A_{n,j}^c} \left(R_{n,j} + R_{n,j}^*\right) dP \\
&= \int_{A_{n,j}^c} \left(R_{n,j} + R'_{n,j}\right) dP \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\delta_{n-j} + P(A_{n,j}^c)ER'_{n,j}\right) \qquad (3.5.11) \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\delta_{n-j} + \frac{1-\gamma_{n-j}}{\gamma_{n-j}}ER_{n,j}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \left(\delta_j + \sigma^2\frac{1-\gamma_j}{2\gamma_j}\right) \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lim_{i\to\infty}\left(\delta_i + \sigma^2\frac{1-\gamma_i}{2\gamma_i}\right) = 0,
\end{aligned}$$

wobei neben der Unabhängigkeit von $R'_{n,j}$ und $\mathbb{1}_{A_{n,j}^c}$ die Abschätzung

$$ER'_{n,j} \leq P(A_{n,j})^{-1}ER_{n,j} = \frac{\sigma^2}{2\gamma_{n-j}}$$

zu beachten ist. Damit folgt jetzt

$$\begin{aligned}
|ER_n^*/n - \sigma^2/2| &\leq |ER_n^* - ER_n|/n + |ER_n/n - \sigma^2/2| \\
&= o(1) + \left|1/n + \underbrace{1/n\sum_{j=1}^{n} ER_{n,j}}_{=\sigma^2/2} - \sigma^2/2\right| \\
&= o(1),
\end{aligned}$$

wobei wie üblich $o(1)$ eine geeignete Nullfolge bezeichne. Daraus erhalten wir mit Gleichung (3.5.10) aber

$$\frac{1}{nP(Z_n > 0)} = \frac{E(Z_n|Z_n > 0)}{n} = \frac{ER_n^*}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\sigma^2}{2} \in (0,\infty)$$

und sind am Ziel.

Für den noch zu erledigenden Fall $\sigma^2 = \infty$ notieren wir unter Hinweis auf (3.5.8) und (3.5.9)

$$R_n^* \geq \sum_{j=1}^{n} R_{n,j} \mathbb{1}_{A_{n,j}}$$

und folgern unter erneuter Benutzung von Lemma 3.5.3

$$\frac{1}{nP(Z_n > 0)} = \frac{ER_n^*}{n} \geq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} E\left(R_{n,j} \mathbb{1}_{A_{n,j}}\right) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\sigma^2}{2} = \infty,$$

was unseren Beweis abschließt. □

3.5.5. Bemerkung. Die im obigen Beweis geführte Rechnung (3.5.11) zeigt im Fall endlicher Reproduktionsvarianz σ^2 insbesondere

$$\frac{R_n}{n} - \frac{R_n^*}{n} \xrightarrow{\mathfrak{L}_1} 0 \qquad (n \to \infty)$$

und somit via Satz 50.8 in [Als1]

$$\frac{R_n}{n} - \frac{R_n^*}{n} \xrightarrow{P} 0 \qquad (n \to \infty).$$

Diese Tatsache werden wir im Beweis von Satz 3.5.9 verwenden, denn in Verbindung mit dem Satz von Slutsky (Satz 36.12 in [Als1]) garantiert sie uns, daß Verteilungskonvergenz von R_n/n und Verteilungskonvergenz von R_n^*/n äquivalente Bedingungen sind (wobei die Grenzverteilungen notwendig übereinstimmen).

In Kapitel 1 haben wir gesehen, daß Z_n im Fall $\mu = 1$ für $n \to \infty$ f.s. gegen 0 konvergiert, so daß es naheliegend ist, nach der schwachen Konvergenz der bedingten Verteilung von Z_n gegeben $Z_n > 0$ zu fragen. In Satz 3.5.4 haben wir aber im Fall endlicher Reproduktionsvarianz die Aussage

$$E(Z_n | Z_n > 0) \simeq \frac{n\sigma^2}{2} \qquad (n \to \infty)$$

getroffen, d.h. die Folge $(E(Z_n|Z_n > 0))_{n\geq 0}$ wächst linear. Somit ist es vernünftig, Z_n mit dem Faktor n^{-1} zu „reskalieren“ und die Folge $(\kappa_n)_{n\geq 0}$ mit

$$\kappa_n := P(Z_n/n \in \cdot | Z_n > 0) \qquad (n \geq 0)$$

auf schwache Konvergenz zu untersuchen. Bevor wir jedoch eine positive Antwort geben können, ist noch einige Vorarbeit in Gestalt der drei folgenden Lemmata zu leisten. Das erste dieser Hilfsergebnisse beleuchtet dabei den Zusammenhang zwischen R_n und $\widehat{Z}_n$: Lax gesprochen, erhält man R_n durch Stauchung von $\widehat{Z}_n$ mit einem auf $(0,1)$ gleichverteilten Faktor (☞ auch Bemerkung 3.1.7(a)).

3.5.6. Lemma. *Gegeben eine beliebige von* $(\widehat{Z}_n)_{n\geq 0}$ *unabhängige,* $\mathcal{R}(0,1)$*-verteilte Zufallsgröße* U, *haben wir für jedes* $n \geq 1$ *die Verteilungsidentität*

$$R_n \stackrel{d}{=} \lceil U \cdot \widehat{Z}_n \rceil,$$

wobei für $x \in \mathbb{R}$ *wie üblich* $\lceil x \rceil := \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\}$ *gesetzt sei.*

Beweis. Wie im Beweis von Satz 3.5.4 gesehen, gibt $R_n - 1$ die Anzahl der Individuen in $\widehat{T}_n$ an, die sich rechts von V_n befinden; insbesondere gilt $R_n \leq \widehat{Z}_n$.

Ordnen wir für $t \in \mathbb{T}$ mit $z_n(t) = p \quad (p \geq 1)$ die Individuen in t_n in der Form

$$\tau_n^{(1)}(t) < \ldots < \tau_n^{(p)}(t)$$

und ziehen erneut Vergleichslemma 3.1.6 zu Rate, so folgt für $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
P(R_n = k) &= \sum_{m\geq k} P(\widehat{Z}_n = m, R_n = k)\\
&= \sum_{m\geq k} \quad \sum_{t\in\mathbb{T}_n:\, z_n(t)=m} \widehat{\mathbf{Q}}_*\left(\left[t; \tau_n^{(m-k+1)}(t)\right]_n\right)\\
&= \sum_{m\geq k} \quad \sum_{t\in\mathbb{T}_n:\, z_n(t)=m} \mathbf{Q}([t]_n)\\
&= \sum_{m\geq k} P(Z_n = m)\\
&= \sum_{m\geq k} P(\widehat{Z}_n = m) \cdot \underbrace{P\left(\frac{k-1}{m} < U \leq \frac{k}{m}\right)}_{=1/m}\\
&= P(k-1 < U \cdot \widehat{Z}_n \leq k)\\
&= P(\lceil U \cdot \widehat{Z}_n \rceil = k).
\end{aligned}$$

Da sowohl R_n als auch $\lceil U \cdot \widehat{Z}_n \rceil$ f.s. auf $\mathbb{N}$ konzentriert sind, ist unser Lemma bewiesen. □

Das folgende Lemma beschreibt, inwiefern die Begrifflichkeiten „Verteilungskonvergenz" und „Größenverzerrung" miteinander verträglich sind.

3.5.7. Lemma. *Es seien $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Folge nichtnegativer Zufallsgrößen mit endlichen, positiven Erwartungswerten $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ sowie $(\widehat{X}_n)_{n\geq 0}$ eine Folge zugehöriger größenverzerrter Zufallsgrößen. Es gelte*

$$X_n \xrightarrow{d} X_0 \qquad (n \to \infty).$$

Ist die Folge $(\widehat{X}_n)_{n\geq 0}$ ebenfalls verteilungskonvergent mit endlichem Limes, so gilt bereits

$$\widehat{X}_n \xrightarrow{d} \widehat{X}_0 \qquad (n \to \infty).$$

Beweis. Für $n \geq 0$ setzen wir zur Abkürzung $P_n := P^{X_n}$, so daß $\widehat{P}_n = P^{\widehat{X}_n}$ gilt und

$$\widehat{P}_n \xrightarrow{w} \widehat{P}_0 \qquad (n \to \infty)$$

zu zeigen ist. Die schwache Konvergenz der Folgen $(P_n)_{n\geq 0}$ bzw. $(\widehat{P}_n)_{n\geq 0}$ impliziert vermöge Satz 43.3 in [Als1] deren Straffheit und weiter durch eine Adaptation des Beweises von Lemma 3.4.1[11]

$$M := \sup_{n\geq 0} \alpha_n < \infty. \tag{3.5.12}$$

Im folgenden genügt es, „$\widehat{P}_n \xrightarrow{v} \widehat{P}_0$" für $n \to \infty$, d.h. die vage Konvergenz nachzuprüfen, denn im Hinblick auf Satz 43.8 in [Als1] und die Straffheit der Folge $(\widehat{P}_n)_{n\geq 0}$ ist dann bereits die schwache Konvergenz, d.h. „$\widehat{P}_n \xrightarrow{w} \widehat{P}_0$" für $n \to \infty$ sichergestellt.

Zum Nachweis der vagen Konvergenz sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige stetige Funktion mit kompaktem Träger. Dann haben wir

$$\lim_{n\to\infty} Eg(\widehat{X}_n) = Eg(\widehat{X}_0)$$

[11] Die Tatsache, daß die Zufallsgrößen X_n nicht notwendig $\mathbb{N}$-wertig sind, bereitet dabei offenbar keine Schwierigkeiten.

zu zeigen, wobei wir nach evtl. Zerlegung von g in Positiv- und Negativteil o.B.d.A. $g \geq 0$ annehmen dürfen und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{EX_n g(X_n)}{\alpha_n} = \frac{EX_0 g(X_0)}{\alpha_0}$$

zu bestätigen haben. Im ersten Schritt verifizieren wir dazu die Konvergenz des Zählers: Offenbar ist die Abbildung $x \mapsto xg(x)$ stetig und beschränkt, so daß die Verteilungskonvergenz der Folge $(X_n)_{n\geq 0}$ tatsächlich

$$\lim_{n\to\infty} EX_n g(X_n) = EX_0 g(X_0)$$

liefert. Damit ist nur noch die Konvergenz der Erwartungswerte, d.h. $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha_0$ zu begründen. Dies werden wir via Satz 50.5 in [Als1] erledigen, indem wir noch die gleichgradige Integrierbarkeit der Folge $(X_n)_{n\geq 0}$ nachweisen. Dabei hilft uns die Straffheit von $(\widehat{P}_n)_{n\geq 0}$ weiter, denn sie liefert uns zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $L > 0$ mit

$$\sup_{n\geq 0} \widehat{P}_n((L,\infty)) = \sup_{n\geq 0} \frac{EX_n \mathbb{1}_{\{X_n > L\}}}{\alpha_n} \leq \frac{\varepsilon}{M}$$

und daher bei Beachtung von (3.5.12)

$$\sup_{n\geq 0} EX_n \mathbb{1}_{\{X_n > L\}} \leq \varepsilon,$$

woraus ersichtlich die geforderte gleichgradige Integrierbarkeit folgt. □

Ein wichtiges Ingrediens unserer Konvergenzuntersuchung in Satz 3.5.9 bildet die in Teil (a) des folgenden Lemmas angegebene, von der sogenannten *Gedächtnislosigkeit* (☞ [Als1], Satz 31.6) unabhängige Charakterisierung der Familie der Exponentialverteilungen, die von eigenständigem Interesse ist. Da wir in Abschnitt 5.2 von einer ähnlichen Charakterisierung Gebrauch machen werden, geben wir diese in Teil (b) an. Für eine detaillierte Diskussion einschließlich analoger Aussagen für mehrdimensionale Verteilungen weisen wir auf [PK] bzw. [KoSt] hin.

3.5.8. Lemma. *Gegeben sei eine nichtnegative Zufallsgröße X mit endlichem, positivem Erwartungswert ν und einer zugehörigen größenverzerrten Zufallsgröße $\widehat{X}$. Ferner seien X_1, X_2 stochastisch unabhängige Kopien von X sowie U eine $\mathcal{R}(0,1)$-verteilte Zufallsgröße.*

(a) Sind U und $\widehat{X}$ stochastisch unabhängig, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $X \stackrel{d}{=} U\widehat{X}$.

(ii) X *ist exponentialverteilt.*

(b) Sind U und (X_1, X_2) stochastisch unabhängig, so sind äquivalent:

(i) X *erfüllt die „Fixpunktgleichung“*

$$X \stackrel{d}{=} U(X_1 + X_2). \tag{3.5.13}$$

(ii) X *ist exponentialverteilt.*

Beweis. (a) Wir bestimmen zunächst die Laplace-Transformierte $\varphi^\star$ von $U\widehat{X}$: Für $s > 0$ ergibt sich bei Berücksichtigung der Unabhängigkeit von U und $\widehat{X}$, Bemerkung 3.1.2(b), des Transformationssatzes sowie des Satzes von Fubini

$$\begin{aligned}
\varphi^\star(s) &= Ee^{-sU\widehat{X}} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{(0,1)} e^{-sux} \, \boldsymbol{\lambda}(du) \, P^{\widehat{X}}(dx) \\
&= \nu^{-1} \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 xe^{-sux} \, du \, P^X(dx) \\
&= (s\nu)^{-1} \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{-sx}) \, P^X(dx) \\
&= (s\nu)^{-1}(1 - \varphi(s)),
\end{aligned}$$

wenn φ die Laplace-Transformierte von X bezeichnet (beachte, daß X und $U\widehat{X}$ f.s. nichtnegativ sind). Aufgrund der trivialen Gleichung $\varphi^\star(0) = 1 = \varphi(0)$ liefert der Eindeutigkeitssatz für Laplace-Transformierte (Satz 42.4 in [Als1]) in Kombination mit der obigen Rechnung

$$\begin{aligned}
X \stackrel{d}{=} U\widehat{X} &\iff \varphi^\star(s) = \varphi(s) \qquad \forall s > 0 \\
&\iff (s\nu)^{-1}(1 - \varphi(s)) = \varphi(s) \qquad \forall s > 0 \\
&\iff \varphi(s) = \frac{1/\nu}{s + 1/\nu} \qquad \forall s > 0 \\
&\iff P^X = \mathrm{Exp}(1/\nu),
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile neben dem Eindeutigkeitssatz auch die wohlbekannte Tatsache eingegangen ist, daß die Laplace-Transformierte der Exp(β)-Verteilung für $\beta > 0$ durch $s \mapsto \frac{\beta}{s+\beta}$ gegeben ist (☞ [Als1], S. 282).

(b) „(i)⇒ (ii)“: In Analogie zum Beweis von Teil (a) bestimmen wir zunächst die Laplace-Transformierte ψ von $U(X_1 + X_2)$, wobei auf die Nichtnegativität dieser Zufallsgröße hingewiesen sei. Da $X_1 + X_2$ offenbar die (stetige) Laplace-Transformierte φ^2 besitzt, zeigt sich für $s > 0$ durch eine ähnliche Rechnung wie in (a)

$$\psi(s) = \int_{(0,1)} \int_{\mathbb{R}} e^{-sux}\, P^{X_1+X_2}(dx)\, \boldsymbol{\lambda}(du) = \int_0^1 \varphi^2(us)\, du = \frac{1}{s} \int_0^s \varphi^2(u)\, du; \tag{3.5.14}$$

bei Gültigkeit von (3.5.13) impliziert dies

$$\varphi(s) = \psi(s) = \frac{1}{s} \int_0^s \varphi^2(u)\, du \qquad \forall s > 0. \tag{3.5.15}$$

Da φ auf $(0, \infty)$ differenzierbar ist (☞ [Als1], Satz 42.1), folgt

$$\varphi'(s) = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s} \int_0^s \varphi^2(u)\, du\right) = -\frac{1}{s^2} \int_0^s \varphi^2(u)\, du + \frac{1}{s}\varphi^2(s) \qquad \forall s > 0;$$

kombinieren wir dies mit Gleichung (3.5.15), so genügt φ der Differentialgleichung

$$s\varphi'(s) + \varphi(s) = \varphi^2(s) \qquad \forall s > 0. \tag{3.5.16}$$

Betrachten wir nun die auf $(0, \infty)$ strikt positive Funktion $\Psi := \frac{1-\varphi}{\varphi}$,[12] so folgt aus (3.5.16)

$$\frac{\Psi'(s)}{\Psi(s)} = \frac{-\varphi'(s)}{\varphi(s) - \varphi^2(s)} = \frac{-\varphi'(s)}{-s\varphi'(s)} = \frac{1}{s} \qquad \forall s > 0. \tag{3.5.17}$$

Vermöge Satz II.11.2 in [For2] erhalten wir daraus für Ψ eine Darstellung der Form $\Psi(s) = as$ für alle $s > 0$ und ein geeignetes $a > 0$, so daß φ die Gestalt

$$\varphi(s) = \frac{1}{1 + \Psi(s)} = \frac{1}{1 + as} = \frac{1/a}{s + 1/a} \qquad \forall s > 0$$

[12] Man beachte, daß X wegen $EX > 0$ nicht f.s. verschwindet und somit $\varphi(s) < 1$ für jedes $s > 0$ gilt.

besitzt. Unter Hinweis auf den Beweis von (a) folgt die Behauptung, wobei die Beziehung $a = \nu^{-1}$ besteht.

„(ii) $\Rightarrow$ (i)“: Diese Aussage läßt sich ebenfalls durch Bestimmung der Laplace-Transformierten von $U(X_1+X_2)$ bestätigen; um aber den Zusammenhang mit Teil (a) zu verdeutlichen, geben wir eine alternative Begründung: Gemäß Satz 31.3 in [Als1] ist $X_1 + X_2$ $\Gamma(2, 1/\nu)$-verteilt, hat also die Lebesgue-Dichte

$$h_\nu(x) := (1/\nu)^2 x e^{-x/\nu} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) = \frac{x g_\nu(x)}{\nu},$$

wenn g_ν die Lebesgue-Dichte der Exponentialverteilung mit Parameter $1/\nu$ bezeichnet. Unter Beachtung von $EX = \nu$ zeigt Bemerkung 3.1.2(c) nun

$$X_1 + X_2 \stackrel{d}{=} \widehat{X},$$

so daß $X_1 + X_2$ ebenfalls eine Größenverzerrung von X bildet. Vermöge (a) sowie der Unabhängigkeit von U und $X_1 + X_2$ folgt nun (i).

$\square$

Nach diesen Vorbereitungen sind wir in der Lage, das angekündigte, auf A.M. Yaglom (☞ [Yag]) zurückgehende Konvergenzresultat anzugeben (☞ Satz I.9.1 in [Als3] für einen analytischen Beweis):

3.5.9. Satz. *Gegeben einen kritischen Galton-Watson-Prozeß $(Z_n)_{n\geq 0}$ mit Reproduktionsvarianz $\sigma^2 < \infty$, gilt für $t \geq 0$*

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n/n \leq t | Z_n > 0) = 1 - \exp(-2t/\sigma^2),$$

d.h. die Folge $(\kappa_n)_{n\geq 1}$ konvergiert schwach gegen die Exponentialverteilung mit Parameter $2/\sigma^2$.

Beweis. Zunächst sichert uns die Voraussetzung $\sigma^2 < \infty$ wegen $\lim_{n\to\infty} ER_n^*/n = \sigma^2/2$ (☞ Beweis von Satz 3.5.4) und $E\widehat{Z}_n = EZ_n^2/EZ_n = 1 + n\sigma^2$ (☞ Satz 1.0.5)

$$C := \sup_{n\geq 1} \frac{ER_n^*}{n} < \infty, \quad \sup_{n\geq 1} \frac{ER_n}{n} = 1 + \frac{\sigma^2}{2} < \infty \quad \text{und} \quad \sup_{n\geq 1} \frac{E\widehat{Z}_n}{n} = 1 + \sigma^2 < \infty.$$

Weiter liefert die Markov-Ungleichung für $K > 0$

$$\sup_{n\geq 1} P(R_n/n \geq K) \leq \frac{1+\sigma^2/2}{K} \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

und damit die Straffheit der Folge $(P(R_n/n \in \cdot))_{n\geq 1}$ sowie analog die Straffheit von $(P(\widehat{Z}_n/n \in \cdot))_{n\geq 1}$ und $(\kappa_n)_{n\geq 1} = (P(R_n^*/n \in \cdot))_{n\geq 1}$, da wir die Verteilungsidentität $P(R_n^* \in \cdot) = P(Z_n \in \cdot | Z_n > 0)$ für $n \geq 1$ im Beweis von Satz 3.5.4 erkannt haben. Weil offenbar auch jede Teilfolge dieser Folgen straff ist, existieren gemäß Satz 44.4 in [Als1] eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen $(n_k)_{k\geq 1}$ sowie (o.B.d.A. auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ definierte) Zufallsgrößen A, B mit

$$R_{n_k}/n_k \stackrel{d}{\longrightarrow} A, \tag{3.5.18}$$

$$R^*_{n_k}/n_k = R_{n_k}/n_k + \underbrace{(R^*_{n_k} - R_{n_k})/n_k}_{\stackrel{P}{\longrightarrow} 0} \stackrel{d}{\longrightarrow} A \tag{3.5.19}$$

und

$$\widehat{Z}_{n_k}/n_k \stackrel{d}{\longrightarrow} B \tag{3.5.20}$$

für $k \to \infty$, wobei wir auf Bemerkung 3.5.5 hinweisen. Ferner gilt für $s > 0, n \geq 1$ aufgrund von Gleichung (3.5.10)

$$\begin{aligned} P(\widehat{Z}_n/n \leq s) &= \frac{EZ_n \mathbb{1}_{\{Z_n/n\leq s\}}}{EZ_n} \\ &= \frac{E(Z_n \mathbb{1}_{\{Z_n/n\leq s\}} | Z_n > 0)}{E(Z_n | Z_n > 0)} \\ &= \frac{E\left(\mathbb{1}_{\{R_n^*/n\leq s\}} R_n^*/n\right)}{ER_n^*/n}, \end{aligned}$$

so daß $\widehat{Z}_n/n$ eine Größenverzerrung von R_n^*/n bildet. Dies liefert für $K > 0, n \geq 1$ insbesondere

$$E\left(\mathbb{1}_{\{R_n^*/n>K\}} R_n^*/n\right) \leq C \cdot P(\widehat{Z}_n/n > K),$$

also im Hinblick auf die Straffheit von $(P(\widehat{Z}_n/n \in \cdot))_{n\geq 1}$ die gleichgradige Integrierbarkeit der Folge $\left(R^*_{n_k}/n_k\right)_{k\geq 1}$, welche vermöge Satz 50.5 in [Als1]

$$EA = \lim_{k\to\infty} ER^*_{n_k}/n_k = \sigma^2/2 \in (0, \infty)$$

impliziert. Nun können wir Lemma 3.5.7 (mit $X_0 = A, X_k = R^*_{n_k}/n_k$ und $\widehat{X}_k = \widehat{Z}_{n_k}/n_k$ für $k \geq 1$) anwenden und schließen $B \stackrel{d}{=} \widehat{A}$ für jede auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ definierte Größenverzerrung $\widehat{A}$ von A und somit aufgrund von Beziehung (3.5.18)

$$\widehat{Z}_{n_k}/n_k \xrightarrow{d} \widehat{A} \qquad (k \to \infty).$$

Bezeichnet im folgenden U eine von $\widehat{A}$ und $(\widehat{Z}_n)_{n\geq 1}$ unabhängige Zufallsgröße mit $P(U \in \cdot) = \mathcal{R}(0,1)$, so folgt unter Hinweis auf Satz 36.11 in [Als1]

$$U \cdot \widehat{Z}_{n_k}/n_k \xrightarrow{d} U \cdot \widehat{A} \qquad (k \to \infty).$$

Wegen

$$0 \leq \lceil U \cdot \widehat{Z}_n \rceil/n - U \cdot \widehat{Z}_n/n \leq 1/n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

zeigt Satz 36.12 in [Als1] in Verbindung mit Lemma 3.5.6

$$R_{n_k}/n_k \stackrel{d}{=} U \cdot \widehat{Z}_{n_k}/n_k + \underbrace{\lceil U \cdot \widehat{Z}_{n_k} \rceil/n_k - U \cdot \widehat{Z}_{n_k}/n_k}_{\xrightarrow{d} 0} \xrightarrow{d} U \cdot \widehat{A}.$$

Somit sind im Hinblick auf (3.5.18) die Zufallsgrößen A und $U \cdot \widehat{A}$ identisch verteilt, so daß A – wie in Lemma 3.5.8(a) gesehen – exponentialverteilt sein muß, wobei sich der Parameter gerade zu $(EA)^{-1} = 2/\sigma^2$ ergibt.
Liegt nun irgendeine verteilungskonvergente Teilfolge $\left(R^*_{m_k}/m_k\right)_{k\geq 1}$ von $(R^*_n/n)_{n\geq 1}$ vor, so liefert eine Wiederholung der obigen Argumentation für eine geeignete weitere Teilfolge $\left(R^*_{m_{k_l}}/m_{k_l}\right)_{l\geq 1}$

$$R^*_{m_{k_l}}/m_{k_l} \xrightarrow{d} A \qquad (l \to \infty)$$

und folglich aus Eindeutigkeitsgründen schon

$$R^*_{m_k}/m_k \xrightarrow{d} A \qquad (k \to \infty).$$

Somit besitzt jede verteilungskonvergente Teilfolge von $(R^*_n/n)_{n\geq 1}$ denselben Limes, nämlich $\mathrm{Exp}(2/\sigma^2)$. Da die Folge $(\kappa_n)_{n\geq 1} = (P(R^*_n/n \in \cdot))_{n\geq 1}$ straff ist, impliziert Korollar 44.5 in [Als1] nun

$$\kappa_n \xrightarrow{w} \mathrm{Exp}(2/\sigma^2) \qquad (n \to \infty)$$

und damit unsere Behauptung. □

3.5.10. Bemerkung. (a) Zur probabilistischen Interpretation des obigen Beweises läßt sich folgendes anmerken: Die mit A bezeichnete exponentialverteilte Grenzvariable genügt der Verteilungsidentität

$$A \stackrel{d}{=} U\widehat{A} \stackrel{d}{=} U(A_1 + A_2),$$

wenn A_1, A_2 voneinander und von U unabhängige Kopien von A sind (☞ Lemma 3.5.8): Schreiben wir $\widehat{Z}_n$ in der Form

$$\widehat{Z}_n = 1 + L_n + R_n,$$

wobei L_n die Anzahl der Individuen links von V_n in $\widehat{T}_n$ angibt, so läßt sich A_1 als (Verteilungs-)Grenzwert von L_n/n und A_2 als (Verteilungs-)Grenzwert von R_n/n auffassen.

(b) Die Konvergenzaussage aus Satz 3.5.9 besitzt folgende Ergänzung für den Fall unendlicher Reproduktionsvarianz:

Ist $\sigma^2 = \infty$, so gilt ceteris paribus für alle $t \geq 0$

$$P(Z_n/n \leq t | Z_n > 0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d.h. gegeben $Z_n > 0$ konvergiert Z_n/n nach Wahrscheinlichkeit gegen unendlich. Da sich der Beweis von Satz 3.5.9 aber nicht ohne weiteres auf diese Situation übertragen läßt, verweisen wir auf [Sla].

Kapitel 4

Die Beweismethode von J. Geiger

In diesem Kapitel wird ein anderer methodischer Zugang zu klassischen bedingten Grenzwertaussagen für kritische und subkritische GWP vorgestellt. Dieser Ansatz wurde von J. Geiger entwickelt, dessen Darstellung in [Gei1] wir daher als Grundlage für unsere Ausführungen heranziehen, und basiert auf der zentralen Idee, rekursiv eine Folge zufälliger Bäume $(\mathcal{T}^n)_{n\geq 0}$ zu konstruieren, die einerseits der Bedingung

$$P(\mathcal{T}^n \in \cdot) = P(T \in \cdot | z_n \circ T > 0) \qquad (n \geq 0)$$

genügt, andererseits aber eine geeignete Abhängigkeitsstruktur besitzt, die wir uns beim Grenzübergang $n \to \infty$ für die angestrebten Konvergenzaussagen zunutze machen können. Die Tatsache, daß in der klassischen Theorie der Galton-Watson-Prozesse bedingte Grenzwertsätze fast ausschließlich im Fall $\mu \leq 1$ (d.h. $q = 1$ bei Beachtung von Generalvoraussetzung 1.0.6) eine Rolle spielen, führt zur folgenden inhaltlichen Eingrenzung unserer Darstellung: Da die Folge $(P(Z_n > 0))_{n\geq 0}$ im Fall $\mu > 1$ den Limes $1 - q > 0$ besitzt, ist das Bedingen von Z_n unter $\{Z_n > 0\}$ nur von marginalem Interesse, so daß wir uns auf kritische und subkritische GWP konzentrieren, obwohl die Konstruktion der Folge $(\mathcal{T}^n)_{n\geq 0}$ auch im Fall $\mu > 1$ möglich ist.

Es sei also für den Rest dieses Kapitels

$$0 < \mu \leq 1$$

vorausgesetzt.

4.1 Eine nützliche Folge zufälliger Bäume

Wie bereits erwähnt, möchten wir in diesem Kapitel im Fall $\mu \leq 1$ die bedingte Verteilung von T gegeben $z_n \circ T$ für $n \to \infty$ untersuchen. Dazu schicken wir als erstes die folgende Warnung voraus: Im gewöhnlichen GWP $(Z_n)_{n\geq 0}$ und somit im gewöhnlichen GWB T pflanzen sich die realisierten Individuen unabhänig voneinander und zeitlich homogen fort. Von dieser Tatsache haben wir bisher – insbesondere in Gestalt von Satz 2.3.5 – erheblichen Gebrauch gemacht, aber diese dem Prozeß $(Z_n)_{n\geq 0}$ immanente Unabhängigkeitseigenschaft geht beim Bedingen unter $Z_n > 0$ offenbar ebenso wie die zeitliche Homogenität verloren: Besteht etwa die Generation $n-1$ aus k Individuen, wobei die ersten $k-1$ Individuen keine Nachfahren hervorbringen, so muß das k-te Individuum offenbar mindestens einen Nachfahren generieren, um die Bedingung $Z_n > 0$ zu erfüllen. Insbesondere ist zunächst kein Analogon zu Satz 2.3.5 in Sicht.

Erfolgreich ist nun aber folgender Ansatz: Wir bedingen nicht nur unter $Z_n > 0$, sondern interessieren uns auch für das kleinste Individuum in der ersten Generation T_1, das Nachkommen in Generation n hat. Dieses haben wir bereits im Beweis von Satz 3.4.2 berücksichtigt und mit ξ_n bezeichnet.

In der Tat bringt das folgende Lemma den Stein ins Rollen, wobei wir für $n \geq 0$ zur Abkürzung

$$\mathbf{Q}_n := P(T \in \cdot | Z_n > 0)$$

und

$$\mathbf{Q}'_n := P(T \in \cdot | Z_n = 0) \qquad (:= \delta_{\{(\emptyset)\}} \text{ im Fall } n = 0)$$

definieren sowie an $c_n = P(Z_n > 0)/P(Z_{n+1} > 0)$ erinnern. Anschaulich wird der auf Mindesthöhe n bedingte GWB im Individuum ξ_n „zersägt“.

4.1.1. Lemma. *Gegeben $n \geq 0$ und $k \geq j \geq 1$ mit $p_k > 0$, gelten die folgenden Aussagen (wobei wir im Fall $n = 0$ nur $j = 1$ zulassen):*

(a)

$$P(\xi_{n+1} = j, Z_1 = k | Z_{n+1} > 0) = c_n p_k P(Z_n = 0)^{j-1}. \qquad (4.1.1)$$

(b) *Gegeben* $\{\xi_{n+1} = j, Z_1 = k\}$, *sind die von den Individuen der ersten Generation erzeugten Teilbäume* $T(1), \dots, T(k)$ *stochastisch unabhängig mit den Verteilungen*

$$P(T(i) \in \cdot | \xi_{n+1} = j, Z_1 = k) = \begin{cases} \mathbf{Q}'_n, & \textit{falls } 1 \le i \le j-1, \\ \mathbf{Q}_n, & \textit{falls } i = j, \\ \mathbf{Q}, & \textit{falls } j+1 \le i \le k. \end{cases}$$

(c) *Ist* $t \in \mathbb{T}$ *mit* $z_1(t) = k$ *sowie* $l \ge 1$, *so gilt ferner*

$$P(T \in [t]_l | Z_1 = k, \xi_{n+1} = j) = \mathbf{Q}_n([t(j)]_{l-1}) \prod_{i=1}^{j-1} \mathbf{Q}'_n([t(i)]_{l-1}) \prod_{i=j+1}^{k} \mathbf{Q}([t(i)]_{l-1}). \tag{4.1.2}$$

Beweis. (a) ergibt sich unter Verwendung von Satz 2.3.5 und der Notation aus dem Beweis von Satz 3.4.2 aus der Identität

$$\begin{aligned} P(Z_1 = k, \xi_{n+1} = j, Z_{n+1} > 0) &= p_k P(Z_n(i) = 0 \text{ für } i < j, Z_n(j) > 0 | Z_1 = k) \\ &= p_k P(Z_n = 0)^{j-1} P(Z_n > 0) \end{aligned}$$

und anschließender Division durch $P(Z_{n+1} > 0)$.

(b) Wir notieren zunächst, daß mit p_k offenbar auch

$$P(Z_1 = k, \xi_{n+1} = j) = p_k P(Z_n = 0)^{j-1} P(Z_n > 0) > 0$$

ist (wobei $n = 0$ offenbar $j = 1$ impliziert). Mit $B_n := z_n^{-1}(\{0\})$ für $n \ge 0$ folgt für beliebige, aber feste $A_1, \dots, A_k \in \mathfrak{T}$ zunächst

$$\begin{aligned} &\bigcap_{i=1}^{k} \{T(i) \in A_i\} \cap \{Z_1 = k, \xi_{n+1} = j\} \\ = \; &\{Z_1 = k, \, T(j) \in A_j \cap B_n^c\} \cap \bigcap_{i=1}^{j-1} \{T(i) \in A_i \cap B_n\} \\ &\cap \bigcap_{i=j+1}^{k} \{T(i) \in A_i\} \end{aligned}$$

und dann mit Satz 2.3.5 und Teil (a)

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{T(i)\in A_i\}\cap\{Z_1=k,\xi_{n+1}=j\}\right)$$
$$=p_kP(T\in A_j\cap B_n^c)\cdot\prod_{i=1}^{j-1}P(T\in A_i\cap B_n)\cdot\prod_{i=j+1}^{k}P(T\in A_i),$$

also nach Division durch $p_kP(Z_n>0)P(Z_n=0)^{j-1}$ (nur im Fall $j=1$, falls $n=0$)

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{T(i)\in A_i\}\middle|Z_1=k,\xi_{n+1}=j\right)=\mathbf{Q}_n(A_j)\cdot\prod_{i=1}^{j-1}\mathbf{Q}'_n(A_i)\cdot\prod_{i=j+1}^{k}\mathbf{Q}(A_i). \tag{4.1.3}$$

Setzen wir nun $A_i=\mathbb{T}$ für geeignete $i\in\{1,\ldots,k\}$, so folgt aus (4.1.3) zunächst die Verteilungsaussage und damit auch die Unabhängigkeit.

(c) Setzen wir $A_i:=[t(i)]_{l-1}$ für $1\le i\le k$, so erhalten wir

$$\{T\in[t]_l\}=\{Z_1=k\}\cap\bigcap_{i=1}^{k}\{T(i)\in A_i\}$$

und die Behauptung durch Wiederholung der Rechnung aus Beweisteil (b).

□

Wir haben also gesehen, daß durch Bedingen unter (Z_1,ξ_{n+1}) die Teilbäume von T wieder unabhängig werden. Dabei generieren die Individuen links von ξ_{n+1} einen unter Aussterben bis zum Zeitpunkt n bedingten GWB, ξ_{n+1} bildet die Wurzel eines auf Mindesthöhe n bedingten GWB, während die Individuen rechts von ξ_{n+1} die Urahnen unbedingter GWB sind.

Lemma 4.1.1 legt nun folgende Konstruktion nahe, wobei natürlich der Tatsache, daß die Teilbäume nach Bedingen verschiedene Verteilungen besitzen, Rechenschaft zu leisten ist:

4.1.2. Konstruktion. Gegeben seien unabhängige, auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ definierte Familien $((M_n, N_n))_{n\geq 1}$, $(T^{n,i})_{n,i\geq 0}$ und $(\widetilde{T}^{n,i})_{n\geq 0, i\geq 1}$ unabhängiger Zufallsvariablen mit folgenden Verteilungen:

(i) Für $n, i \geq 0$ sei $T^{n,i}$ eine Kopie von T, d.h. ein gewöhnlicher GWB mit Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j\geq 0}$ und Verteilung $P(T^{n,i} \in \cdot) = \mathbf{Q}$.

(ii) Für $n \geq 0, i \geq 1$ besitze $\widetilde{T}^{n,i}$ die Verteilung

$$\mathbf{Q}'_n = \begin{cases} P(T \in \cdot | Z_n = 0), & \text{falls } n \geq 1, \\ \delta_{\{(\emptyset)\}}, & \text{falls } n = 0, \end{cases}$$

d.h. $\widetilde{T}^{n,i}$ beschreibe im Fall $n \geq 1$ die Entwicklung eines GWP, der bis zum Zeitpunkt n ausgestorben ist.

(iii) Für $n \geq 1$ und $1 \leq j \leq k < \infty$ gelte

$$P(M_n = j, N_n = k) = c_{n-1} p_k P(Z_{n-1} = 0)^{j-1},$$

d.h. (M_n, N_n) besitze für $n \geq 1$ die bedingte Verteilung von (ξ_n, Z_1) gegeben $Z_n > 0$.

Sodann definieren wir induktiv eine Folge zufälliger Bäume $(\mathcal{T}^n)_{n\geq 0}$: Wir setzen

$$\mathcal{T}^0 := T^{0,0},$$

so daß $\mathcal{T}^0$ einen gewöhnlichen GWB bildet. Nehmen wir für $n \geq 1$ nun $\mathcal{T}^{n-1}$ als konstruiert an, so bezeichne $\mathcal{T}^n$ den offenkundig eindeutig bestimmten zufälligen, lokal endlichen Baum mit den folgenden Eigenschaften:

- $z_1 \circ \mathcal{T}^n = N_n$;
- $\mathcal{T}^n$ besitzt die folgenden Teilbäume:

$$\mathcal{T}^n(i) = \begin{cases} \widetilde{T}^{n-1,i}, & \text{falls } 1 \leq i \leq M_n - 1, \\ \mathcal{T}^{n-1}, & \text{falls } i = M_n, \\ T^{n-1,i-M_n}, & \text{falls } M_n < i \leq N_n. \end{cases}$$

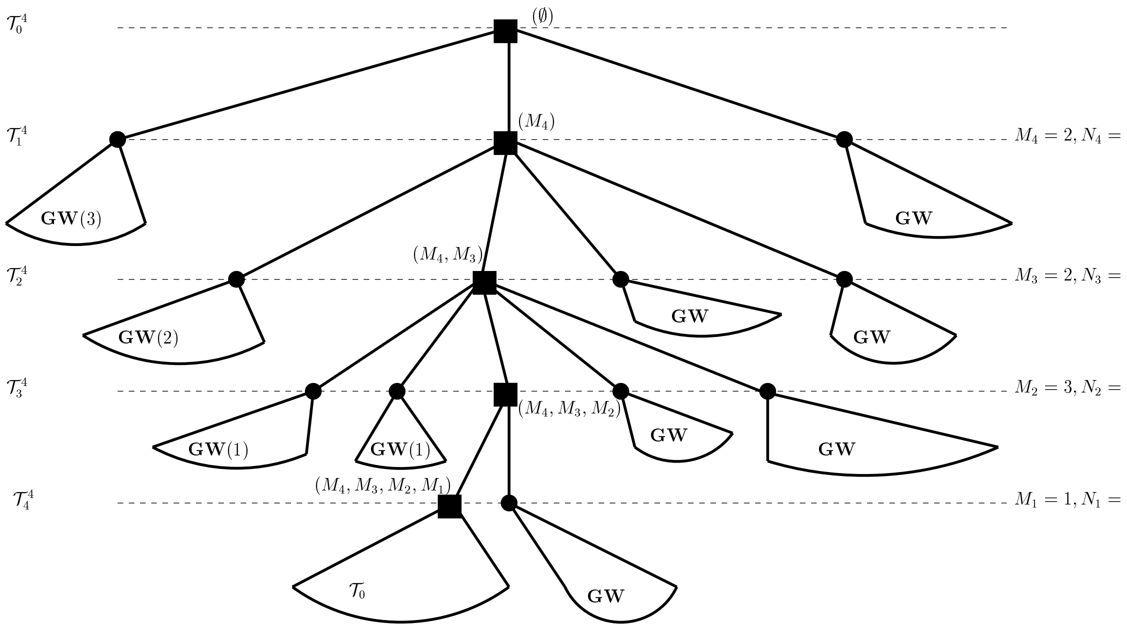


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung von $\mathcal{T}^4$. Hier bezeichnet **GW** einen gewöhnlichen GWB sowie $\mathbf{GW}(i)$ einen auf Aussterben bis zum Zeitpunkt i bedingten GWB, und für $0 \leq i \leq 3$ läßt sich $\mathcal{T}^i$ mit dem in $(M_4, \ldots, M_{i+1})$ verwurzelten Teilbaum von $\mathcal{T}^4$ identifizieren.

Verbal läßt sich die soeben vorgenommene Konstruktion wie folgt beschreiben: Wir beginnen mit einem gewöhnlichen GWB $\mathcal{T}^0$. Zum Zeitpunkt $n \geq 1$ geschieht dann induktiv folgendes: Anhand des Zufallsvektors (M_n, N_n) wird zum einen die Größe der ersten Generation des lokal endlichen Baumes $\mathcal{T}^n$ „ausgewürfelt“, andererseits wird unter diesen N_n Individuen eines besonders ausgezeichnet, nämlich das Individuum M_n. Dieses gründet nun seinerseits einen Stammbaum, der (nach geeigneter Umbenennung der Individuen) mit $\mathcal{T}^{n-1}$ übereinstimmt. Analog generieren die Individuen i für $i < M_n$ einen eigenen Stammbaum, der nach Shiften mit $\widetilde{\mathcal{T}}^{n-1,i}$, einem unter Aussterben bis zum Zeitpunkt $n-1$ bedingten GWB übereinstimmt; für $i > M_n$ generieren sie einen gewöhnlichen, unbedingten GWB.

Daneben ist noch eine andere Sichtweise von Interesse: Nehmen wir $\mathcal{T}^{n-1}$ als konstruiert an, so bekommt der Urahn von $\mathcal{T}^{n-1}$ N_n-1 Geschwister, davon M_n-1 zu seiner Linken und N_n-M_n zu seiner Rechten (man beachte, daß wir für den Moment die zeitliche Abfolge der Generationen umkehren), die ihrerseits unabhängige Verzweigungsbäume gründen.[1] Diese N_n Individuen bilden somit die erste Generation von $\mathcal{T}^n$, und dabei ist M_n das kleinste Individuum in dieser, das Nachfahren in $\mathcal{T}_n^n$ hat.[2] Daher ist es sinnvoll zu sagen, $\mathcal{T}^n$ sei entlang der „Ahnenlinie" des kleinsten Individuums in $\mathcal{T}_n^n$ aufgebaut worden; dieses ergibt sich induktiv zu $(M_n, \dots, M_1) \in \mathbb{N}^n$.

Ferner weisen wir auf die grundlegende Asymmetrie bezüglich dieser Ahnenlinie hin, denn links befinden sich auf Aussterben bedingte, rechts aber unbedingte Teilbäume.

Wie auch die obige Abbildung 4.1 bestätigt, bildet für $0 \leq k \leq n$ der Baum $\mathcal{T}^k$ einen Teilbaum von $\mathcal{T}^n$, der von

$$\underbrace{(M_n, M_{n-1}, \dots, M_{k+1})}_{:=(\emptyset),\ \text{falls}\ k=n} \in \mathcal{T}_{n-k}^n \subset \mathbb{N}^{n-k}$$

gegründet wird. Ferner bildet genau dieses Individuum $(M_n, M_{n-1}, \dots, M_{k+1})$ (bei festem n) das kleinste Individuum in $\mathcal{T}_{n-k}^n$, der $(n-k)$-ten Generation von $\mathcal{T}^n$, das einen Nachfahren in $\mathcal{T}_n^n$ besitzt. Dies werden wir später im Rahmen von Satz 4.3.3 bei der Untersuchung des größten gemeinsamen Vorfahren aller Individuen in $\mathcal{T}_n^n$ verwenden.

Offenbar liefert uns $\mathcal{T}^n$ für jedes $n \geq 0$ eine Abbildung mit Werten in $\mathbb{T}$. Im folgenden Lemma identifizieren wir zum einen $\mathcal{T}^n$ für jedes n als $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{T}$-meßbare Abbildung, zum anderen zeigt sich, daß $\mathcal{T}^n$ nicht nur Mindesthöhe n besitzt, sondern tatsächlich eine Kopie von T gegeben $Z_n > 0$ ist.

4.1.3. Lemma. *Es sei $n \geq 0$.*

(a) Die Abbildung $\mathcal{T}^n$ ist $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{T}$-meßbar.

(b) Es gilt $P(\mathcal{T}^n \in \cdot) = P(T \in \cdot | Z_n > 0) = \mathbf{Q}_n$.

Beweis. (a) Wir zeigen die Behauptung per Induktion nach n: Da $\mathcal{T}^0$ einen gewöhnlichen Galton-Watson-Baum bildet, ist für $n = 0$ nichts zu zeigen. Nehmen wir für $n \geq 1$ jetzt $\mathcal{T}^{n-1}$ als meßbar an, so gilt für $t \in \mathbb{T}$ mit $k := z_1(t)$

[1] Links auf Aussterben bis zur Generation $n-1$ bedingte, rechts unbedingte.

[2] Denn induktiv folgt $H(\mathcal{T}^m) \geq m$ für $m \geq 1$.

und $l \geq 1$

$$\{\mathcal{T}^n \in [t]_l\} = \sum_{j=1}^{k} \{M_n = j, N_n = k\} \cap \bigcap_{i=1}^{k} \{\mathcal{T}^n(i) \in [t(i)]_{l-1}\} \in \mathfrak{A}, \qquad (4.1.4)$$

denn gemäß Konstruktion 4.1.2 gilt $\mathcal{T}^n(j) = \mathcal{T}^{n-1}$ auf $\{M_n = j\}$, und laut Induktionsvoraussetzung ist neben (M_n, N_n), $(\widetilde{T}^{n-1,i})_{i\geq 1}$ und $(T^{n-1,i})_{i\geq 1}$ auch $\mathcal{T}^{n-1}$ $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{T}$- meßbar. Da $\mathcal{E} = \{[t]_l : t \in \mathbb{T}, l \geq 1\} \cup \{\emptyset, \mathbb{T}\}$ gemäß (2.2.2) einen (sogar $\cap$-stabilen) Erzeuger von $\mathfrak{T}$ bildet, folgt die Behauptung.

(b) Wiederum führen wir eine Induktion nach n, wobei der Induktionsanfang trivial ist. Es sei also gleich $n \geq 1$ und die Behauptung für $\mathcal{T}^{n-1}$ bewiesen. Für den Induktionsschritt notieren wir zunächst, daß $\mathcal{T}^{n-1}$ konstruktionsgemäß offenbar stochastisch unabhängig von (M_n, N_n), $(\widetilde{T}^{n-1,i})_{i\geq 1}$ und $(T^{n-1,i})_{i\geq 1}$ ist. Daher ergibt sich für $t \in \mathbb{T}$ mit $z_n(t) > 0$, $k := z_1(t)$ sowie $l \geq 1$ und $1 \leq j \leq k$ (wobei im Fall $n-1 = 0$ wieder nur $j = 1$ zugelassen sei) unter Verwendung des Beweises von (a)

$$\begin{aligned}
& P\left(\{M_n = j, N_n = k\} \cap \bigcap_{i=1}^{k} \{\mathcal{T}^n(i) \in [t(i)]_{l-1}\}\right) \\
= \;& c_{n-1} p_k P(Z_{n-1} = 0)^{j-1} P^{\mathcal{T}^{n-1}}([t(j)]_{l-1}) \prod_{i=1}^{j-1} \mathbf{Q}'_{n-1}([t(i)]_{l-1}) \prod_{i=j+1}^{k} \mathbf{Q}([t(i)]_{l-1}) \\
\overset{(*)}{=} \;& c_{n-1} p_k P(Z_{n-1} = 0)^{j-1} \mathbf{Q}_{n-1}([t(j)]_{l-1}) \prod_{i=1}^{j-1} \mathbf{Q}'_{n-1}([t(i)]_{l-1}) \prod_{i=j+1}^{k} \mathbf{Q}([t(i)]_{l-1}) \\
\overset{(\bullet)}{=} \;& P(\xi_n = j, Z_1 = k | Z_n > 0) \cdot P(T \in [t]_l | \xi_n = j, Z_1 = k) \\
= \;& P(T \in [t]_l, \xi_n = j | Z_n > 0), \qquad (4.1.5)
\end{aligned}$$

da $z_1(t) = k$ und $z_n(t) > 0$. Hier ist in $(*)$ die Induktionsvoraussetzung sowie in $(\bullet)$ (4.1.1) und (4.1.2) eingegangen. Dies ist die Behauptung im Fall $n = 1$ (und somit $j = 1$). Im Fall $n > 1$ folgt aus (4.1.5) durch Summation über j unter Hinweis auf Gleichung (4.1.4) wie gewünscht

$$P(\mathcal{T}^n \in [t]_l) = P(T \in [t]_l | Z_n > 0),$$

und im noch zu erledigenden Fall $z_n(t) = 0$ gilt wegen $H \circ \mathcal{T}^n \geq n$ offenkundig

$$P(\mathcal{T}^n \in [t]_l) = 0 = P(T \in [t]_l | Z_n > 0),$$

so daß die Wahrscheinlichkeitsmaße $P(\mathcal{T}^n \in \cdot)$ und $\mathbf{Q}_n$ auf $\mathcal{E}$ übereinstimmen. Da $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil ist, folgt daraus die Behauptung.

□

Für unsere weiteren Untersuchungen setzen wir $\widetilde{Z}_0 := 1$ sowie für $n \geq 0, i \geq 1$

$$\begin{aligned} Z_{n,i} &:= z_n \circ T^{n,i}, \\ \Delta_{n+1} &:= N_{n+1} - M_{n+1} \qquad (4.1.6) \\ \text{und} \qquad \widetilde{Z}_{n+1} &:= \widetilde{Z}_n + \sum_{i=1}^{\Delta_{n+1}} Z_{n,i}. \end{aligned}$$

Dann bilden $(\Delta_n)_{n\geq 1}, (Z_{n,i})_{n\geq 0, i\geq 1}$ unabhängige Familien unabhängiger Zufallsgrößen, wobei für jedes $(n,i) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$

$$Z_{n,i} \stackrel{d}{=} Z_n \qquad (4.1.7)$$

gilt und Δ_{n+1} die Anzahl der Individuen rechts von (M_{n+1}) in $\mathcal{T}_1^{n+1}$, der ersten Generation von $\mathcal{T}^{n+1}$, angibt.

Wie sich im folgenden Lemma herausstellt, können wir die bedingten Verteilungen von Z_n gegeben $Z_n > 0$ mittels $\widetilde{Z}_n$ explizit simulieren:

4.1.4. Lemma. *Für jedes $n \geq 0$ besteht die Verteilungsidentität*

$$\lambda_n = P(Z_n \in \cdot | Z_n > 0) = P^{\widetilde{Z}_n}.$$

Beweis. Wir zeigen per Induktion nach n die Identität

$$\widetilde{Z}_n = z_n \circ \mathcal{T}^n.$$

Diese impliziert dann für $k \geq 1$ via Lemma 4.1.3(b) sofort

$$\begin{aligned} P(\widetilde{Z}_n = k) &= \sum_{t \in \mathbb{T}_n : z_n(t) = k} P(\mathcal{T}^n \in [t]_n) \\ &= \sum_{t \in \mathbb{T}_n : z_n(t) = k} P(T \in [t]_n | Z_n > 0) \\ &= P(Z_n = k | Z_n > 0), \end{aligned}$$

also das Verlangte.

Für $n = 0$ gilt offenbar $\widetilde{Z}_0 = 1 = z_0 \circ \mathcal{T}^0$. Nehmen wir nun an, daß die Behauptung für ein beliebiges, aber festes $n \geq 0$ bewiesen sei, so erhalten wir

$$\widetilde{Z}_{n+1} = \widetilde{Z}_n + \sum_{i=1}^{\Delta_{n+1}} Z_{n,i} \overset{(\star)}{=} z_n \circ \mathcal{T}^n + \sum_{i=1}^{N_{n+1}-M_{n+1}} z_n \circ T^{n,i} \overset{(\star\star)}{=} z_{n+1} \circ \mathcal{T}^{n+1},$$

wobei wir in $(\star)$ von der Induktionsvoraussetzung sowie in $(\star\star)$ von der konstruktionsbedingten Tatsache Gebrauch gemacht haben, daß die Elemente der Generation $n+1$ von $\mathcal{T}^{n+1}$ entweder (verschobene) Elemente der Generation n von $\mathcal{T}^n$ oder (verschobene) Elemente der Generation n eines Galton-Watson-Baums $T^{n,i}$ sind $(1 \leq i \leq \Delta_{n+1})$. $\square$

4.1.5. Bemerkungen. (a) Die vorgenommene Konstruktion erweist sich als sehr nützlich, da für $n \geq 0$ die bedingten Verteilungen λ_n explizit durch die Zufallsgrößen $\widetilde{Z}_n$ simuliert werden können. Ein erheblicher Teil der folgenden Beweise wird daher in elementare Rechnungen in Bezug auf $(\widetilde{Z}_n)_{n\geq 0}$ münden, so daß wir auf die Konstruktion der Baumfolge $(\mathcal{T}^n)_{n\geq 0}$ kaum noch zurückgreifen müssen.

(b) Da die Zufallsgrößen $\widetilde{Z}_n$ und $\sum_{i=1}^{\Delta_{n+1}} Z_{n,i}$ offenbar stochastisch unabhängig sind, zeigt Lemma 4.1.4 in Verbindung mit Gleichung (4.1.7), daß sich λ_{n+1}, die bedingte Verteilung von Z_{n+1} gegeben $Z_{n+1} > 0$, als Faltung von λ_n mit der Verteilung einer zufälligen Summe unabhängiger Kopien von Z_n auffassen läßt. Induktiv folgt aus (4.1.6) für $n \geq 0$

$$\widetilde{Z}_n = 1 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{\Delta_j} Z_{j-i,i},$$

so daß λ_n eine Darstellung der Form

$$\lambda_n = P\Bigg(1 + \sum_{j=1}^{n} \Phi_j \in \cdot\Bigg)$$

besitzt, wobei die Φ_j unabhängige Zufallssummen unabhängiger Kopien von Z_{j-1} sind.

(c) Offenbar ist die Folge $(\widetilde{Z}_n)_{n\geq 0}$ monoton wachsend. Daraus ergibt sich unmittelbar die Monotonie der Folge

$$(E\widetilde{Z}_n)_{n\geq 0} = (E(Z_n|Z_n > 0))_{n\geq 0} = \left(\frac{\mu^n}{P(Z_n > 0)}\right)_{n\geq 0}$$

(☞ Satz 3.4.2).

Weitere elementare, später benötigte Eigenschaften der soeben eingeführten Zufallsgrößen hält das folgende Lemma fest:

4.1.6. Lemma. *Für $n \geq 1$ gelten die folgenden Aussagen:*

(a) $P(\Delta_n = k) = c_{n-1} \sum_{j\geq k+1} p_j P(Z_{n-1} = 0)^{j-(k+1)} \qquad (k \geq 0).$

(b) Bezeichnet Δ_∞ eine auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ definierte Zufallsgröße mit

$$P(\Delta_\infty = k) = \mu^{-1} \sum_{j\geq k+1} p_j \qquad (k \geq 0),$$

so gilt $\Delta_m \xrightarrow{d} \Delta_\infty$ für $m \to \infty$, d.h.

$$\lim_{m\to\infty} P(\Delta_m = k) = P(\Delta_\infty = k) \qquad (k \geq 0).$$

Außerdem ist für jedes $k \geq 0$ die Abschätzung

$$P(\Delta_n = k) \leq c_0 P(\Delta_\infty = k)$$

erfüllt.

(c) $\lim_{m\to\infty} E\Delta_m = E\Delta_\infty = \sum_{j\geq 2} p_j \frac{j(j-1)}{2\mu} \leq \infty.$

Im Fall $\mu = 1$ gilt ferner $E\Delta_\infty = \sigma^2/2$.

(d) $E(\widetilde{Z}_n - \widetilde{Z}_{n-1}) = \mu^{n-1} E\Delta_n.$

Beweis. (a) Offenkundig gilt für $k \geq 0$

$$\begin{aligned} P(\Delta_n = k) &= \sum_{j \geq k+1} P(M_n = j-k, N_n = j) \\ &= c_{n-1} \sum_{j \geq k+1} p_j P(Z_{n-1} = 0)^{j-k-1}. \end{aligned}$$

(b) $\mu \leq 1$ impliziert $P(Z_m = 0) \uparrow 1$ für $m \to \infty$; wegen $\lim_{m\to\infty} c_m = \mu^{-1}$ liefert der Satz von der monotonen Konvergenz also

$$P(\Delta_m = k) = c_{m-1} \sum_{j \geq k+1} p_j P(Z_{m-1} = 0)^{j-(k+1)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \mu^{-1} \sum_{j \geq k+1} p_j.$$

Das Lemma von Scheffé (Lemma (7.3) in [Schm]) garantiert uns nun die Verteilungskonvergenz, und da die Folge $(c_n)_{n\geq 0}$ gemäß Lemma 1.0.9 monoton fallend ist, ist die zweite Aussage evident.

(c) Wiederum impliziert der Satz von der monotonen Konvergenz

$$\begin{aligned} E\Delta_m &= c_{m-1} \sum_{k\geq 0} k \sum_{j \geq k+1} p_j P(Z_{m-1} = 0)^{j-(k+1)} \\ &\underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \mu^{-1} \sum_{k \geq 0} k \sum_{j\geq k+1} p_j \\ &= \mu^{-1} \sum_{j\geq 1} p_j \sum_{k=0}^{j-1} k \\ &= \sum_{j \geq 2} p_j \frac{j(j-1)}{2\mu}, \end{aligned}$$

und im Fall $\mu = 1$ stimmt der letzte Term offenbar mit $\sigma^2/2$ überein.

(d) Eine einfache Zerlegung zeigt

$$\begin{aligned} E(\widetilde{Z}_n - \widetilde{Z}_{n-1}) &= E \sum_{l \geq 1} \mathbb{1}_{\{\Delta_n = l\}} \sum_{i=1}^{l} Z_{n-1,i} \\ &= \sum_{l\geq 1} P(\Delta_n = l) \underbrace{\sum_{i=1}^{l} EZ_{n-1,i}}_{=l\mu^{n-1}} \\ &= \mu^{n-1} E\Delta_n, \end{aligned}$$

wobei wir den Satz von der monotonen Konvergenz sowie die Unabhängigkeit von Δ_n und $(Z_{n-1,i})_{i\geq 1}$ verwendet haben. $\square$

4.1.7. Bemerkungen. (i) Wegen

$$\sum_{k\geq 0}\mu^{-1}\sum_{j\geq k+1}p_j=\mu^{-1}\sum_{k\geq 0}P(Z_1>k)=1$$

(☞ Formel (A.9) auf S. 115 in [Als1]), liegt in Teil (b) des soeben bewiesenen Lemmas tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\mathbb{N}_0,\mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$ vor.

(ii) Die Folge $((M_n,N_n))_{n\geq 1}$ ist ebenfalls verteilungskonvergent: Für $1\leq j\leq k$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}P(M_n=j,N_n=k)=\mu^{-1}p_k=P(C_0=j,\widehat{L}_0=k),$$

ergo

$$(M_n,N_n)\xrightarrow{d}(C_0,\widehat{L}_0)\qquad(n\to\infty),$$

so daß ein enger asymptotischer Zusammenhang zu den in Kapitel 3 ausführlich untersuchten größenverzerrten GWB besteht.

Außerdem bildet offenbar Δ_∞ eine Kopie von $\widehat{L}_0-C_0$, d.h.

$$\Delta_\infty\stackrel{d}{=}\widehat{L}_0-C_0,$$

so daß wir Δ_∞ als Anzahl der Individuen in $\widehat{T}_1$ interpretieren können, welche sich zur Rechten der Rückgratkomponente V_1 befinden.

(iii) Unter der Voraussetzung $0<p_0<1$ läßt sich durch ein zu Konstruktion 4.1.2 ähnliches Verfahren eine Folge $(\bar{\mathcal{T}}^n)_{n\geq 0}$ mit

$$P(\bar{\mathcal{T}}^n\in\cdot)=P(T\in\cdot|H\circ T=n)=P(T\in\cdot|z_n\circ T>0,z_{n+1}\circ T=0)\qquad(n\geq 0)$$

gewinnen. J. Geiger und G. Kersting (☞ [GK]) beweisen auf diesem Wege Grenzwertsätze für die Folge $(\bar{Z}_n)_{n\geq 0}$, gegeben durch

$$\bar{Z}_n:=z_n\circ\bar{\mathcal{T}}^n\qquad(n\geq 0).$$

Anschaulich bildet $\bar{\mathcal{T}}^n$ einen auf Höhe n bedingten GWB, und $\bar{Z}_n$ gibt die Größe der letzten (nicht leeren) Generation an.

4.2 Subkritische Galton-Watson-Prozesse

Nach den Vorarbeiten in Abschnitt 4.1 können wir nun neue Beweise für bereits in Abschnitt 3.4 hergeleitete Aussagen über subkritische GWP angeben.

Unser erstes Ergebnis bildet dabei eine Verschärfung von Satz 3.4.4.

4.2.1. Satz. *Im Fall $\mu < 1$ gilt*

$$P(\widetilde{Z}_\infty < \infty) = 1.$$

Beweis. Aufgrund der Monotonie der Folge $(\widetilde{Z}_n)_{n\geq 0}$ und der Tatsache, daß jedes $\widetilde{Z}_n$ f.s. $\mathbb{N}_0$-wertig ist, genügt es unter Rückgriff auf das Lemma von Borel-Cantelli,

$$\sum_{n\geq 0} P(\widetilde{Z}_{n+1} > \widetilde{Z}_n) < \infty$$

nachzuweisen. Beachten wir in Anlehnung an den Beweis von Satz 3.4.4 die für $x \in [0,1]$ und $j \geq 1$ gültige Ungleichung

$$1 - (1-x)^j \leq (jx) \wedge 1$$

sowie die Unabhängigkeit der auftretenden Zufallsgrößen, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
P(\widetilde{Z}_{n+1} > \widetilde{Z}_n) &= P\left(\sum_{i=1}^{\Delta_{n+1}} Z_{n,i} > 0\right) \\
&= \sum_{k\geq 1} P\left(\Delta_{n+1} = k, \sum_{i=1}^{k} Z_{n,i} > 0\right) \\
&= \sum_{k\geq 1} P(\Delta_{n+1} = k)\left(1 - P\left(\sum_{i=1}^{k} Z_{n,i} = 0\right)\right) \\
&= \sum_{k\geq 1} P(\Delta_{n+1} = k)(1 - P(Z_n = 0)^k) \\
&\leq \sum_{k\geq 1} P(\Delta_{n+1} = k)(1 \wedge (kP(Z_n > 0))).
\end{aligned}$$

Schreiben wir $A := \{(n,k) \in \mathbb{N}^2 : P(Z_n > 0) < 1/k\}$ und $B := \mathbb{N}^2 \setminus A$, so erhalten wir die Abschätzung

$$\sum_{n\geq 1} P(\widetilde{Z}_{n+1} > \widetilde{Z}_n) \leq I_1 + I_2$$

mit

$$I_1 := \sum_{(n,k)\in A} P(\Delta_{n+1}=k)kP(Z_n>0) \qquad \text{und} \qquad I_2 := \sum_{(n,k)\in B} P(\Delta_{n+1}=k).$$

Um zunächst $I_1 < \infty$ nachzuweisen, verwenden wir für $k \geq 1$ wieder die Notation

$$\alpha(k) = \inf\left\{l \geq 1 : P(Z_l > 0) < \frac{1}{k}\right\}$$

und schließen wegen $P(\Delta_{n+1} = k) \leq c_0 P(\Delta_\infty = k)$ (☞ Lemma 4.1.6(b)) und $P(Z_{n+\alpha(k)} > 0) \leq \mu^n P(Z_{\alpha(k)} > 0)$ (☞ Lemma 1.0.9(c)) durch Umordnen

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq\alpha(k)} P(\Delta_{n+1}=k)kP(Z_n>0) \\
&\leq c_0 \sum_{k\geq 1} P(\Delta_\infty = k)k \sum_{n\geq 0} \underbrace{P(Z_{n+\alpha(k)}>0)}_{\leq \mu^n P(Z_{\alpha(k)}>0)} \\
&\leq c_0 \sum_{k\geq 1} P(\Delta_\infty = k)\underbrace{kP(Z_{\alpha(k)}>0)}_{\leq 1}\sum_{n\geq 0}\mu^n \\
&\leq \frac{c_0}{1-\mu}\sum_{k\geq 1} P(\Delta_\infty = k) < \infty.
\end{aligned}$$

Zur Untersuchung von I_2 setzen wir $\beta(n) := \left\lfloor \frac{1}{P(Z_n>0)} \right\rfloor$ für $n \geq 1$ und erhalten mittels geeigneter Umordnungen

$$\begin{aligned}
I_2 &= \sum_{(n,k)\in B} P(\Delta_{n+1}=k) \\
&\leq c_0 \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq\beta(n)}\sum_{j\geq k+1} p_j P(Z_n=0)^{j-k-1} \\
&= c_0 \sum_{n\geq 1}\sum_{j\geq\beta(n)+1} p_j \underbrace{\sum_{k=\beta(n)}^{j-1} P(Z_n=0)^{j-k-1}}_{\leq \frac{1}{1-P(Z_n=0)}} \\
&\leq c_0 \sum_{n\geq 1}\sum_{j\geq\beta(n)+1} \frac{p_j}{P(Z_n>0)} \\
&\overset{(\star)}{\leq} c_0 \sum_{j\geq 1}\sum_{n=1}^{\alpha(j)-1} \frac{p_j}{P(Z_n>0)} \\
&\overset{(\star\star)}{\leq} c_0 \sum_{j\geq 1}\sum_{n=1}^{\alpha(j)-1} \frac{p_j}{P(Z_{\alpha(j)-1}>0)}\mu^{\alpha(j)-1-n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \quad c_0 \sum_{j\geq 1} p_j \underbrace{\frac{1}{P(Z_{\alpha(j)-1} > 0)}}_{\leq j} \sum_{n\geq 0} \mu^n \\
&\leq \quad \frac{c_0}{1-\mu} \sum_{j\geq 1} j p_j \\
&= \quad \frac{\mu c_0}{1-\mu} < \infty.
\end{aligned}$$

Dabei ist zur Begründung von $(\star)$ die Implikation

$$j > \beta(n) \Longrightarrow \frac{1}{P(Z_n > 0)} < j \Longrightarrow P(Z_n > 0) > \frac{1}{j} \Longrightarrow n < \alpha(j)$$

zu beachten. Ferner gilt gemäß Lemma 1.0.9 für $n \leq \alpha(j) - 1$ die Ungleichung

$$P(Z_{\alpha(j)-1} > 0) \leq P(Z_n > 0)\mu^{\alpha(j)-1-n},$$

die $(\star\star)$ rechtfertigt.

Insgesamt haben wir also

$$\sum_{n\geq 0} P(\widetilde{Z}_{n+1} > \widetilde{Z}_n) \leq 1 + I_1 + I_2 < \infty$$

gezeigt. □

4.2.2. Bemerkung. Der Beweis von Satz 4.2.1 vereinfacht sich erheblich, wenn wir die quadratische Integrierbarkeit von Z_1, d.h. $\sum_{k\geq 1} k^2 p_k < \infty$ voraussetzen. Dann gilt nämlich gemäß Lemma 4.1.6(c)

$$\lim_{n\to\infty} E\Delta_n = E\Delta_\infty < \infty,$$

so daß wir insbesondere $C = \sup_{n\geq 1} E\Delta_n < \infty$ und weiter mit Lemma 4.1.6, der Darstellung

$$\widetilde{Z}_\infty = \lim_{n\to\infty} \widetilde{Z}_n = 1 + \sum_{n\geq 1} (\widetilde{Z}_n - \widetilde{Z}_{n-1})$$

und dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$E\widetilde{Z}_\infty = 1 + \sum_{n\geq 1} E(\widetilde{Z}_n - \widetilde{Z}_{n-1}) = 1 + \sum_{n\geq 1} \mu^{n-1} E\Delta_n \leq 1 + \frac{C}{1-\mu} < \infty$$

erhalten, was die f.s. Endlichkeit von $\widetilde{Z}_\infty$ impliziert.

Die Bestätigung, daß Satz 4.2.1 in der Tat eine Verschärfung von Satz 3.4.4 darstellt, bildet den Inhalt der folgenden

4.2.3. Bemerkung. Mit Satz 4.2.1 ergibt sich sehr leicht erneut Satz 3.4.4, weil unter Rückgriff auf die dort benutzte Kopplungsungleichung

$$\sum_{n\geq 1} \| \lambda_n - \lambda_{n-1} \| \leq \sum_{n\geq 1} P(\widetilde{Z}_n \neq \widetilde{Z}_{n-1}) = \sum_{n\geq 1} P(\widetilde{Z}_n > \widetilde{Z}_{n-1}) < \infty$$

folgt.

Als nächstes streben wir einen alternativen Beweis von Satz 3.4.2 an. Dazu benötigen wir u.a. das folgende

4.2.4. Lemma. *(a) Gegeben eine monoton wachsende Folge $(\vartheta_n)_{n\geq 0}$ positiver reeller Zahlen mit Limes $\vartheta \leq \infty$, gilt die Äquivalenz*

$$\vartheta < \infty \Longleftrightarrow \sum_{n\geq 0} \frac{\vartheta_{n+1} - \vartheta_n}{\vartheta_n} < \infty.$$

(b) Für $0 \leq y \leq 1$ und $j \geq 1$ ist die Ungleichung

$$\frac{j-1}{2} \sum_{k=0}^{j-1} y^k \geq \sum_{k=0}^{j-1} k y^k$$

erfüllt.

Beweis. (a) Unter Verwendung der Monotonie der Folge $(\vartheta_n)_{n\geq 0}$ und der Ungleichung $\log x \leq x - 1$ für $x > 0$ erhalten wir für $n \geq 0$

$$\log \vartheta_{n+1} - \log \vartheta_n = \log \frac{\vartheta_{n+1}}{\vartheta_n} \leq \frac{\vartheta_{n+1}}{\vartheta_n} - 1 = \frac{\vartheta_{n+1} - \vartheta_n}{\vartheta_n} \leq \frac{\vartheta_{n+1} - \vartheta_n}{\vartheta_0}$$

und damit bei Beachtung der Konvention $\log \infty := \lim_{x\to\infty} \log x = \infty$ durch Summation über n

$$\log \vartheta - \log \vartheta_0 = \sum_{n\geq 0} (\log \vartheta_{n+1} - \log \vartheta_n) \leq \sum_{n\geq 0} \frac{\vartheta_{n+1} - \vartheta_n}{\vartheta_n} \leq \frac{\vartheta - \vartheta_0}{\vartheta_0}.$$

Dies zeigt offenkundig die Behauptung.

(b) Wir halten $y \in [0,1]$ fest und führen eine Induktion nach j: Für $j = 1$ ist offenbar nichts zu zeigen, so daß wir gleich zum Induktionsschritt übergehen können. Dazu nehmen wir an, daß die Behauptung für ein beliebiges, aber festes $j \geq 1$ bewiesen sei. Zu zeigen ist nun die Ungleichung

$$\frac{j}{2}\sum_{k=0}^{j} y^k \geq \sum_{k=0}^{j} k y^k,$$

welche aber durch die Rechnung

$$\begin{aligned}
\frac{j}{2}\sum_{k=0}^{j} y^k &= \frac{j-1}{2}\sum_{k=0}^{j-1} y^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{j-1} y^k + \frac{j}{2}y^j \\
&\overset{(*)}{\geq} \sum_{k=0}^{j-1} k y^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{j-1} y^k + \frac{j}{2}y^j \\
&\geq \sum_{k=0}^{j-1} k y^k + \frac{j}{2}y^j + \frac{j}{2}y^j \\
&= \sum_{k=0}^{j} k y^k
\end{aligned}$$

bestätigt wird, wobei in $(*)$ die Induktionsvoraussetzung eingegangen ist.

□

Das nächste Hilfsresultat bestimmt die Asymptotik der Folge $(\alpha(j))_{j\geq 1}$, wobei an $\alpha(j) = \min\{n \geq 1 : P(Z_n > 0) < 1/j\}$ erinnert sei.

4.2.5. Lemma. *Es existieren Konstanten $\gamma, \gamma^* \in (0,\infty)$, derart daß für jedes $j \geq 2$*

$$\gamma \log j \leq \alpha(j) \leq \gamma^* \log j. \tag{4.2.1}$$

Beweis. Für $n \geq 0$ haben wir in Lemma 1.0.9 die Ungleichung

$$(1-p_0)^n \leq P(Z_n > 0) \leq \mu^n$$

aufgestellt. Setzen wir für $j \geq 1$ und $0 < \delta < 1$

$$\alpha_\delta(j) := \min\{n \geq 1 : \delta^n < 1/j\} = 1 + \left\lfloor -\frac{\log j}{\log \delta} \right\rfloor \in \mathbb{N},$$

so impliziert obige Ungleichung ersichtlich

$$\alpha_{1-p_0}(j) \le \alpha(j) \le \alpha_\mu(j)$$

und damit für $j \ge 2$ und geeignete $\gamma, \gamma^* \in (0,\infty)$

$$\gamma \log j \le 1 + \left\lfloor -\frac{\log j}{\log(1-p_0)} \right\rfloor = \alpha_{1-p_0}(j) \le \alpha(j) \le \alpha_\mu(j) = 1 + \left\lfloor -\frac{\log j}{\log \mu} \right\rfloor \le \gamma^* \log j.$$

□

Damit können wir jetzt Satz 3.4.2 neu beweisen, wobei wir uns allerdings nur um die folgende „abgespeckte“ Version kümmern:

4.2.6. Satz. *Gegeben einen GWP $(Z_n)_{n\ge 0}$ mit Reproduktionsmittel $\mu < 1$, sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $\sup_{n\ge 0} E(Z_n|Z_n > 0) = \sup_{n\ge 0} E\widetilde{Z}_n < \infty$

(ii) $EZ_1 \log^+ Z_1 < \infty$.

Beweis. Aufgrund der Identität $E\widetilde{Z}_\infty = \sup_{n\ge 0} E\widetilde{Z}_n$, die sich durch Anwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz bestätigen läßt, genügt es, die Äquivalenz

$$E\widetilde{Z}_\infty < \infty \Longleftrightarrow EZ_1 \log^+ Z_1 < \infty \tag{4.2.2}$$

nachzuweisen. Dazu wenden wir Lemma 4.2.4 auf $\vartheta_n = E\widetilde{Z}_n$ und $\vartheta = E\widetilde{Z}_\infty$ an und erhalten wegen $E(\widetilde{Z}_{n+1} - \widetilde{Z}_n) = EZ_n E\Delta_{n+1}$ (☞ Lemma 4.1.6(d)) sowie $E\widetilde{Z}_n = E(Z_n|Z_n > 0)$ die Äquivalenz

$$E\widetilde{Z}_\infty < \infty \Longleftrightarrow \sum_{n\ge 0} \frac{E(\widetilde{Z}_{n+1} - \widetilde{Z}_n)}{E\widetilde{Z}_n} = \sum_{n\ge 0} E\Delta_{n+1} P(Z_n > 0) < \infty. \tag{4.2.3}$$

Für den Nachweis von (4.2.2) setzen wir zunächst $EZ_1 \log^+ Z_1 = \sum_{j\ge 1} p_j j \log j < \infty$ voraus und erhalten für $n \ge 0$ unter Hinweis auf Lemma 4.1.6

$$\begin{aligned} E\Delta_{n+1} &= c_n \sum_{k\ge 1} k \sum_{j\ge k} p_{j+1} P(Z_n = 0)^{j-k} \\ &\le c_0 \sum_{j\ge 1} p_{j+1} \sum_{k=1}^{j} k P(Z_n = 0)^{j-k} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= c_0 \sum_{j\geq 1} p_{j+1} \sum_{k=0}^{j-1} (j-k) P(Z_n=0)^k \\
&\leq c_0 \sum_{j\geq 1} j p_{j+1} \sum_{k=0}^{j-1} P(Z_n=0)^k \\
&= c_0 \sum_{j\geq 1} \frac{j p_{j+1}}{P(Z_n>0)} (1-P(Z_n=0)^j)
\end{aligned}
$$

und damit weiter

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} P(Z_n>0) E\Delta_{n+1} &\leq c_0 \sum_{n\geq 0}\sum_{j\geq 1} j p_{j+1} (1-P(Z_n=0)^j) \\
&= \underbrace{c_0 \sum_{j\geq 1} j p_{j+1} \sum_{n=0}^{\alpha(j)-1} (1-P(Z_n=0)^j)}_{=:I_1^*} \\
&\quad \underbrace{+c_0 \sum_{j\geq 1} j p_{j+1} \sum_{n\geq\alpha(j)} (1-P(Z_n=0)^j)}_{=:I_2^*}.
\end{aligned}
$$

Zuerst wird mit Ungleichung (3.4.3) und Lemma 1.0.9(c) gezeigt, daß I_2^* endlich ist:

$$
\begin{aligned}
I_2^* &= \sum_{j\geq 1} j p_{j+1} \sum_{n\geq\alpha(j)} (1-P(Z_n=0)^j) \\
&\leq \sum_{j\geq 1} j p_{j+1} \sum_{n\geq\alpha(j)} j P(Z_n>0) \\
&= \sum_{j\geq 1} j^2 p_{j+1} \sum_{n\geq 0} P(Z_{n+\alpha(j)}>0) \\
&\leq \sum_{j\geq 1} j p_{j+1} \underbrace{j P(Z_{\alpha(j)}>0)}_{\leq 1} \sum_{n\geq 0} \mu^n \\
&\leq \frac{1}{1-\mu} \sum_{j\geq 1} (j+1) p_{j+1} \\
&\leq \frac{\mu}{1-\mu} < \infty.
\end{aligned}
$$

Die Endlichkeit von I_1^* ergibt sich mittels der Abschätzung

$$
\begin{aligned}
I_1^* &= \sum_{j\geq 1} j p_{j+1} \sum_{n=0}^{\alpha(j)-1} (1-P(Z_n=0)^j) \\
&\leq \sum_{j\geq 1} j p_{j+1} \alpha(j)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(\star)}{\leq} \quad p_2 + \sum_{j\geq 2} j p_{j+1} \gamma^* \log j \\
&\leq \quad p_2 + \gamma^* E Z_1 \log^+ Z_1 < \infty,
\end{aligned}
$$

wobei wir für $(\star)$ Lemma 4.2.4 herangezogen und $\alpha(1) = 1$ benutzt haben. Insgesamt haben wir damit also

$$\sum_{n\geq 0} P(Z_n > 0) E\Delta_n \leq c_0(I_1^* + I_2^*) < \infty$$

und dadurch unter Hinweis auf Äquivalenz (4.2.3) $E\widetilde{Z}_\infty < \infty$ nachgewiesen.

Für die umgekehrte Implikation nehmen wir $E\widetilde{Z}_\infty < \infty$ an. Eine analoge Rechnung unter Verwendung von Lemma 1.0.9 und Lemma 4.2.4(b) zeigt

$$
\begin{aligned}
E\Delta_{n+1} &= c_n \sum_{k\geq 1} k \sum_{j\geq k} p_{j+1} P(Z_n = 0)^{j-k} \\
&\geq \mu^{-1} \sum_{j\geq 1} p_{j+1} \sum_{k=1}^{j} k P(Z_n = 0)^{j-k} \\
&= \mu^{-1} \sum_{j\geq 1} p_{j+1} \left(j \sum_{k=0}^{j-1} P(Z_n = 0)^k - \sum_{k=0}^{j-1} k P(Z_n = 0)^k \right) \\
&\geq \mu^{-1} \sum_{j\geq 1} p_{j+1} \left(j - \frac{j-1}{2} \right) \sum_{k=0}^{j-1} P(Z_n = 0)^k \\
&= (2\mu)^{-1} \sum_{j\geq 1} p_{j+1} (j+1) \left(\frac{1 - P(Z_n = 0)^j}{P(Z_n > 0)} \right).
\end{aligned}
$$

Weiter führen uns die Äquivalenz (4.2.3) und Lemma 4.2.5 zu

$$
\begin{aligned}
\infty &> \sum_{n\geq 0} P(Z_n > 0) E\Delta_{n+1} \\
&\geq (2\mu)^{-1} \sum_{n\geq 0} \sum_{j\geq 1} p_{j+1}(j+1) \left(1 - P(Z_n = 0)^j\right) \\
&\geq (2\mu)^{-1} \sum_{j\geq 1} p_{j+1}(j+1) \sum_{n=0}^{\alpha(j)-1} \left(1 - P(Z_n = 0)^j\right) \\
&\geq (2\mu)^{-1} \sum_{j\geq 1} p_{j+1}(j+1)\alpha(j) \left(1 - \max_{0\leq n\leq \alpha(j)-1} (\underbrace{P(Z_n = 0)}_{\leq 1-1/j})^j \right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{\gamma}{2\mu}\sum_{j\geq 2} p_{j+1}(j+1)\log j\left(1-\left(1-\frac{1}{j}\right)^j\right)\\
&\geq \frac{\gamma\gamma'}{2\mu}\sum_{j\geq 2} p_{j+1}(j+1)\log(j+1),
\end{aligned}$$

wobei $\gamma' \in (0,\infty)$ eine geeignete Konstante bezeichnet. Für die letzte Ungleichung beachte man, daß die Folge $\left(1-(1-1/j)^j\right)_{j\geq 1}$ streng positiv ist mit positivem Limes $1-e^{-1}$ und daß offenbar $\log j \simeq \log(j+1)$ für $j \to \infty$ gilt.

Die obige Abschätzung liefert uns wegen $\frac{\gamma\gamma'}{2\mu} > 0$ nun

$$\sum_{j\geq 3} p_j j \log j < \infty$$

und damit die verlangte Integrierbarkeit von $Z_1 \log^+ Z_1$. □

4.3 Kritische Galton-Watson-Prozesse

Mit der in Abschnitt 4.1 geleisteten Vorarbeit folgt nun viel einfacher als in Abschnitt 3.5 (☞ Satz 3.5.4)

4.3.1. Satz. *Gegeben einen kritischen GWP $(Z_n)_{n\geq 0}$ mit (möglicherweise unendlicher) Reproduktionsvarianz σ^2, gilt bei Beachtung der üblichen Konventionen*

$$\lim_{n\to\infty} nP(Z_n > 0) = \frac{2}{\sigma^2} \in [0,\infty).$$

Beweis. Greifen wir erneut auf Lemma 4.1.6 zurück, so erhalten wir wegen $\mu = 1$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{P(Z_n>0)} &= E(Z_n|Z_n>0)\\
&= E\widetilde{Z}_n\\
&= 1+\sum_{k=1}^n E(\widetilde{Z}_k-\widetilde{Z}_{k-1})\\
&= 1+\sum_{k=1}^n E\Delta_k,
\end{aligned}$$

so daß Lemma 4.1.6(c) und Lemma 3.5.3 nun

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nP(Z_n > 0)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E\Delta_k \right) = \frac{\sigma^2}{2} \in (0, \infty]$$

und folglich die Behauptung liefern. □

Wie bereits im Anschluß an Konstruktion 4.1.2 angekündigt, interessieren wir uns nun – gegeben $Z_n > 0$ – für den letzten gemeinsamen Vorfahren aller Individuen in Generation n. Bevor wir eine exakte Definition geben, schicken wir das folgende Lemma voraus (☞ [Bau], S. 242):

4.3.2. Lemma. *Es seien $n \geq 1$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in [0, 1]$. Dann gilt die Ungleichung*

$$\left| \prod_{k=1}^{n} \alpha_k - \prod_{k=1}^{n} \beta_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - \beta_k|.$$

Beweis. Mit $\gamma_k := \prod_{j=k}^{n} \alpha_j$, $\delta_k := \prod_{j=1}^{k} \beta_j$ für $k = 1, \ldots, n$ sowie $\gamma_{n+1} := \delta_0 := 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=1}^{n} \alpha_k - \prod_{k=1}^{n} \beta_k \right| &= |\gamma_1 \delta_0 - \gamma_{n+1} \delta_n| = \left| \sum_{i=1}^{n} (\gamma_i \delta_{i-1} - \gamma_{i+1} \delta_i) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) \gamma_{i+1} \delta_{i-1} \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|. \end{aligned}$$

□

Es seien zunächst $n \geq 0$ und $t \in \mathbb{T}$ mit $z_n(t) > 0$. Dann setzen wir

$$\theta_n(t) := \max \left\{ v \in t_{|n} : \zeta \succeq v \quad \forall \zeta \in t_n \right\}$$

und erinnern an die Notation aus Abschnitt 2.1, so daß $\theta_n(t)$ offenbar den *letzten gemeinsamen Vorfahren* aller Individuen in der n-ten Generation von t angibt. Bezeichnet weiter $(Z_n)_{n\geq 0}$ einen gewöhnlichen GWP mit zugehörigem GWB T, so setzen wir auf $\{Z_n > 0\}$

$$\Theta_n := \theta_n \circ T \qquad \text{und} \qquad G_n := \ell(\Theta_n)$$

sowie

$$\widetilde{\Theta}_n := \theta_n \circ \mathcal{T}^n \qquad \text{und} \qquad \widetilde{G}_n := \ell(\widetilde{\Theta}_n),$$

so daß G_n bzw. $\widetilde{G}_n$ die Generation angibt, in der der letzte gemeinsame Vorfahr aller Individuen der n-ten Generation von T bzw. $\mathcal{T}^n$ lebt bzw. gelebt hat. Lemma 4.1.3 liefert unmittelbar

$$P(G_n \in \cdot | Z_n > 0) = P(\widetilde{G}_n \in \cdot),$$

und $\widetilde{G}_n/n$ ist P-f.s. $[0,1]$-wertig. Wie das folgende, auf A.M. Zubkov (☞ [Zub]) zurückgehende Ergebnis zeigt, ist diese Größe im Fall $\mu = 1$ und $\sigma^2 < \infty$ sogar asymptotisch $\mathcal{R}(0,1)$-verteilt:

4.3.3. Satz. *Gegeben einen kritischen GWP $(Z_n)_{n\geq 0}$ mit endlicher Reproduktionsvarianz σ^2, gilt*

$$P(G_n/n \in \cdot | Z_n > 0) = P(\widetilde{G}_n/n \in \cdot) \xrightarrow{w} \mathcal{R}(0,1) \qquad (n \to \infty),$$

d.h. für $0 \leq u \leq 1$ besteht die Konvergenzaussage

$$\lim_{n\to\infty} P(G_n \leq nu | Z_n > 0) = u.$$

Beweis. Wir halten zunächst $n \geq 0$ fest. Wie im Anschluß an Konstruktion 4.1.2 gesehen, ist für $0 \leq k \leq n$ das kleinste Individuum in der $(n-k)$-ten Generation von $\mathcal{T}^n$ mit Nachfahren in $\mathcal{T}^n_n$ durch $(M_n, M_{n-1}, \ldots, M_{k+1})$ gegeben und hat konstruktionsgemäß $\widetilde{Z}_k = z_k \circ \mathcal{T}^k$ Nachfahren in Generation n. Speziell liefert dies unter Hinweis auf die im Anschluß an Konstruktion 4.1.2 getroffene Konvention $(M_n, \ldots, M_{n+1}) := (\emptyset)$

$$\widetilde{\Theta}_n \in \big\{(M_n, \ldots, M_{n-k+1}) : \ 0 \leq k \leq n\big\}$$

und für $0 \leq k \leq n$ die Äquivalenz

$$\widetilde{Z}_k = \widetilde{Z}_n \Longleftrightarrow (M_n, \ldots, M_{n-k+1}) \text{ ist Vorfahr aller Individuen in } \mathcal{T}^n_n,$$

also mit Blick auf die Monotonie der Folge $(\widetilde{Z}_n)_{n\geq 0}$ die Äquivalenzen

$$\begin{aligned}\widetilde{G}_n = n-k \quad &\Longleftrightarrow \quad \ell(\widetilde{\Theta}_n) = n-k \\ &\Longleftrightarrow \quad \widetilde{\Theta}_n = (M_n, \ldots, M_{k+1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad (M_n,\dots,M_{k+1}) \text{ ist Vorfahr aller Individuen in } \mathcal{T}_n^n, \\
&\qquad\ (M_n,\dots,M_{k+1},M_k) \text{ jedoch nicht} \\
&\Longleftrightarrow \quad \widetilde{Z}_k = \widetilde{Z}_n \ \text{ und } \ \widetilde{Z}_{k-1} < \widetilde{Z}_n \\
&\Longleftrightarrow \quad \eta_n := \min\{0 \le l \le n : \widetilde{Z}_l = \widetilde{Z}_n\} = k.
\end{aligned}$$

Daher gilt $\widetilde{G}_n = n - \eta_n$ und somit für $0 < u < 1$

$$P\left(\frac{G_n}{n} \le u \,\middle|\, Z_n > 0\right) = P\left(\frac{n-\eta_n}{n} \le u\right). \tag{4.3.1}$$

Wir untersuchen nun zunächst die Verteilung von η_n für $n \to \infty$: Da die Folge $(\widetilde{Z}_n)_{n\ge 0}$ nichtnegative, unabhängige Zuwächse besitzt, ergibt sich für $0 \le k \le n$

$$\begin{aligned}
P(\eta_n \le k) &= P(\widetilde{Z}_k = \widetilde{Z}_n) \\
&= P\left(\bigcap_{l=k}^{n-1} \{\widetilde{Z}_{l+1} - \widetilde{Z}_l = 0\}\right) \qquad (4.3.2) \\
&= \prod_{l=k}^{n-1} \left(1 - P(\widetilde{Z}_{l+1} > \widetilde{Z}_l)\right).
\end{aligned}$$

Führen wir als nächstes für $l \ge 0$ die Zählvariablen $J_{l+1} := \sum_{i=1}^{\Delta_{l+1}} \mathbb{1}_{\{Z_{l,i}>0\}}$ ein, so gilt offenbar $\{\widetilde{Z}_{l+1} > \widetilde{Z}_l\} = \{J_{l+1} > 0\}$ und weiter die Abschätzung

$$P(J_{l+1} = 1) \le P(\widetilde{Z}_{l+1} > \widetilde{Z}_l) \le \sum_{k\ge 1} kP(J_{l+1} = k) = EJ_{l+1}. \tag{4.3.3}$$

Genauer sehen wir unter Verwendung der Unabhängigkeit von $(\Delta_n)_{n\ge 1}$ und $(Z_{n,i})_{n,i\ge 1}$

$$\begin{aligned}
P(J_{l+1} = 1) &= \sum_{m\ge 1} P\left(\Delta_{l+1} = m, \sum_{i=1}^m \mathbb{1}_{\{Z_{l,i}>0\}} = 1\right) \\
&= \sum_{m\ge 1} P(\Delta_{l+1} = m) P\left(\sum_{i=1}^m \mathbb{1}_{\{Z_{l,i}>0\}} = 1\right) \\
&= \sum_{m\ge 1} P(\Delta_{l+1} = m) \sum_{i=1}^m P(Z_{l,i} > 0, Z_{l,j} = 0 \text{ für } j \ne i) \\
&= \sum_{m\ge 1} P(\Delta_{l+1} = m) m P(Z_l > 0) P(Z_l = 0)^{m-1}
\end{aligned}$$

und daher mit Hilfe des Satzes von der majorisierten Konvergenz und Lemma 4.1.6

$$\frac{P(J_{l+1} = 1)}{P(Z_l > 0)} = \sum_{m\ge 1} P(\Delta_{l+1} = m) m P(Z_l = 0)^{m-1} \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\sigma^2}{2} < \infty, \tag{4.3.4}$$

denn für jedes $m \geq 1$ gilt

$$\lim_{l\to\infty} P(\Delta_{l+1} = m)mP(Z_l = 0)^{m-1} = mP(\Delta_\infty = m).$$

Zudem erinnern wir an $E\Delta_\infty = \sum_{m\geq 1} mP(\Delta_\infty = m) = \frac{\sigma^2}{2} < \infty$ und die Abschätzung

$$0 \leq P(\Delta_{l+1} = m)mP(Z_l = 0)^{m-1} \leq c_0 P(\Delta_\infty = m)m,$$

die uns die Anwendung des Satzes von der majorisierten Konvergenz gestattet.

Andererseits steht uns via Lemma 4.1.6 und monotoner Konvergenz die Asymptotik

$$\begin{aligned} P(Z_l > 0)^{-1} E J_{l+1} &= P(Z_l > 0)^{-1} \sum_{m\geq 1} E\left(\mathbb{1}_{\{\Delta_{l+1}=m\}} \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}_{\{Z_{l,i}>0\}}\right) \\ &= \sum_{m\geq 1} P(\Delta_{l+1} = m)m \\ &= E\Delta_{l+1} \\ &\underset{l\to\infty}{\longrightarrow} E\Delta_\infty = \frac{\sigma^2}{2} \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

zur Verfügung, so daß uns insgesamt die Ungleichung

$$\underbrace{lP(Z_l > 0)}_{\longrightarrow \frac{2}{\sigma^2}} \underbrace{\frac{P(J_{l+1} = 1)}{P(Z_l > 0)}}_{\longrightarrow \frac{\sigma^2}{2}} \leq lP(\widetilde{Z}_{l+1} > \widetilde{Z}_l) \leq \underbrace{lP(Z_l > 0)}_{\longrightarrow \frac{2}{\sigma^2}} \underbrace{\frac{EJ_{l+1}}{P(Z_l > 0)}}_{\longrightarrow \frac{\sigma^2}{2}}$$

unter Beachtung von $\sigma^2 < \infty$ und Rückgriff auf Satz 4.3.1 sowie die Beziehungen (4.3.3), (4.3.4) und (4.3.5) zu

$$\lim_{l\to\infty} l \underbrace{P(\widetilde{Z}_{l+1} > \widetilde{Z}_l)}_{=:\varrho_l} = 1 \tag{4.3.6}$$

führt.

Gegeben $u \in (0,1)$, gilt mit $k_n := \lfloor un \rfloor$ ferner (Teleskop-Produkt)

$$\mathbb{P}_n := \prod_{l=k_n}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{l}\right) = \frac{k_n - 1}{n-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n - k_n}{k_n} = \frac{1}{u} - 1 = \frac{1-u}{u}$$

(man beachte die Ungleichung $un - 1 \leq k_n \leq un$). Daher existiert zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \geq 1$ mit

(i) $\sup_{n\geq n_0} |\mathbb{P}_n - u| \leq \frac{\varepsilon}{2}$,

(ii) $\sup_{n\geq n_0} \frac{n-k_n}{k_n} \leq \frac{1}{u}$ und

(iii) $\sup_{l\geq k_{n_0}} |1 - l\varrho_l| \leq \frac{u\varepsilon}{2}$ (man beachte Beziehung (4.3.6)).

Vermöge (4.3.2) und Lemma 4.3.2 folgt daraus für $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} |P(\eta_n \leq nu) - u| &= |P(\eta_n \leq k_n) - u| \\ &\leq \left|\prod_{l=k_n}^{n-1}(1-\varrho_l) - \mathbb{P}_n\right| + |\mathbb{P}_n - u| \\ &\leq \sum_{l=k_n}^{n-1}\left|1-\varrho_l - \left(1-\frac{1}{l}\right)\right| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \frac{1}{k_n}\underbrace{\sum_{l=k_n}^{n-1}|1-l\varrho_l|}_{\leq (n-k_n)\frac{u\varepsilon}{2}} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \underbrace{\frac{n-k_n}{k_n}}_{\leq\frac{1}{u}}\cdot\frac{u\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

so daß $\frac{\eta_n}{n}$ asymptotisch $\mathcal{R}(0,1)$-verteilt ist. Bezeichnet U eine $\mathcal{R}(0,1)$-verteilte Zufallsgröße, gilt also $\frac{\eta_n}{n} \xrightarrow{d} U$ und folglich

$$\frac{\widetilde{G}_n}{n} = 1 - \frac{\eta_n}{n} \xrightarrow{d} 1 - U \stackrel{d}{=} U \qquad (n \to \infty)$$

bei Beachtung des Satzes von Slutsky (Satz 36.12 in [Als1]). Damit ist unsere Behauptung vollständig bewiesen. □

Wir notieren noch die anschließende einfache Folgerung, die wir im nachfolgenden – und letzten – Kapitel benötigen:

Setzen wir für $n \geq 0$ in der Situation von Satz 4.3.3

$$X_n := n - G_n - 1,$$

so beschreibt offenbar $1+X_n$ den Abstand der Individuen in Generation n von ihrem letzten gemeinsamen Vorfahren, und wir können festhalten:

4.3.4. Korollar. *In der Situation von Satz 4.3.3 gilt*

$$P(X_n/n \in \cdot | Z_n > 0) \xrightarrow{w} \mathcal{R}(0,1) \qquad (n \to \infty).$$

Beweis. Die Behauptung ergibt sich aus der Rechnung

$$P\left(\frac{X_n}{n} \le t \,\middle|\, Z_n > 0\right) = P\left(\frac{\eta_n - 1}{n} \le t\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} t$$

für $t \in [0,1]$, denn wie im Beweis von Satz 4.3.3 gesehen, gilt $\frac{\eta_n}{n} \xrightarrow{d} U$ und folglich auch

$$\frac{\eta_n}{n} - \frac{1}{n} \xrightarrow{d} U \qquad (n \to \infty),$$

wobei U weiterhin uniform auf $(0,1)$ verteilt sei. □

Um die asymptotische Untersuchung kritischer GWP im Rahmen der in diesem Kapitel zugrundegelegten Sichtweise abzurunden, stellt sich die Frage nach einem alternativen Beweis von Satz 3.5.9, d.h. der Konvergenzaussage

$$P(Z_n/n \in \cdot | Z_n > 0) \xrightarrow{w} \mathrm{Exp}(2/\sigma^2) \qquad (n \to \infty)$$

im Fall $\mu = 1$ und $\sigma^2 < \infty$.

Da sich hier aber kein unmittelbar brauchbarer Ansatz aufdrängt, schließen wir dieses Kapitel ab und liefern im nächsten Kapitel einen probabilistischen Beweis nach. Dabei trennen wir uns von unserer momentanen Sichtweise und gelangen über einen anderen methodischen Zugang zum Ziel. Zwar greift dieser Zugang auf die hier entscheidende Konstruktion der Folge $(\mathcal{T}^n)_{n\ge 0}$ nicht mehr zurück, benutzt aber einige Resultate aus diesem Kapitel, beispielsweise das soeben bewiesene Korollar 4.3.4.

Kapitel 5

Ein probabilistischer Beweis des Satzes von Yaglom

Wie am Ende des vorigen Kapitels angekündigt, liefern wir in diesem Kapitel eine alternative Herleitung von Satz 3.5.9, also der Konvergenzaussage

$$P(Z_n/n \in \cdot | Z_n > 0) \xrightarrow{w} \mathrm{Exp}(2/\sigma^2) \qquad (n \to \infty),$$

sofern $\mu = 1$ und $\sigma^2 < \infty$. Dabei orientieren wir uns an der Darstellung in [Gei2] und stellen für eine geeignete Normierung Z_n^* von Z_n gegeben $Z_n > 0$ eine Rekursionsgleichung auf, mit deren Hilfe wir nachweisen, daß die Verteilung von Z_n^* in der sogenannten *Mallow-Metrik* gegen die Exponentialverteilung mit Parameter 1 konvergiert. Wichtige Ingredienzen bilden Satz 4.3.1, Korollar 4.3.4 sowie Lemma 3.5.8.

5.1 Eine Rekursionsgleichung

Für den Rest dieser Arbeit gehen wir von einem kritischen GWP $(Z_n)_{n\geq 0}$ mit endlicher Reproduktionsvarianz σ^2 aus. Ferner unterstellen wir, daß Z_n für $n \geq 0$ in der Form $Z_n = z_n \circ T$ mit einem GWB T vorliegt, und erinnern zunächst an unsere im vorigen Abschnitt (auf $\{Z_n > 0\}$) eingeführten Bezeichnungen

$$\Theta_n = \max\left\{v \in T_{|n} : \zeta \succeq v \quad \forall \zeta \in T_n\right\} = \max\left\{v \in T_{|n} : Z^v_{n-\ell(v)} = Z_n\right\},$$

wobei wir für $k \geq 0$ abkürzend $Z_k^v = z_k \circ \pi_v \circ T^v$ geschrieben haben, sowie

$$G_n = \ell(\Theta_n) \qquad \text{und} \qquad X_n := n - G_n - 1.$$

Weiter setzen wir

$$S_n := \mathbb{1}_{\{Z_n=1\}} + \mathbb{1}_{\{Z_n \geq 2\}} \sum_{m=1}^{Z_1^{\Theta_n}} \mathbb{1}_{\left\{Z_{X_n}^{(\Theta_n,m)} > 0\right\}};$$

diese Größe gibt offenbar im Fall $Z_n \geq 2$ die Anzahl der Kinder von Θ_n an, die ihrerseits Nachfahren in Generation n haben. Denken wir uns im Fall $Z_n \geq 2$ die Elemente der Menge $\left\{m : Z_{X_n}^{(\Theta_n,m)} > 0\right\}$ in der Form $d_1 < d_2 < \ldots < d_{S_n}$ geordnet, so setzen wir

$$Y_{n,j} := Z_{X_n}^{(\Theta_n,d_j)} \qquad (1 \leq j \leq S_n).$$

$Y_{n,j}$ zählt also, wieviele Individuen das j-te Kind von Θ_n, welches Nachfahren in Generation n hat, tatsächlich zur n-ten Generation beisteuert.

Abschließend vereinbaren wir $Y_{n,1} := S_n = 1$, falls $Z_n = 1$ bzw. der Vollständigkeit halber $Y_{n,1} := S_n = 0$ und $X_n := -2$, falls $Z_n = 0$.

Dann haben wir für $n \geq 1$ auf $\{Z_n > 0\}$ offenbar die Äquivalenzen

$$G_n < n \Longleftrightarrow S_n \geq 2 \Longleftrightarrow Z_n \geq 2 \Longleftrightarrow X_n \geq 0 \tag{5.1.1}$$

und

$$G_n = n \Longleftrightarrow S_n = 1 \Longleftrightarrow Z_n = 1 \Longleftrightarrow X_n = -1. \tag{5.1.2}$$

Außerdem besitzt Z_n die Zerlegung

$$Z_n = \sum_{j=1}^{S_n} Y_{n,j}, \tag{5.1.3}$$

von der wir im folgenden Gebrauch machen.

Eine erste Beobachtung bezüglich der Zufallsgrößen $Y_{n,j}$ hält dabei das folgende Lemma fest:

5.1.1. Lemma. *Es seien $n \geq 1$ und $0 \leq m \leq n-1$ sowie $k \geq 2$ mit $P(Z_1 \geq k) > 0$. Dann sind die Zufallsgrößen $Y_{n,1}, \ldots, Y_{n,k}$ gegeben $\{S_n = k, X_n = m\}$ stochastisch unabhängig und identisch verteilt mit*

$$P\left(Y_{n,1} \in \cdot | S_n = k, X_n = m\right) = P(Z_m \in \cdot | Z_m > 0) = \lambda_m.$$

Beweis. Wir setzen $D_{k,m} := \{S_n = k, X_n = m\}$ und erledigen zunächst den Fall $m \geq 1$. Indem wir dazu in nunmehr vertrauter Weise zweimalig Satz 2.3.5 anwenden, erhalten wir aus Symmetriegründen

$$\begin{aligned}
P(D_{k,m}) &= \sum_{l \geq 1} P(S_n = k, G_n = n - m - 1, Z_{n-m-1} = l) \\
&= \sum_{l \geq 1} P(Z_{n-m-1} = l) l P(Z_{m+1} = 0)^{l-1} \\
&\quad \cdot \sum_{d \geq k} p_d \binom{d}{k} P(Z_m = 0)^{d-k} P(Z_m > 0)^k,
\end{aligned}$$

und der letzte Term verschwindet wegen $P(Z_1 \geq k) = \sum_{d \geq k} p_d > 0$ offenkundig nicht. Durch eine analoge Rechnung folgt für $l_1, \ldots, l_k \geq 0$ mit $A_j := \{Y_{n,j} = l_j\}$ für $1 \leq j \leq k$

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_j \cap D_{k,m}\right) &= \sum_{l \geq 1} P(Z_{n-m-1} = l) l P(Z_{m+1} = 0)^{l-1} \\
&\quad \cdot \sum_{d \geq k} p_d \binom{d}{k} P(Z_m = 0)^{d-k} \prod_{j=1}^{k} P(Z_m = l_j).
\end{aligned}$$

Kürzen liefert nun

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} \{Y_{n,j} = l_j\} \middle| S_n = k, X_n = m\right) = \prod_{j=1}^{k} P(Z_m = l_j | Z_m > 0),$$

so daß die Behauptung sich dann durch geeignete Summationen ergibt.

Im Fall $m = 0$ gilt offensichtlich

$$D_{k,0} = \{S_n = k, G_n = n - 1\} \subset \{Y_{n,1} = \ldots = Y_{n,k} = 1\}$$

und somit

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} \{Y_{n,j} = 1\} \middle| D_{k,0}\right) = 1 = \prod_{j=1}^{k} P(Z_0 = 1 | Z_0 > 0),$$

was diesen Beweis abschließt. □

Für unsere weiteren Untersuchungen seien $((S_n^*, X_n^*))_{n \geq 1}$ eine Folge von Zufallsvektoren mit

$$P\left((S_n^*, X_n^*) \in \cdot\right) = P\left((S_n, X_n/n) \in \cdot | Z_n > 0\right) \qquad (n \geq 1) \tag{5.1.4}$$

sowie $(Z_n^*)_{n\geq 0}$ eine Folge von Zufallsgrößen mit

$$P(Z_n^* \in \cdot) = P(Z_n/a_n \in \cdot | Z_n > 0) \qquad (n \geq 0), \tag{5.1.5}$$

wobei wir an $a_n = E(Z_n | Z_n > 0) = P(Z_n > 0)^{-1}$ für $n \geq 0$ erinnern. Insbesondere gilt also $EZ_n^* = 1$ für $n \geq 0$. Ferner seien $a_{-1} := Z_{-1,1}^* := Z_{-1,2}^* := \ldots := 1$ sowie $(Z_{i,j}^*)_{i\geq 0, j\geq 1}$ eine Familie bei festem i stochastisch unabhängiger Zufallsgrößen mit

$$Z_{i,j}^* \stackrel{d}{=} Z_i^* \qquad (i \geq 0, j \geq 1),$$

die ferner unabhängig von $((S_n^*, X_n^*))_{n\geq 1}$ seien. Wir halten bereits jetzt fest, daß die $Z_{i,j}^*$ generell nicht unabhängig zu sein brauchen. Tatsächlich kommt es – bei variablem i – später wesentlich darauf an, geeignete Kopplungen zu konstruieren.

Mit diesen Bezeichnungen ist die folgende Rekursionsgleichung erfüllt:

5.1.2. Satz. *Für jedes $n \geq 1$ gelten die folgenden Aussagen:*

(a)

$$Z_n^* \stackrel{d}{=} \frac{a_{nX_n^*}}{a_n} \sum_{j=1}^{S_n^*} Z_{nX_n^*, j}^*, \tag{5.1.6}$$

wobei der Ausdruck auf der rechten Seite wegen $P\left(nX_n^* \in \{-1, \cdots, n-1\}\right) = 1$ sinnvoll ist.

(b)

$$E\left(\frac{a_{nX_n^*}}{a_n} S_n^*\right) = 1. \tag{5.1.7}$$

Beweis. (a) Für $t \in \mathbb{R}, k \geq 2$ und $0 \leq m \leq n-1$ mit $P(Z_1 \geq k) > 0$ erhalten wir unter Verwendung von Lemma 5.1.1

$$\begin{aligned}
& P\left(S_n = k, X_n = m, Z_n \leq ta_n\right) \\
= \; & P\left(S_n = k, X_n = m, \sum_{j=1}^{k} Y_{n,j} \leq ta_n\right) \\
= \; & P(S_n = k, X_n = m) \cdot P\left(\sum_{j=1}^{k} Y_{n,j} \leq ta_n \middle| S_n = k, X_n = m\right) \\
= \; & P(S_n = k, X_n = m) \cdot P\left(\sum_{j=1}^{k} a_m Z_{m,j}^* \leq ta_n\right),
\end{aligned}$$

denn offenbar bilden auch die Zufallsgrößen $a_m Z^*_{m,j}$ $(1 \le j \le k)$ unabhängige Kopien von Z_m gegeben $Z_m > 0$. Ein Blick auf Gleichung (5.1.4) zeigt zudem, daß diese Identität auch im Fall $\sum_{d \ge k} p_d = P(Z_1 \ge k) = 0$ richtig bleibt.

Kombinieren wir dies mit (5.1.1), (5.1.2), (5.1.3) und den Eigenschaften der soeben eingeführten Zufallsgrößen (beachte $Y_{n,1} = a_{-1} = Z^*_{-1,1} = 1$), so folgt für jedes reelle t wegen $a_n = P(Z_n > 0)^{-1}$

$$\begin{aligned}
P(Z^*_n \le t) &= a_n P(Z_n \in (0, ta_n]) \\
&= a_n P(S_n = 1, X_n = -1, Y_{n,1} \le ta_n) \\
&\quad + a_n \sum_{k \ge 2} \sum_{m=0}^{n-1} P\left(S_n = k, X_n = m, \sum_{j=1}^{k} Y_{n,j} \le ta_n\right) \\
&= P\left(S^*_n = 1, X^*_n = -\frac{1}{n}, \frac{a_{-1}}{a_n} Z^*_{-1,1} \le t\right) \\
&\quad + \sum_{k \ge 2} \sum_{m=0}^{n-1} P\left(S^*_n = k, X^*_n = \frac{m}{n}\right) \cdot P\left(\frac{a_m}{a_n} \sum_{j=1}^{k} Z^*_{m,j} \le t\right) \\
&= P\left(\frac{a_{nX^*_n}}{a_n} \sum_{j=1}^{S^*_n} Z^*_{nX^*_n,j} \le t\right),
\end{aligned}$$

also das Gewünschte.

(b) Da die Zufallsgrößen $(Z^*_{i,j})_{i \ge -1, j \ge 1}$ unabhängig von (S^*_n, X^*_n) sind, ergibt sich unter Verwendung von (a) aufgrund monotoner Konvergenz

$$\begin{aligned}
1 &= EZ^*_n \\
&\overset{\text{(a)}}{=} E\left(\frac{a_{nX^*_n}}{a_n} \sum_{j=1}^{S^*_n} Z^*_{nX^*_n,j}\right) \\
&= \sum_{m=-1}^{n-1} \frac{a_m}{a_n} \sum_{k \ge 1} P(S^*_n = k, X^*_n = m/n) \underbrace{\sum_{j=1}^{k} EZ^*_{m,j}}_{=k} \\
&= \sum_{k \ge 1} \sum_{m=-1}^{n-1} k \frac{a_m}{a_n} P(S^*_n = k, X^*_n = m/n) \\
&= E\left(S^*_n \frac{a_{nX^*_n}}{a_n}\right).
\end{aligned}$$

□

Die in Satz 5.1.2 aufgestellte Rekursionsgleichung ist uns noch zu unhandlich. Insbesondere stört uns, daß die Summationsgrenze S_n^* i.a. weder deterministisch vorgegeben noch beschränkt ist. Für den Rest dieses Abschnitts machen wir uns daher zum Ziel, zu einer einfacheren und dennoch aussagekräftigen Gleichung überzugehen.

Diesem Vorhaben dienen auch die beiden folgenden Lemmata.

5.1.3. Lemma. *(a) Die Folge* $\left(\frac{a_{nX_n^*}}{a_n}\right)_{n\geq 1}$ *ist asymptotisch* $\mathcal{R}(0,1)$*-verteilt.*

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} E\left(\frac{a_{nX_n^*}}{a_n}\right)^p = \frac{1}{p+1}$ *für jedes* $p \in [1,\infty)$.

Beweis. (a) Wir verwenden die Darstellung

$$\frac{a_{nX_n^*}}{a_n} = \frac{a_{nX_n^*}}{nX_n^*} \cdot \frac{n}{a_n} \cdot X_n^*. \tag{5.1.8}$$

Dazu ist folgendes anzumerken: Aufgrund von Korollar 4.3.3 ist X_n^* asymptotisch $\mathcal{R}(0,1)$-verteilt. Deshalb können wir gemäß Satz 36.9 in [Als1] o.B.d.A. annehmen, daß die Folge $(X_n^*)_{n\geq 1}$ P-f.s. gegen eine auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ definierte, $\mathcal{R}(0,1)$-verteilte Zufallsgröße U_* konvergiert. Somit gilt für P-f.a. $\omega \in \Omega$

$$\lim_{n\to\infty} nX_n^*(\omega) = \infty$$

und daher gemäß Satz 4.3.1 wegen $a_n = P(Z_n > 0)^{-1}$

$$\frac{a_{nX_n^*(\omega)}}{nX_n^*(\omega)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lim_{j\to\infty} \frac{1}{jP(Z_j > 0)} = \frac{\sigma^2}{2} \in (0,\infty).$$

Insbesondere ist der Ausdruck (5.1.8) für P-f.a. $\omega \in \Omega$ und alle hinreichend großen n wohldefiniert. Da ferner gemäß Satz 4.3.1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} nP(Z_n > 0) = \frac{2}{\sigma^2} \in (0,\infty)$$

gilt und fast sichere Konvergenz Verteilungskonvergenz impliziert, liefert der Satz von Slutsky (Satz 36.12 in [Als1])

$$\frac{a_{nX_n^*}}{a_n} = \frac{a_{nX_n^*}}{nX_n^*} \cdot \frac{n}{a_n} \cdot X_n^* \xrightarrow{d} \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{2}{\sigma^2} \cdot U_* = U_* \qquad (n \to \infty).$$

Man beachte, daß hierbei unsere einschränkende Voraussetzung $\sigma^2 < \infty$ wesentlich eingegangen ist.

(b) Wegen $nX_n^* \leq n$ liefert die Monotonie der Folge $(a_n)_{n\geq -1}$ (☞ Satz 3.4.2) die Abschätzung $0 \leq \frac{a_{nX_n^*}}{a_n} \leq 1$, so daß die gleichgradige Integrierbarkeit der Folge $\left(\left(\frac{a_{nX_n^*}}{a_n}\right)^p\right)_{n\geq 1}$ gesichert ist. Nun erzwingt eine Kombination von Teil (a) mit Korollar 50.6 in [Als1] aber die Konvergenzaussage

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\frac{a_{nX_n^*}}{a_n}\right)^p = EU_*^p = \int_0^1 u^p\, du = \frac{1}{p+1}.$$

□

Das folgende Resultat benötigen wir später nicht mehr explizit. Da es aber unser weiteres Vorgehen motiviert und zudem von eigenständigem Interesse ist, führen wir dennoch einen Beweis. Anschaulich besagt es, daß der letzte gemeinsame Vorfahr aller Individuen in Generation n auf $\{Z_n > 0\}$ asymptotisch genau zwei Kinder mit Nachfahren in Generation n besitzt:

5.1.4. Satz. *Es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n^* = 2) = 1,$$

d.h. die Folge $(S_n^*)_{n\geq 1}$ ist verteilungskonvergent mit Limes 2.

Beweis. Zunächst liefern Satz 4.3.3, Beziehung (5.1.2) und das Portmanteau-Theorem (Satz 36.13 in [Als1])

$$P(S_n^* = 1) = P(S_n = 1 | Z_n > 0) = P(G_n/n = 1 | Z_n > 0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{R}(0,1)(\{1\}) = 0.$$

Wegen $\frac{a_{nX_n^*}}{a_n} \leq 1$ für $n \geq 1$ folgt weiter

$$0 \leq E\left(S_n^* \mathbb{1}_{\{S_n^*=1\}} \frac{a_{nX_n^*}}{a_n}\right) \leq P(S_n^* = 1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{5.1.9}$$

also unter Rückgriff auf Gleichung (5.1.7)

$$E\left(S_n^* \mathbb{1}_{\{S_n^*\geq 2\}} \frac{a_{nX_n^*}}{a_n}\right) = 1 - E\left(S_n^* \mathbb{1}_{\{S_n^*=1\}} \frac{a_{nX_n^*}}{a_n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Ferner notieren wir die einfache Abschätzung

$$\begin{aligned} 1 &\geq E\left(S_n^* \mathbb{1}_{\{S_n^* \geq 2\}} \frac{a_n X_n^*}{a_n}\right) \\ &\geq 2E\left(\mathbb{1}_{\{S_n^*=2\}} \frac{a_n X_n^*}{a_n}\right) + 3E\left(\mathbb{1}_{\{S_n^* \geq 3\}} \frac{a_n X_n^*}{a_n}\right) \\ &= 3E\left(\mathbb{1}_{\{S_n^* \geq 2\}} \frac{a_n X_n^*}{a_n}\right) - E\left(\mathbb{1}_{\{S_n^*=2\}} \frac{a_n X_n^*}{a_n}\right); \end{aligned} \tag{5.1.10}$$

hier gilt vermöge Lemma 5.1.3(b) (mit $p = 1$) und Abschätzung (5.1.9)

$$3E\left(\mathbb{1}_{\{S_n^* \geq 2\}} \frac{a_n X_n^*}{a_n}\right) = 3E\left(\frac{a_n X_n^*}{a_n}\right) - 3E\left(\mathbb{1}_{\{S_n^*=1\}} \frac{a_n X_n^*}{a_n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2},$$

also im Hinblick auf (5.1.10) und Lemma 5.1.3(b)

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\mathbb{1}_{\{S_n^*=2\}} \frac{a_n X_n^*}{a_n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Diese Aussage führt uns in Verbindung mit Lemma 5.1.3(b) zur Abschätzung

$$0 \leq E\left(\mathbb{1}_{\{S_n^* \neq 2\}} \frac{a_n X_n^*}{a_n}\right) = E\left(\frac{a_n X_n^*}{a_n}\right) - E\left(\mathbb{1}_{\{S_n^*=2\}} \frac{a_n X_n^*}{a_n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d.h. die Folge $\left(\mathbb{1}_{\{S_n^* \neq 2\}} \frac{a_n X_n^*}{a_n}\right)_{n\geq 1}$ konvergiert in $\mathfrak{L}_1$ gegen 0. Via Satz 50.8 in [Als1] erhalten wir daraus

$$\mathbb{1}_{\{S_n^* \neq 2\}} \frac{a_n X_n^*}{a_n} \xrightarrow{P} 0 \qquad (n \to \infty). \tag{5.1.11}$$

Nehmen wir nun $\beta := \liminf_{n\to\infty} P(S_n^* = 2) < 1$ an, so folgt für $0 < \varepsilon < 1 - \beta$

$$\begin{aligned} P\left(\mathbb{1}_{\{S_n^* \neq 2\}} \frac{a_n X_n^*}{a_n} > \varepsilon\right) &= P\left(S_n^* \neq 2, \frac{a_n X_n^*}{a_n} > \varepsilon\right) \\ &\geq P(S_n^* \neq 2) + P\left(\frac{a_n X_n^*}{a_n} > \varepsilon\right) - 1 \\ &= P(S_n^* \neq 2) - P\left(\frac{a_n X_n^*}{a_n} \leq \varepsilon\right) \end{aligned}$$

und weiter aufgrund von

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{a_n X_n^*}{a_n} \leq \varepsilon\right) = \mathcal{R}(0,1)((0,\varepsilon]) = \varepsilon$$

(☞ Lemma 5.1.3(a)) letztlich

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} P\left(\mathbb{1}_{\{S_n^* \neq 2\}} \frac{a_n X_n^*}{a_n} > \varepsilon\right) &\geq \limsup_{n\to\infty} \left(P\left(S_n^* \neq 2\right) - P\left(\frac{a_n X_n^*}{a_n} \leq \varepsilon\right)\right) \\ &= (1-\beta) - \varepsilon > 0, \end{aligned}$$

im Widerspruch zu Beziehung (5.1.11). Daher ist $\beta = 1$ und unsere Behauptung richtig. $\square$

Im Hinblick auf Satz 5.1.4 ist es jetzt naheliegend, neben der Folge $(Z_n^*)_{n\geq 1}$ die Folge $(\bar{Z}_n)_{n\geq 1}$, definiert durch

$$\bar{Z}_n := \frac{a_{nX_n^*}}{a_n} \sum_{j=1}^{2} Z_{nX_n^*,j}^* \qquad (n \geq 1), \tag{5.1.12}$$

in unsere Untersuchung einzubeziehen. Im Prinzip wird die zufällige Summationsgrenze in Gleichung (5.1.6) also gestutzt, wobei wir jedoch auf die Tatsache hinweisen, daß S_n^* auch den Wert 1 annehmen kann.

Zudem ermöglicht Satz 5.1.4 die folgende heuristische Interpretation des zu beweisenden exponentiellen Grenzwertsatzes: Nehmen wir für den Moment an, daß Z_n^* in Verteilung gegen eine (nichtnegative) Zufallsgröße A konvergiert, so haben wir gemäß Korollar 4.3.4, Lemma 5.1.3 und Satz 5.1.4 für geeignete, unabhängige Kopien $A_1, A_2, \ldots$ von A die Konvergenzen

$$\begin{aligned} Z_{n,j}^* &\xrightarrow{d} A_j \overset{d}{=} A \qquad (j \geq 1), \\ S_n^* &\xrightarrow{d} 2, \\ X_n^* &\xrightarrow{d} U_* \end{aligned}$$

sowie

$$\frac{a_{nX_n^*}}{a_n} \xrightarrow{d} U_*$$

für $n \to \infty$, wenn U_* weiterhin die $\mathcal{R}(0,1)$-Verteilung besitzt. Setzen wir weiter voraus, daß all diese Konvergenzen sogar f.s. gültig sind (☞ Beweis von Lemma 5.1.3), so konvergiert nX_n^* f.s. gegen ∞, und der Grenzübergang $n \to \infty$ in Gleichung (5.1.6) zeigt wegen $\mathbb{1}_{\{S_n^*=2\}} \to 1$ f.s. und

$$\frac{a_{nX_n^*}}{a_n} \sum_{j=1}^{S_n^*} Z_{nX_n^*,j}^* = \frac{a_{nX_n^*}}{a_n} \sum_{k\geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n^*=k\}} \sum_{j=1}^{k} Z_{nX_n^*,j}^*,$$

daß der Limes A der Fixpunktgleichung

$$A \overset{d}{=} U_*(A_1 + A_2)$$

genügt, wobei U_*, A_1 und A_2 stochastisch unabhängig sind. Der Limes läßt sich also auffassen als Kontraktion der Summe zweier identisch verteilter, unabhängiger Zufallsgrößen mit einem unabhängigen, auf $(0, 1)$ gleichverteilten Faktor U_*. Dabei ist der Faktor U_* auf die Tatsache zurückzuführen, daß der Abstand zum letzten gemeinsamen Vorfahren aller Individuen in Generation n asymptotisch uniform verteilt ist (☞ Korollar 4.3.4), während die Größen A_i $(i = 1, 2)$ gerade dem Limes der adäquat reskalierten Nachkommenschaft derjenigen Kinder von Θ_n entsprechen, die Nachfahren zur Generation n beitragen. Asymptotisch hat Θ_n – gegeben $Z_n > 0$ – genau zwei solche Kinder (☞ Satz 5.1.4).

Wie aus Lemma 3.5.8 ersichtlich, besitzt A somit die Dirac-Verteilung in 0 oder eine Exponentialverteilung, wobei man wegen $EZ_n^* = 1$ die Hoffnung haben darf, daß A exponentialverteilt mit Erwartungswert 1 ist.

Im nächsten Abschnitt werden wir aber unabhängig von dieser a priori erfolgten Motivation beweisen, daß die Folge $(Z_n^*)_{n\geq 0}$ in Verteilung gegen die Exponentialverteilung mit Parameter 1 konvergiert.

5.2 Konvergenznachweis

Als nächstes möchten wir die Folge $(Z_n^*)_{n\geq 0}$ auf Verteilungskonvergenz untersuchen. Da eine Untersuchung der Verteilungsfunktionen oder Fourier-Transformierten auf punktweise Konvergenz hier wenig erfolgversprechend scheint, weisen wir stattdessen nach, daß die Verteilung von Z_n^* für $n \to \infty$ in einer geeigneten, noch vorzustellenden Metrik gegen die Exponentialverteilung mit Mittelwert 1 konvergiert.

Daher führen wir in Anlehnung an [Als3], Abschnitt IV.4, zunächst die Metrik ein, die uns zum Ziel bringt, und setzen für $p \geq 1$

$$\mathbb{M}_p := \left\{ \alpha : \ \alpha \text{ W-Maß auf } (\mathbb{R}, \mathbb{B}) \text{ mit } \int_{\mathbb{R}} |x|^p \, \alpha(dx) < \infty \right\}.$$

Sind ferner $\alpha, \beta \in \mathbb{M}_p$ und (X, Y) ein auf einem beliebigen Wahrscheinlichkeitsraum definierter Zufallsvektor mit der Eigenschaft, daß X die Verteilung α und Y die Verteilung β besitzt, so nennen wir den Vektor (X, Y) eine (α, β)-*Kopplung* und schreiben kurz $(X, Y) \sim (\alpha, \beta)$.

Sodann können wir die angekündigte Metrik auf $\mathbb{M}_p$ einführen, wobei wir uns auf den für uns relevanten Fall $p = 2$ beschränken:

5.2.1. Definition. Die Abbildung $d_2 : \mathbb{M}_2 \times \mathbb{M}_2 \to [0, \infty)$, definiert durch

$$d_2(\alpha, \beta) := \inf_{(X,Y)\sim(\alpha,\beta)} \left(E(X-Y)^2\right)^{1/2} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{M}_2), \tag{5.2.1}$$

heißt *Mallow-Metrik* auf $\mathbb{M}_2$.[1]

Der Abbildung d_2 (bzw. den analog auf $\mathbb{M}_p$ für $p \geq 1$ definierten Abbildungen d_p) kommt insbesondere bei der Untersuchung stochastischer Fixpunktgleichungen eine hohe Bedeutung zu (☞ [Rös1], [Rös3]), nicht zuletzt im Rahmen der asymptotischen Laufzeitanalyse von Algorithmen (☞ [Als3], Kapitel IV; [Rös2], [RR]). Für weitere Anwendungen der Mallow-Metriken weisen wir zudem auf [BF] und [Maj] hin.

5.2.2. Bemerkungen. (a) Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{M}_2$ und (X, Y) eine (α, β)-Kopplung, so gilt tatsächlich

$$E(X-Y)^2 = EX^2 + EY^2 - 2EXY < \infty,$$

da die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung $|EXY| \leq E|XY| < \infty$ impliziert.

(b) Wegen $\int_{\mathbb{R}} s^2 \operatorname{Exp}(1)(ds) = \int_0^\infty s^2 e^{-s}\, ds = 2$, wie man durch zweifache partielle Integration nachweist, gilt $\operatorname{Exp}(1) \in \mathbb{M}_2$.

(c) Unsere Voraussetzung $\sigma^2 < \infty$ sichert $P(Z_n^* \in \cdot) \in \mathbb{M}_2$ und $P\left(\bar{Z}_n \in \cdot\right) \in \mathbb{M}_2$ für jedes $n \geq 1$ (☞ Lemma 5.2.4 samt Beweis).

Bevor wir das besagte Lemma angeben, erinnern wir an den folgenden Sachverhalt: Gegeben eine Zufallsgröße Y mit Verteilungsfunktion F, so heißt die (meßbare) Abbildung $F^{-1} : (0, 1) \to \mathbb{R}$,

$$F^{-1}(y) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y\} \qquad (0 < y < 1),$$

die *Pseudo-Inverse* von F. Ist F stetig, streng monoton wachsend und somit invertierbar, so stimmt die Pseudo-Inverse von F offenbar mit der gewöhnlichen Inversen

[1] Daß diese Bezeichnung sinnvoll ist, wird Lemma 5.2.3 rechtfertigen.

überein. Für jede $\mathcal{R}(0,1)$-verteilte Zufallsgröße U gilt gemäß Lemma 36.8 in [Als1] ferner die Verteilungsidentität

$$Y' := F^{-1}(U) \stackrel{d}{=} Y; \tag{5.2.2}$$

ein solches Y' bezeichnen wir daher auch als *Kopie* von Y.

Die Aussage (5.2.2) wird von Teil (b) des folgenden Lemmas in der von uns benötigten Form verschärft:

5.2.3. Lemma. *(a) Die Abbildung d_2 ist eine Metrik auf $\mathbb{M}_2$.*

(b) Zu vorgegebenen $\alpha, \beta \in \mathbb{M}_2$ existiert eine (α,β)-Kopplung (X_0, Y_0) mit der Eigenschaft

$$d_2^2(\alpha,\beta) = E(X_0 - Y_0)^2,$$

d.h. das Infimum in der definierenden Gleichung (5.2.1) wird angenommen. Genauer gilt: Bezeichnen F und G die Verteilungsfunktionen von α bzw. β sowie U eine auf einem beliebigen Wahrscheinlichkeitsraum definierte, $\mathcal{R}(0,1)$-verteilte Zufallsgröße, so besteht die Identität

$$d_2^2(\alpha,\beta) = E\left(F^{-1}(U) - G^{-1}(U)\right)^2 = \int_{(0,1)} \left(F^{-1}(u) - G^{-1}(u)\right)^2 \boldsymbol{\lambda}(du). \tag{5.2.3}$$

(c) Ist $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{M}_2$, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $\lim_{n\to\infty} d_2(\alpha_n, \alpha_0) = 0$

(ii) $\alpha_n \xrightarrow{w} \alpha_0 \quad (n \to \infty)$ *und* $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} x^2\, \alpha_n(dx) = \int_{\mathbb{R}} x^2\, \alpha_0(dx)$.

Beweis. Wir verzichten auf eine eigene Ausführung der Details und verweisen stattdessen auf [Als3], Kapitel IV, Abschnitt 4. □

Lemma 5.2.3 hat uns die Tür zum Nachweis der Verteilungskonvergenz von $(Z_n^*)_{n\geq 1}$ bereits ein Stück weit geöffnet, denn Teil (c) besagt ja gerade, daß Konvergenz in der Mallow-Metrik gegen die Exponentialverteilung mit Mittelwert 1 eine hinreichende Bedingung für die Verteilungskonvergenz gegen selbige darstellt. Daraufhin setzen wir für $n \geq 0$

$$b_n := d_2^2 \left(P^{Z_n^*}, \mathrm{Exp}(1)\right) \tag{5.2.4}$$

sowie $b_{-1} := b_0$ und haben zu zeigen, daß $(b_n)_{n \geq -1}$ eine Nullfolge bildet. Einige erste Schritte in diese Richtung gliedern wir in das folgende Lemma aus:

5.2.4. Lemma. *Mit der soeben eingeführten Bezeichnung gilt*

$$\lim_{n\to\infty} d_2^2 \left(P^{\bar{Z}_n}, P^{Z_n^*}\right) = 0 \tag{5.2.5}$$

sowie

$$L := \sup_{n\geq 0} b_n < \infty \qquad \textit{und} \qquad M := \sup_{n \geq 0} d_2^2 \left(P^{\bar{Z}_n}, \mathrm{Exp}(1)\right) < \infty. \tag{5.2.6}$$

Beweis. Zunächst weisen wir

$$\lim_{n\to\infty} EZ_n^{*2} = \lim_{n\to\infty} E\bar{Z}_n^2 = \lim_{n\to\infty} E\left(Z_n^*\bar{Z}_n\right) = 2$$

nach, wozu wir für $n \geq 0$ als erstes die Identitäten $EZ_n^* = 1$, $a_n^{-1} = P(Z_n > 0)$ und $EZ_n^2 = 1 + n\sigma^2$ (☞ Satz 1.0.5(e)) notieren. Daraus folgt

$$EZ_n^{*2} = a_n^{-2}E(Z_n^2|Z_n > 0) = P(Z_n > 0)(1 + n\sigma^2) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2,$$

wobei wir von Satz 4.3.1 sowie der Tatsache $\lim_{n\to\infty} P(Z_n > 0) = 0$ Gebrauch gemacht haben.

Wegen $a_{-1} = Z_{-1,1}^* = Z_{-1,2}^* = 1$ und $a_n \uparrow \infty$ ergibt sich offenbar $E\left(\bar{Z}_n^2 \mathbb{1}_{\{X_n^* = -1/n\}}\right) = o(1)$ und weiter unter Verwendung der o.a. Identitäten

$$E\left(\bar{Z}_n^2 \mathbb{1}_{\{X_n^* \geq 0\}}\right) = \sum_{m=0}^{n-1} P\left(X_n^* = m/n\right) (a_m/a_n)^2 E\left(Z_{m,1}^* + Z_{m,2}^*\right)^2 = 2(I_n + J_n) \tag{5.2.7}$$

mit

$$I_n := \sum_{m=0}^{n-1} P\left(X_n^* = m/n\right) (a_m/a_n)^2 EZ_{m,1}^* \cdot EZ_{m,2}^*$$

und

$$\begin{aligned} J_n : &= \sum_{m=0}^{n-1} P\left(X_n^* = m/n\right)(a_m/a_n)^2 E Z_m^{*\,2} \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} P\left(X_n^* = m/n\right)(a_m/a_n)^2 P(Z_m > 0)(1+\sigma^2 m). \end{aligned}$$

Genauer gilt hier

$$I_n = \sum_{m=0}^{n-1} P\left(X_n^* = m/n\right)(a_m/a_n)^2 = E\left(\frac{a_{nX_n^*}}{a_n}\right)^2 \cdot \mathbb{1}_{\{X_n^* \geq 0\}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$$

gemäß Lemma 5.1.3. Um nun $\lim_{n\to\infty} E\bar{Z}_n^2 = 2$ einzusehen, haben wir im Hinblick auf (5.2.7) nur noch $\lim_{n\to\infty} J_n = 2/3$ zu verifizieren: Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ existiert – wie oben begründet – ein $n_0 \geq 1$ mit

$$\sup_{n \geq n_0} |P(Z_n > 0)(1+n\sigma^2) - 2| \leq \varepsilon.$$

Dies liefert für $n > n_0$ wegen $a_n \uparrow \infty$

$$J_n \leq o(1) + \sum_{m=n_0}^{n-1} P\left(X_n^* = m/n\right)(a_m/a_n)^2(2+\varepsilon)$$

und folglich mit Lemma 5.1.3(b)

$$\limsup_{n\to\infty} J_n \leq (2+\varepsilon) \lim_{n\to\infty} E\left(\frac{a_{nX_n^*}}{a_n}\right)^2 = \frac{2+\varepsilon}{3}$$

für jedes $\varepsilon > 0$, d.h. $\limsup_{n\to\infty} J_n \leq 2/3$. Da sich analog $\liminf_{n\to\infty} J_n \geq 2/3$ bestätigen läßt, folgt die zweite asymptotische (Hilfs-)Aussage.

Unter Verwendung des bisher Gezeigten, Beziehung (5.1.1) und $a_n \uparrow \infty$ folgt nun

$$\begin{aligned} E\left(\bar{Z}_n Z_n^*\right) &\geq E\left(\mathbb{1}_{\{X_n^* \geq 0\}} \bar{Z}_n Z_n^*\right) \\ &= E\left(\mathbb{1}_{\{S_n^* \geq 2\}} \bar{Z}_n Z_n^*\right) \\ &\geq E\left(\mathbb{1}_{\{S_n^* \geq 2\}} \bar{Z}_n\right)^2 \qquad (5.2.8) \\ &= E\bar{Z}_n^2 + o(1) \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2, \end{aligned}$$

denn auf $\{S_n^* \geq 2\}$ gilt $Z_n^* \geq \bar{Z}_n$. Weiter ergibt sich unter Verwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} 2 \leq \liminf_{n\to\infty} E\left(\bar{Z}_n Z_n^*\right) &\leq \limsup_{n\to\infty} E\left(\bar{Z}_n Z_n^*\right) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \left(E\bar{Z}_n^2 \cdot EZ_n^{*2}\right)^{1/2} = 2, \end{aligned}$$

also

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\bar{Z}_n Z_n^*\right) = 2.$$

Nach diesen vorbereitenden Rechnungen resultiert nun laut Definition der Mallow-Metrik unmittelbar

$$d_2^2\left(P^{Z_n^*}, P^{\bar{Z}_n}\right) \leq E\left(Z_n^* - \bar{Z}_n\right)^2 = EZ_n^{*2} + E\bar{Z}_n^2 - 2E\left(\bar{Z}_n Z_n^*\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Bezeichnet außerdem hier und im folgenden A eine auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ definierte Zufallsgröße mit $P(A \in \cdot) = \mathrm{Exp}(1)$, so erhalten wir aufgrund der Nichtnegativität von A und Z_n^* mit Bemerkung 5.2.2(b) und $C := \sup_m EZ_m^{*2} < \infty$ laut Definition der Mallow-Metrik

$$b_n \leq E\left(Z_n^* - A\right)^2 \leq EA^2 + EZ_n^{*2} \leq 2 + C < \infty \qquad (n \geq 1),$$

also die Endlichkeit von L. Die Endlichkeit von M ergibt sich schließlich durch eine analoge Argumentation. □

Mit Lemma 5.2.4 im Rücken zeigen wir nun

5.2.5. Satz. *Es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} d_2\left(P^{Z_n^*}, \mathrm{Exp}(1)\right) = 0,$$

speziell also

$$Z_n^* \xrightarrow{d} \mathrm{Exp}(1) \qquad (n \to \infty).$$

Beweis. Bisher haben wir über die Zufallsvariablen $(Z_{i,j}^*)_{i\geq 0, j\geq 1}$, A und $(X_n^*)_{n\geq 1}$ nur wenig vorausgesetzt. Die Idee dieses Beweises besteht nun darin, die Analyse durch „explizite“ Kopien mit starker „Kopplung“ voranzubringen: Dazu seien U_0, U_1, U_2 auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ definierte, stochastisch unabhängige, $\mathcal{R}(0,1)$-verteilte Zufallsgrößen.

Beachten wir unsere Ausführungen vor Lemma 5.2.3, bezeichnen für $n \geq 0$ die Verteilungsfunktionen von Z_n^*, X_{n+1}^*, U_0 bzw. A mit F_n^*, Ψ_{n+1}^*, G bzw. H und setzen

$$Z'_{n,j} := F_n^{*-1}(U_j) \stackrel{d}{=} Z_n^*,$$

$$A_j := H^{-1}(U_j) \stackrel{d}{=} A$$

sowie

$$X'_{n+1} := \Psi_{n+1}^{*-1}(U_0) \stackrel{d}{=} X_{n+1}^*$$

für $n \geq 0$, $j \in \{1,2\}$, so gilt wegen $G(s) = s\mathbb{1}_{(0,1)}(s) + \mathbb{1}_{[1,\infty)}(s)$ offenbar $G^{-1}(U_0) = U_0$ f.s. und daher im Hinblick auf Lemma 5.2.3(b)

$$b_n = d_2^2\left(P^{Z_n^*}, \mathrm{Exp}(1)\right) = E\left(Z'_{n,j} - A_j\right)^2 \qquad (j = 1,2). \tag{5.2.9}$$

Ferner gilt nach Konstruktion der obigen Kopien wegen $X_n^* \xrightarrow{d} U_0$ (☞ Lemma 5.1.3(a)) und Satz 36.9 in [Als1] samt Beweis

$$X'_n \xrightarrow{f.s.} U_0 \qquad (n \to \infty)$$

sowie in Analogie zum Beweis von Lemma 5.1.3(a)

$$\frac{a_{nX'_n}}{a_n} = \frac{a_{nX'_n}}{nX'_n} \cdot \frac{n}{a_n} \cdot X'_n \xrightarrow{f.s.} \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{2}{\sigma^2} \cdot U_0 = U_0 \qquad (n \to \infty). \tag{5.2.10}$$

Da die Folge $\left(\left(\frac{a_{nX'_n}}{a_n}\right)^2\right)_{n\geq 1}$ laut Lemma 5.1.3 gleichgradig integrierbar ist, folgt mit Satz 50.8 in [Als1] unmittelbar

$$\delta_n := E\left(\frac{a_{nX'_n}}{a_n} - U_0\right)^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{5.2.11}$$

Aufgrund der Dreiecksungleichung für d_2 und Lemma 5.2.6 erhalten wir

$$\sqrt{b_n} = d_2\left(P^{Z_n^*}, \mathrm{Exp}(1)\right) \leq o(1) + d_2\left(P^{\bar{Z}_n}, \mathrm{Exp}(1)\right)$$

und somit wegen $M = \sup_n d_2^2\left(P^{\bar{Z}_n}, \mathrm{Exp}(1)\right) < \infty$ auch

$$0 \leq b_n \leq o(1) + d_2^2\left(P^{\bar{Z}_n}, \mathrm{Exp}(1)\right). \tag{5.2.12}$$

Beachten wir die Tatsache, daß bei festem $n \geq 1$ einerseits die Zufallsgrößen $Z'_{n,1}$, $Z'_{n,2}$ und X'_n sowie andererseits U_0, A_1, A_2 nach Konstruktion stochastisch unabhängig sind, so liefern ein Blick auf Gleichung (5.1.12) und eine Anwendung von Lemma 3.5.8(b) die Verteilungsaussagen

$$\bar{Z}_n \stackrel{d}{=} \frac{a_{nX'_n}}{a_n} \sum_{j=1}^{2} Z'_{nX'_n,j} \qquad \text{und} \qquad P^{U_0(A_1+A_2)} = P^A = \mathrm{Exp}(1)$$

für $n \geq 1$ und damit unter Verwendung von (5.2.12) und der Definition der Mallow-Metrik weiter

$$\begin{aligned} b_n &\leq o(1) + d_2^2\left(P^{\bar{Z}_n}, \mathrm{Exp}(1)\right) \\ &\leq o(1) + E\left(\frac{a_{nX'_n}}{a_n} \sum_{j=1}^{2} Z'_{nX'_n,j} - U_0 \sum_{j=1}^{2} A_j\right)^2 \qquad (5.2.13) \\ &= o(1) + E\left(\frac{a_{nX'_n}}{a_n} Z'_{nX'_n,1} - U_0 A_1\right)^2 + E\left(\frac{a_{nX'_n}}{a_n} Z'_{nX'_n,2} - U_0 A_2\right)^2 \\ &\quad +2E\left(\frac{a_{nX'_n}}{a_n} Z'_{nX'_n,1} - U_0 A_1\right) \cdot \left(\frac{a_{nX'_n}}{a_n} Z'_{nX'_n,2} - U_0 A_2\right). \end{aligned}$$

Für den Term in der letzten Zeile gilt dabei nach Wahl der obigen Kopien wegen $EA_j = EZ'_{n,j} = 1$, Beziehung (5.2.11) und der Unabhängigkeit der gleichverteilten Zufallsgrößen U_0, U_1, U_2

$$\begin{aligned} & 2E\left(\frac{a_{nX'_n}}{a_n} Z'_{nX'_n,1} - U_0 A_1\right) \cdot \left(\frac{a_{nX'_n}}{a_n} Z'_{nX'_n,2} - U_0 A_2\right) \\ = \; & 2E\left(U_0^2 A_1 A_2\right) + 2E\left(\left(\frac{a_{nX'_n}}{a_n}\right)^2 Z'_{nX'_n,1} Z'_{nX'_n,2}\right) \\ & -2E\left(\frac{a_{nX'_n}}{a_n} Z'_{nX'_n,1} U_0 A_2\right) - 2E\left(\frac{a_{nX'_n}}{a_n} Z'_{nX'_n,2} U_0 A_1\right) \\ = \; & 2EU_0^2 \cdot (EA_1)^2 + 2 \sum_{m=-1}^{n-1} P(X'_n = m/n)(a_m/a_n)^2 \cdot EZ'_{m,1} \cdot EZ'_{m,2} \\ & -2 \sum_{m=-1}^{n-1} (a_m/a_n) E\left(\mathbb{1}_{\{X'_n = m/n\}} U_0\right) \cdot EZ'_{m,1} \cdot EA_2 \\ & -2 \sum_{m=-1}^{n-1} (a_m/a_n) E\left(\mathbb{1}_{\{X'_n = m/n\}} U_0\right) \cdot EZ'_{m,2} \cdot EA_1 \\ = \; & 2EU_0^2 + 2E\left(\frac{a_{nX'_n}}{a_n}\right)^2 - 4E\left(\frac{a_{nX'_n}}{a_n} U_0\right) \\ = \; & 2E\left(\frac{a_{nX'_n}}{a_n} - U_0\right)^2 \\ = \; & 2\delta_n = o(1). \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen reduziert sich Abschätzung (5.2.13) also zu

$$
\begin{aligned}
b_n &\le o(1) + 2E\left(\frac{a_{nX'_n}}{a_n} Z'_{nX'_n,1} - U_0 A_1\right)^2 \\
&= o(1) + 2E\left(\frac{a_{nX'_n}}{a_n}\left(Z'_{nX'_n,1} - A_1\right) + A_1\left(\frac{a_{nX'_n}}{a_n} - U_0\right)\right)^2 \qquad (5.2.14) \\
&= o(1) + 2E\left(\frac{a_{nX'_n}}{a_n}\left(Z'_{nX'_n,1} - A_1\right)\right)^2 + 2E\left(A_1\left(\frac{a_{nX'_n}}{a_n} - U_0\right)\right)^2 \\
&\quad +4E\left(\frac{a_{nX'_n}}{a_n}\left(Z'_{nX'_n,1} - A_1\right) A_1\left(\frac{a_{nX'_n}}{a_n} - U_0\right)\right).
\end{aligned}
$$

Dabei schließen wir wegen $EA_1^2 = 2$ (☞ Bemerkung 5.2.2(b)) aus der Unabhängigkeit von U_0 und U_1 genauer

$$
E\left(A_1\left(\frac{a_{nX'_n}}{a_n} - U_0\right)\right)^2 = EA_1^2 \cdot E\left(\frac{a_{nX'_n}}{a_n} - U_0\right)^2 = 2\delta_n = o(1) \qquad (5.2.15)
$$

sowie daraus unter Berücksichtigung von Lemma 5.2.4 mit $L = \sup_{k\ge 1} b_k < \infty$ vermöge der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$
\begin{aligned}
&E\left(\frac{a_{nX'_n}}{a_n}\left(Z'_{nX'_n,1} - A_1\right) A_1\left(\frac{a_{nX'_n}}{a_n} - U_0\right)\right) \\
\le\ &\left(E\left(A_1\left(\frac{a_{nX'_n}}{a_n} - U_0\right)\right)^2\right)^{1/2} \cdot \left(E\left(\frac{a_{nX'_n}}{a_n}\left(Z'_{nX'_n,1} - A_1\right)\right)^2\right)^{1/2} \qquad (5.2.16) \\
\le\ &(2\delta_n L)^{1/2} = o(1),
\end{aligned}
$$

denn

$$
\begin{aligned}
E\left(\frac{a_{nX'_n}}{a_n}\left(Z'_{nX'_n,1} - A_1\right)\right)^2 &\le \sum_{m=-1}^{n-1} P(X'_n = m/n)\, \underbrace{E(Z'_{m,1} - A_1)^2}_{=b_m \le L} \\
&\le L \sum_{m=-1}^{n-1} P(X'_n = m/n) = L.
\end{aligned}
$$

Ergo erhalten wir aus (5.2.14), (5.2.15) und (5.2.16)

$$
\begin{aligned}
b_n &\le o(1) + 2E\left(\frac{a_{nX'_n}}{a_n}\left(Z'_{nX'_n,1} - A_1\right)\right)^2 \\
&= o(1) + 2\sum_{m=-1}^{n-1} P(X'_n = m/n)(a_m/a_n)^2 \cdot E(Z'_{m,1} - A_1)^2 \qquad (5.2.17) \\
&= o(1) + 2\sum_{m=-1}^{n-1} P(X'_n = m/n)(a_m/a_n)^2 b_m.
\end{aligned}
$$

Ist nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so existiert nach Definition von b ein $n_0 \geq 1$ mit der Eigenschaft $\sup_{n \geq n_0} b_n \leq b + \varepsilon$. Aufgrund der einfachen Abschätzung

$$\sum_{m=-1}^{n_0-1} P(X'_n = m/n)(a_m/a_n)^2 b_m \leq a_{n_0-1}^2 \cdot P(Z_n > 0)^2 \cdot \max_{1 \leq i \leq n_0-1} b_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

für die $a_n^{-1} = P(Z_n > 0) = o(1)$ zu beachten ist, verschärft sich folglich (5.2.17) für $n > n_0$ zu

$$\begin{aligned} b_n &\leq o(1) + 2 \sum_{m=n_0}^{n-1} P(X'_n = m/n)(a_m/a_n)^2 b_m \\ &\leq o(1) + 2(b+\varepsilon) \sum_{m=-1}^{n-1} P(X'_n = m/n)(a_m/a_n)^2 \qquad (5.2.18) \\ &= o(1) + 2(b+\varepsilon) E \left(\frac{a_{nX'_n}}{a_n} \right)^2 . \end{aligned}$$

Da der Term in der letzten Zeile gemäß Lemma 5.1.3 (oder alternativ aufgrund von Aussage (5.2.10) und majorisierter Konvergenz) den Limes

$$2(b+\varepsilon) E U_0^2 = 2(b+\varepsilon) \int_0^1 u^2 \, du = \frac{2(b+\varepsilon)}{3}$$

besitzt, impliziert (5.2.18)

$$b = \limsup_{n\to\infty} b_n \leq 2(b+\varepsilon)/3,$$

also $b \leq 2b/3$ durch Grenzübergang $\varepsilon \downarrow 0$. Somit haben wir $b = 0$ erkannt, weil b gemäß Lemma 5.2.6 endlich ist. Insgesamt haben wir also

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} d_2^2 \left(P^{Z_n^*}, \mathrm{Exp}(1) \right) = 0$$

nachgewiesen, und für die behauptete Verteilungskonvergenz bedarf es nur noch eines Hinweises auf Lemma 5.2.3(c). □

Als einfache Folgerung erhalten wir abschließend wie angestrebt einen Beweis von Satz 3.5.9:

5.2.6. Satz. *Bezeichnet* $(Z_n)_{n\geq 0}$ *einen kritischen GWP mit Reproduktionsvarianz* $\sigma^2 < \infty$, *so ist* Z_n/n *gegeben* $Z_n > 0$ *asymptotisch exponentialverteilt mit Mittelwert* $\sigma^2/2$, *d.h. für jedes* $t \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(Z_n/n \leq t | Z_n > 0\right) = \left(1 - \exp\left(-2t/\sigma^2\right)\right) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t).$$

Beweis. Wie in Satz 5.2.5 gesehen, gilt

$$Z_n^* \xrightarrow{d} A \qquad (n \to \infty),$$

wenn A weiterhin eine Exp(1)-verteilte Zufallsgräße bezeichnet. Daraufhin folgt mit $\lim_{n\to\infty} a_n/n = \sigma^2/2$ (☞ Satz 4.3.1) und dem Satz von Slutsky (Satz 36.12 in [Als1])

$$\frac{a_n}{n} \cdot Z_n^* \xrightarrow{d} \frac{\sigma^2}{2} \cdot A \qquad (n \to \infty).$$

Gemäß Satz 31.4 in [Als1] ist die Zufallsgröße auf der rechten Seite wiederum exponentialverteilt, aber mit dem Parameter $2/\sigma^2$. Dies impliziert schließlich

$$P(Z_n/n \leq t | Z_n > 0) = P\left(a_n Z_n^*/n \leq t\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \left(1 - \exp\left(-2t/\sigma^2\right)\right) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)$$

für jedes reelle t, da die Abbildung auf der rechten Seite mit der Verteilungsfunktion der Exp$(2/\sigma^2)$-Verteilung übereinstimmt und eine stetige Funktion von t bildet. Das zeigt die behauptete Verteilungskonvergenz. □

Abbildungsverzeichnis

Verzeichnis ausgewählter Symbole

I. Allgemeine Grundlagen

$o(1)$	geeignete Nullfolge
$a_n \simeq b_n$	$\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$
$\lceil x \rceil$	kleinste ganze Zahl $\geq x$
$\lfloor x \rfloor$	größte ganze Zahl $\leq x$
$x \wedge y$	Minimum von x und y
x^+	Postivteil von x, Maximum von x und 0
$\mathbb{N}^2_\leq$	Menge der $(j,k) \in \mathbb{N}^2$ mit $j \leq k$
F^{-1}	Pseudo-Inverse der Verteilungsfunktion F
$X \stackrel{d}{=} Y$	X besitzt dieselbe Verteilung wie Y
$\alpha \ll \beta$	α ist β-stetig
$\alpha \perp \beta$	α und β sind zueinander singulär
$\|\alpha - \beta\|$	Totalvariation der W-Maße α und β
$(X,Y) \sim (\alpha,\beta)$	X besitzt Verteilung α, Y Verteilung β
$\widehat{\alpha}$	Größenverzerrung des W-Maßes α
$\mathbb{M}_p$	Menge der p-fach integrierbaren W-Maße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$
d_p	Mallow-Metrik auf $\mathbb{M}_p$
$\xrightarrow{f.s.}$	f.s. konvergent
$\xrightarrow{P}$	konvergent in Wahrscheinlichkeit
$\xrightarrow{d}$	verteilungskonvergent
$\xrightarrow{w}$	schwach konvergent
$\xrightarrow{v}$	vag konvergent
$\xrightarrow{\mathfrak{L}_1}$	$\mathfrak{L}_1$-konvergent
δ_x	Dirac-Maß in x

$\mathrm{Exp}(\beta)$	Exponentialverteilung mit Parameter $\beta \in (0,\infty)$
$\mathcal{R}(0,1)$	Rechteckverteilung auf dem Intervall $(0,1)$
$\Gamma(\alpha,\beta)$	Gammaverteilung mit Parametern $\alpha,\beta \in (0,\infty)$
$\boldsymbol{\lambda}$	Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R},\mathcal{B})$

II. Galton-Watson-Prozesse

$(Z_n)_{n\geq 0}, (\zeta_n^{i,k})_{n\geq 0}$	Galton-Watson-Prozeß, wobei $i,k \geq 1$
$(p_j)_{j\geq 0}$	Reproduktionsverteilung eines GWP
Γ_n	Verteilung von Z_n
μ, σ^2	Reproduktionsmittel bzw. Reproduktionsvarianz
f, f_n	erzeugende Funktion von Z_1 bzw. Z_n
q	Aussterbewahrscheinlichkeit
$\alpha(k)$	kleinste natürliche Zahl l mit $P(Z_l > 0) < 1/k$
W_n	Z_n/μ^n, Normierung von Z_n
W	f.s. Limes von $(W_n)_{n\geq 0}$
c_n	$P(Z_n > 0)/P(Z_{n+1} > 0)$
λ_n	Verteilung von Z_n gegeben $Z_n > 0$
κ_n	Verteilung von Z_n/n gegeben $Z_n > 0$
a_n	$E(Z_n \mid Z_n > 0) = \mu^n/P(Z_n > 0)$
x_n	a_n^{-1}
$(\Xi_n)_{n\geq 0}, (\widetilde{\Xi}_n)_{n\geq 0}$	Galton-Watson-Prozeß mit Immigration

III. Bäume und Galton-Watson-Bäume

$(\emptyset)$	Baumwurzel
$\mathcal{N} = \{(\emptyset)\} \cup \bigcup_{n\geq 1} \mathbb{N}^n$	Menge der möglichen Markierungen
$\ell(v)$	Länge und Generation des Individuums v
$v < w$	v ist kleiner bzw. älter als w
$v \preceq w$	v ist Vorfahr von w
$T = \bigcup_{n\geq 0} T_n$	Galton-Watson-Baum
$\mathbb{T}$	Wertebereich von T, Menge der lokal endlichen Bäume t
$\mathfrak{T}$	σ-Algebra auf $\mathbb{T}$

$\mathcal{E} = \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{E}_n$	$\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathfrak{T}$
$\mathbf{Q}$	Verteilung von T
$\mathbf{Q}_n$	Verteilung von T gegeben $Z_n > 0$
$\mathbf{Q}'_n$	Verteilung von T gegeben $Z_n = 0$
t_n	n-te Generation von t
$t_{\vert n}$	die ersten n Generationen von t
$z_n(t)$	$\vert t_n\vert$, Größe der n-ten Generation von t
$[t]_n$	Menge der Bäume, die in den ersten n Generationen mit t übereinstimmen
$H(t)$	Höhe von t
$\mathbb{T}_n$	Menge der Bäume mit Höhe n
t^ξ	Individuen in t, die von ξ abstammen
π_ξ	zu $\xi \in \mathcal{N}$ gehöriger Shiftoperator
$t(i)$	$\pi_i(t^i)$, i-ter geshifteter Teilbaum von t
$Z_{n-1}(i)$	Anzahl der Nachfahren von $i \in T_1$ in T_n
ξ_n	kleinstes Individuum in T_1 mit Nachfahren in T_n
$\mathcal{H}_n = Z_{n-1}(\xi_n)$	Anzahl der Nachfahren von ξ_n in T_n
$T^{n,i}$	Kopie von T
$Z_{n,i} = z_n \circ T^{n,i}$	Kopie von Z_n
$\mathcal{T}^n$	Kopie von T gegeben $Z_n > 0$
$\widetilde{Z}_n = z_n \circ \mathcal{T}^n$	Kopie von Z_n gegeben $Z_n > 0$
$\theta_n(t)$	letzter gemeinsamer Vorfahr aller Individuen in t_n
$\Theta_n = \theta_n \circ T$	letzter gemeinsamer Vorfahr aller Individuen in T_n
$G_n = \ell(\Theta_n)$	Generation von Θ_n
X_n	-1+ Abstand der Individuen in T_n zu Θ_n
S_n	Anzahl der Kinder von Θ_n mit Nachfahren in Generation n
$Z_n^*, Z_{n,j}^*$	Kopie von Z_n/a_n gegeben $Z_n > 0$
(S_n^*, X_n^*)	Kopie von $(S_n, X_n/n)$ gegeben $Z_n > 0$

IV. Größenverzerrte Galton-Watson-Bäume

$(\widehat{T}, (V_n)_{n\geq 0})$	größenverzerrter Galton-Watson-Baum mit Rückgrat

$\mathbb{V}$	Wertebereich von $V = (V_n)_{n\geq 0}$
$\mathfrak{V}$	σ-Algebra auf $\mathbb{V}$
$\widehat{\mathbf{Q}}_*$	Verteilung von $(\widehat{T}, V)$
$\widehat{\mathbf{Q}}$	Verteilung von $\widehat{T}$
$[t;\varrho]_n$	Menge der Paare $(t', (v_n)_{n\geq 0}) \in \mathbb{T} \times \mathbb{V}$ mit $t' \in [t]_n$ und $v_n = \varrho$
$\widehat{Z}_n$	$\lvert\widehat{T}_n\rvert$, zugleich Größenverzerrung von Z_n
$\widehat{Z}_n^\zeta$	Anzahl der Nachfahren von ζ in $\widehat{T}_{n+\ell(\zeta)}$

Abkürzungsverzeichnis

e.F.	erzeugende Funktion
f.a.	fast alle
f.s.	fast sicher
GWB	Galton-Watson-Baum
GWP	Galton-Watson-Prozeß
GWPI	Galton-Watson-Prozeß mit Immigration
o.B.d.A.	ohne Beschränkung der Allgemeinheit
u.i.v.	unabhängig und identisch verteilt
u.o.	unendlich oft

Literaturverzeichnis

[Als1] ALSMEYER, G. *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Skripten zur Mathematischen Statistik, Nr. 30, Universität Münster (1998).

[Als2] ALSMEYER, G. *Stochastische Prozesse, Teil I.* Skripten zur Mathematischen Statistik, Nr. 33, Universität Münster (2000).

[Als3] ALSMEYER, G. *Verzweigungsprozesse.* Universität Münster (2001).

[AH] ASMUSSEN, S. und HERING, H. *Branching Processes.* Birkhäuser, Boston (1983).

[AN] ATHREYA, K.B. und NEY, P. *Branching Processes.* Springer, New York (1972).

[Bau] BAUER, H. *Wahrscheinlichkeitstheorie (4. Auflage).* De Gruyter, Berlin (1990).

[BF] BICKEL, P. und FREEDMAN, D.A. Some asymptotic theory for the bootstrap. *Ann. Statist.* **9**, 1196-1217 (1981).

[CT] CHOW, Y.S. und TEICHER, H. *Probability Theory. Independence, Interchangeability, Martingales.* Springer, New York (1978).

[Els] ELSTRODT, J. *Maß- und Integrationstheorie.* Springer, Berlin (1996).

[For2] FORSTER, O. *Analysis 2. Differentialrechnung im* $\mathbb{R}^n$*. Gewöhnliche Differentialgleichungen (5. Auflage).* Vieweg, Braunschweig (1984).

[Gei1] GEIGER, J. Elementary new proofs of classical limit theorems for Galton-Watson processes. *J. Appl. Prob.* **36**, 301-309 (1999).

[Gei2] GEIGER, J. A new proof of Yaglom's exponential limit law. URL: http://verdi.mi.informatik.uni-frankfurt.de/ag7.1/people/geiger/preprints/yaglom.ps.- Datum der Aktualisierung: 13.07.2001.- mailto: jgeiger@mathematik.uni-kl.de.- Johann Wolfgang Goethe-Univ., Frankfurt am Main.

[GK] GEIGER, J. und KERSTING, G. The Galton-Watson tree conditioned on its height. in: B. Grigelionis et al.(Hrsg.), *Proceedings of the 7th Vilnius Conference on Prob. Theor. and Math. Stat.* (1998).

[Har] HARRIS, T.E. *The Theory of Branching Processes.* Springer, Heidelberg (1963).

[Heu] HEUSER, H. *Lehrbuch der Analysis, Teil I (11. Auflage).* Teubner, Stuttgart (1994).

[HS] HEWITT, E. und STROMBERG, K. *Real and Abstract Analysis.* Spriger, New York (1965).

[Jag] JAGERS, P. *Branching Processes with Biological Applications.* Wiley, London (1975).

[KNS] KESTEN, H., NEY, P. und SPITZER, F. The Galton-Watson process with mean one and finite variance. *Theory Prob. Appl.* **11**, 513-540 (1966).

[KeSt] KESTEN, H. und STIGUM, B. A limit theorem for multidimensional Galton-Watson processes. *Ann. Math. Stat.* **37**, 1211-1223 (1966).

[KoSt] KOTZ, S. und STEUTEL, F.W. Note on a characterization of exponential distributions. *Stat. Prob. Lett.* **6**, 201-203 (1988).

[LPP] LYONS, R., PEMANTLE, R. und PERES, Y. Conceptual proofs of $L\log L$ criteria for mean behavior of branching processes. *Ann. Prob.* **25**, 1125-1138 (1995).

[LP] LYONS, R. und PERES, Y. *Probability on Trees and Networks.* URL: http://www.math.gatech.edu/~rdlyons/prbtree/book.ps.- Datum der Aktualisierung: 22.11.2001.- mailto: rdlyons@math.gatech.edu bzw.

peres@stat.berkeley.edu.- Georgia Tech School of Mathematics, Atlanta bzw. Univ. of California, Berkeley.

[Maj] MAJOR, P. On the invariance principle for sums of independent, identically distributed random variables. *J. Multivariate Anal.* **8**, 457-517 (1978).

[PK] PAKES, A.G. und KHATTREE, R. Length-biasing, characterization of laws and the moment problem. *Austral. J. Statist.* **34**, 307-322 (1992).

[RR] RACHEV, S.T. und RÜSCHENDORF, L. Probability metrics and recursive algorithms. *Adv. Appl. Prob.* **27**, 770-799 (1995).

[Rös1] RÖSLER, U. A limit theorem for "Quicksort". *Inform. Theor. Appl.* **25**, 85-100 (1991).

[Rös2] RÖSLER, U. A fixed point equation for distributions. *Stoch. Proc. Appl.* **37**, 195-214 (1992).

[Rös3] RÖSLER, U. The weighted branching process. URL: http://www-computerlabor.math.uni-kiel.de/stochastik/roesler/research/biele.ps.- Datum der Aktualisierung: 02.05.1999.- mailto: roesler@math.uni-kiel.de.- Christian-Albrechts-Univ., Kiel.

[Schm] SCHMITZ, N. *Vorlesungen über Wahrscheinlichkeistheorie.* Teubner, Stuttgart (1996).

[Sla] SLACK, R.S. A branching process with mean one and possibly infinite variance. *Z. Wahrsch. Verw. Geb.* **9**, 139-145 (1968).

[Yag] YAGLOM, A.M. Certain limit theorems of the theory of branching processes. *Dokl. Acad. Nauk. SSSR* **56**, 795-798 (1947).

[Zub] ZUBKOV, A.M. Limiting distributions of the distance to the closest common ancestor. *Theor. Prob. Appl.* **20**, 602-612 (1975).

Ich versichere, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt und keine weiteren Hilfsmittel als die im Literaturverzeichnis aufgeführten Quellen verwendet habe.

Münster, den 26. November 2001