Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Eine Methode zur Lösung optimaler Stoppprobleme mit Anwendungen in der Finanzmathematik

Wissenschaftliche Arbeit
zur Diplom-Hauptprüfung
im Fach Mathematik

vorgelegt von

Gunnar Jansen

Thema gestellt von

Prof. Dr. G. Alsmeyer

10. September 2003

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Ein zentrales Gebiet der Wahrscheinlichkeitstheorie stellt die Theorie der stochastischen Prozesse dar. Stochastische Prozesse dienen üblicherweise der Beschreibung zeitdynamischer zufallsabhängiger Vorgänge, bei denen die bisherige Realisierung Rückschlüsse auf den weiteren Prozessverlauf zulässt. So kann beispielsweise der Kursverlauf an Börsen notierter Wertpapiere als ein in die Zukunft reichender Prozess angesehen werden, der gewissen Unsicherheiten unterliegt, also zufallsabhängig ist, und bei dem der zu einem bestimmten Zeitpunkt bekannte Kursverlauf oder der Börsentrend im Ganzen dem Beobachter Informationen liefert, die Einfluss auf seine weitere Einschätzung des Kursverlaufs ausüben. Gelingt es, ein geeignetes mathematisches Modell zu finden, welches den Kursverlauf eines Finanzderivats möglichst realitätsnah beschreibt, besteht nahe liegend eine zentrale Aufgabe darin, vernünftige Aussagen darüber zu treffen, wann man ein solches Derivat ausübt respektive wann man einen konkreten Prozess bestmöglich beendet. Diese Aufgabenstellung fällt in das Gebiet des optimalen Stoppens und stellt auch jenen Punkt dar, an dem die vorliegende Arbeit ansetzt.

Ein geeignetes Vorgehen besteht in einer Reihe von Problemen darin, eine optimale Strategie für das Stoppen des Prozesses zu erraten und die intuitiv gewonnene Stoppzeit mathematisch als optimal zu beweisen. In dieser Arbeit wird ein etwas anderer, aber nicht minder Erfolg versprechender Weg gewählt. Das hier vorgeschlagene, auf M. Beibel und R. Lerche zurückgehende Verfahren (vgl. [Bei]) benutzt im Gegensatz zu den herkömmlichen Methoden als wesentliches Element, dass eine Zerlegung gesucht wird, über die in allgemeinerem Kontext Optimalitätsaussagen gemacht werden können und die die optimale Ausübungsstrategie gleich mitliefert. Um der eingangs beschriebenen Problemstellung ein mathematisches Gerüst zu verleihen, muss zunächst einmal präzisiert werden, aus welchen Bestandteilen unser Modell bestehen soll:

(a) einer Teilmenge $L \subset \mathbb{R}$, die die Zeitachse symbolisiert,

(b) einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ mit einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in L}$,

(c) einem Preisprozess $(X_t)_{t \in L}$, der bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t \in L}$ adaptiert ist, und

(d) einem Auszahlungsprozess $(\psi_t)_{t \in L}$ der Option.

Legt man obige Beschreibung des mathematischen Modells zu Grunde, so lautet unser Ziel, eine Strategie τ zu finden, die die erwartete diskontierte Auszahlung $E(e^{-r\tau}\psi_\tau)$ maximiert. Dabei wird die Strategie τ durch eine Stoppzeit charakterisiert, was leicht einzusehen ist, da die Person, die die Entscheidung über die Ausübung treffen soll, nur auf Informationen zurückgreifen kann, die der Gegenwart oder Vergangenheit entstammen. Der Informationsverlauf wird dabei durch die Filtration beschrieben, bezüglich der der betrachtete Prozess adaptiert ist.

Falls die betrachteten Preisprozesse Brownsche Bewegungen oder Funktionen Brownscher Bewegungen sind, wird sich die Zerlegungsmethode in derartigen Situationen, d.h. bei Prozessen mit exponentieller Abzinsung, als überaus erfolgreich herausstellen. Die Unterstellung eines kontinuierlichen Zeitparameters und die Modellierung zufallsabhängiger Preisverläufe durch Funktionen Brownscher Bewegungen sind in den Anwendungen der Finanzmathematik weit verbreitet (s. a. [Irle], S. 116 und 127).

Im ersten Kapitel sollen die für die vorliegende Arbeit notwendigen Kenntnisse aus der Theorie stochastischer Prozesse bereitgestellt werden. Von herausgehobener Bedeutung sind dabei die Begriffe Stoppzeiten, Martingale und

Brownsche Bewegung. Schließlich wird im zweiten Kapitel das Kernstück der vorliegenden Arbeit, die bereits mehrfach erwähnte Zerlegungsmethode, dargestellt. Da diese Methode nicht immer ausreicht, die betrachteten Stoppprobleme vollständig zu lösen, werden im zweiten Abschnitt die Resultate aus dem Bereich der stochastischen Integration bereitgestellt, die nötig sind, um diese Lücke zu schließen.

In den nachfolgenden Kapiteln geht es in erster Linie darum, den bisher schuldig gebliebenen Nachweis zu bringen, dass sich die zuvor eingeführte Methode erfolgreich auf allerhand konkrete Beispiele, insbesondere aus dem Bereich der Finanzmathematik, anwenden lässt. So wird im dritten Kapitel ausführlich das klassische Beispiel einer Amerikanischen Put Option mit unendlichem Zeithorizont behandelt, während bereits im vierten Kapitel allgemeinere Aussagen über Funktionen Brownscher Bewegungen hergeleitet und bewiesen werden. Im letzten Abschnitt des vierten Kapitels soll schließlich wieder einem konkreten Prozess erhöhte Aufmerksamkeit gewidmet werden, und am Ende erhalten wir eine optimale Stoppzeit für eine berühmte kombinierte Option, dem so genannten *Strangle* oder *Straddle*.

Besondere Beachtung verdient das letzte Kapitel, in dem eine elegante Lösung des klassischen $W_\tau/(\tau+1)$-Problems (vgl. [She1]) gegeben wird. Obwohl bei diesem Problem keine exponentielle Abzinsung vorliegt, stellt sich die Anwendung der Methode als überaus fruchtbar heraus, und es können sogar etwas allgemeinere Aussagen als die klassischen bewiesen werden.

Ich möchte mich herzlich bei Herrn Professor Dr. G. Alsmeyer für die gute Betreuung dieser Arbeit bedanken. Er hat mein Interesse für das Thema geweckt, und seine wertvollen Hinweise haben mir über manche Hürde hinweggeholfen.

Kapitel 1

Kontinuierliche Prozesse

In diesem Kapitel werden jene Resultate über die Theorie der stochastischen Prozesse und aus dem Bereich der Martingaltheorie vorgestellt, die für die vorliegende Arbeit von besonderem Interesse sind.

Weitestgehend wird bei der Darstellung der Resultate den Werken von [Als1], [Irle], [Rev] und [Stee] gefolgt, wobei Beweise nur dann vorgestellt werden, wenn sie für das Verständnis des vorliegenden Textes hilfreich sind. Andernfalls wird auf die erwähnten Quellen verwiesen.

1.1 Stoppzeiten und Martingale

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, sind einige Kenntnisse über die Theorie stochastischer Prozesse notwendig. Wir legen einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ zu Grunde und nennen eine Familie $X_L := (X_t)_{t \in L}$ mit $L \subset \mathbb{R}^+$ von Abbildungen in einen messbaren Raum $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ einen *stochastischen Prozess*. In der vorliegenden Arbeit werden nur reellwertige Prozesse mit kontinuierlichem Zeitparameter und unendlichem Zeithorizont betrachtet, d.h. es gilt $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ und $L = [\,0; \infty)$.

Für den weiteren Verlauf sind jene Prozesse besonders wichtig, bei denen eine Menge $\Omega_0 \subset \Omega$ existiert mit der Eigenschaft, dass $P(\Omega_0) = 1$ gilt und für alle $\omega \in \Omega_0$ die auf $[\,0; \infty)$ definierte Funktion $t \mapsto X_t(\omega)$ stetig ist.

Zum Zwecke einer einfacheren Sprechweise ist es möglich, $(\Omega_0, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ als Wahrscheinlichkeitsraum zu Grunde zu legen. Die letzte Eigenschaft bedeutet dann, dass sämtliche Pfade von $(X_t)_{t\geq 0}$ stetig sind. Wenn im Folgenden kürzer von *stetigen* Prozessen gesprochen wird, sind gerade Prozesse mit dieser Eigenschaft gemeint.

Eine isotone Familie $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$ von Unter-σ-Algebren von $\mathcal{A}$, also eine Familie, die der Bedingung $\mathcal{A}_s \subset \mathcal{A}_t$ für alle $s \leq t$ genügt, nennt man auch *Filtration.* Folgender Begriff erweist sich in diesem Zusammenhang als sinnvoll.

1.1 Definition Eine stochastischer Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ heißt *adaptiert bezüglich* $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$, falls X_t für alle $t \geq 0$ $\mathcal{A}_t$-messbar ist.

Diese Begriffsbildung erlaubt eine einfache Interpretation: Die σ-Algebra $\mathcal{A}$ beschreibt die Gesamtheit aller beobachtbaren Ereignisse, während $\mathcal{A}_t$ zumindest all jene Ereignisse umfasst, die durch das Verhalten des Prozesses X bis zum Zeitpunkt t bestimmt sind. Die Isotonie der Familie $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$ bedeutet, dass zu einem späteren Zeitpunkt nicht weniger Informationen vorliegen, die Gesamtheit der beobachtbaren Ereignisse demnach im Zeitablauf zunimmt. Dabei bezeichne

$$\mathcal{A}_\infty := \sigma\left(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{A}_t\right)$$

die von der Gesamtheit aller $\mathcal{A}_t$ erzeugte σ-Algebra.
Jeder stochastische Prozess X ist adaptiert bezüglich der durch

$$\mathcal{G}_t := \sigma((X_s)_{0\leq s\leq t})$$

definierten *kanonischen Filtration* $\mathcal{G}$ von X, die gerade die durch den Prozessverlauf beobachtbaren Ereignisse enthält und auch in vielen Anwendungen zu Grunde gelegt wird. Im nächsten Abschnitt wird man sehen, dass für die in dieser Arbeit zu Grunde gelegte Filtration noch ein kleine technische Änderung vorgenommen werden muss.

Ein weiterer Begriff, der sowohl in der Theorie der stochastischen Prozesse im Allgemeinen als auch in der vorliegenden Arbeit von grundsätzlicher

Bedeutung ist, ist der Begriff der Stoppzeit. In vielen Fällen ist es so, dass sich der Beobachter eines Prozesses dafür interessiert, wann erstmalig ein bestimmtes Ereignis eintritt. Eine derartige Zufallszeit hat die Form

$$\tau_A = \inf \{t \geq 0 : X_t \in A\} \tag{1.1}$$

mit einer messbaren Menge A. Dass der Beobachter in seiner Entscheidung über den Zeitpunkt des Stoppens eines Prozesses nur auf die zum gegenwärtigen Zeitpunkt verfügbaren Informationen zurückgreifen kann, ist wesentliche Eigenschaft einer Stoppzeit.

1.2 Definition Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$ eine isotone Familie von Unter-σ-Algebren von $\mathcal{A}$. Dann heißt eine Abbildung $\tau : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *Stoppzeit bezüglich* $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$, falls

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{A}_t$$

für alle $t \geq 0$ gilt. Ist $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$ die kanonische Filtration von $(X_t)_{t\geq 0}$, so nennt man τ *Stoppzeit bezüglich* $(X_t)_{t\geq 0}$.

In (1.1) ist eine heuristische Zufallszeit angegeben worden; es ist allerdings noch sicherzustellen, dass es sich dabei in der Tat um eine Stoppzeit handelt, d.h. es muss die $\mathcal{A}_t$-Messbarkeit der Menge $\{\tau_A \leq t\}$ geprüft werden. Anders als im diskreten Fall kann diese Forderung bei zeitstetigen Prozessen zu Problemen führen; wir werden aber sehen, dass dies nicht der Fall ist, wenn die betrachteten Prozesse stetige Pfade besitzen. Unter dieser Voraussetzung stellt man zunächst leicht die Gültigkeit der Beziehung

$$\{\tau_A < t\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}, r<t} \{X_r \in A\} \in \mathcal{A}_t$$

fest. Die folgende Eigenschaft der betrachteten Filtration erweist sich als äußerst hilfreich.

1.3 Definition Eine Filtration $\mathcal{A}$ heißt *rechtsseitig stetig*, falls

$$\mathcal{A}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{A}_s$$

für alle t gilt.

Zu einer beliebigen Filtration $\mathcal{A}$ ist die Filtration $\mathcal{A}^+$, definiert durch $\mathcal{A}_t^+ := \bigcap_{s>t} \mathcal{A}_s$, rechtsseitig stetig.

1.4 Lemma *Sei $\mathcal{A}$ eine rechtsseitig stetige Filtration. Dann sind für $\tau : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ äquivalent:*

(i) $\{\tau < t\} \in \mathcal{A}_t$ *für alle* t.

(ii) $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{A}_t$ *für alle* t.

Beweis. Vgl. [Irle], S. 118/119. □

Es sei sodann das gewünschte Resultat präsentiert.

1.5 Satz *$\mathcal{A}$ bezeichne eine rechtsseitig stetige Filtration und X einen stetigen adaptierten Prozess. Falls A eine offene oder abgeschlossene Menge ist, so gilt:*

$$\tau_A \text{ ist eine Stoppzeit.}$$

Beweis. In [Irle], S. 119/120. □

Falls eine Stoppzeit τ und ein bezüglich einer Filtration $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$ adaptierter Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ gegeben sind, so definieren wir durch $X_t^\tau := X_{t\wedge\tau}$ den so genannten *gestoppten Prozess* X^τ. Durch $\mathcal{A}_\tau := \{A \in \mathcal{A}_\infty : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{A}_t$ für alle $t \in [0;\infty]\}$ wird eine σ-Algebra definiert, die man auch *σ-Algebra der τ-Vergangenheit* nennt. Es erweist sich als wichtige Eigenschaft, dass der gestoppte Prozess X^τ nun auch $\mathcal{A}_\tau$-messbar ist. Die nachfolgenden Begriffe zeigen, dass dies nicht immer der Fall ist.

1.6 Definition Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ heißt *progressiv messbar* oder *progressiv bezüglich* $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$, falls die Abbildung

$$X : [0;t] \times \Omega \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$$

für alle $t \geq 0$ $(\mathbb{B}([0;t]) \otimes \mathcal{A}_t)$-messbar ist.

Wir erhalten das für unsere Zwecke zufrieden stellende Resultat:

1.7 Lemma *Es seien $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration, $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein stochastischer Prozess, der bezüglich $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$ adaptiert sei, und τ eine Stoppzeit. Dann gilt:*

(a) *Sind die Pfade von X rechtsseitig oder linksseitig stetig, so ist X progressiv messbar bezüglich $\mathcal{A}$.*

(b) *Ist X progressiv messbar bezüglich $\mathcal{A}$, so ist X^τ $\mathcal{A}_\tau$-messbar auf der Menge $\{\tau < \infty\}$.*

(c) *Ist X progressiv messbar bezüglich $\mathcal{A}$, so ist X^τ progressiv messbar bezüglich $\mathcal{A}_{t\wedge\tau}$.*

Beweis. Vgl. S. 44 ff. in [Rev]. □

Viele Aussagen über Stoppzeiten stehen in sehr engem Zusammenhang mit dem anschließenden Begriff, der in dieser Arbeit eine fundamentale Rolle einnimmt.

1.8 Definition $(X_t)_{t\geq 0}$ heißt *Martingal bezüglich* $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$, falls X_t $\mathcal{A}_t$-messbar ist und folgende Eigenschaften besitzt:

(a) $E(|X_t|) < \infty$ für alle $t \geq 0$.

(b) $E(X_t \mid \mathcal{A}_s) = X_s$ fast sicher für alle $0 \leq s \leq t < \infty$.

Kann in (b) das Gleichheitszeichen noch durch ein $\geq$ ($\leq$) ersetzt werden, so spricht man von einem *Sub(Super-)martingal*.

Einen Prozess, der ein Martingal bildet und zudem fast sicher pfadstetig ist, nennt man *stetiges Martingal*. Die Bezeichnungen sind entsprechend, falls sämtliche Pfade von $(X_t)_{t\geq 0}$ rechtsseitig stetig oder linksseitig stetig sind.

Zum Abschluss dieses Abschnitts sei noch eines der wichtigsten Resultate über Martingale angeführt, wobei das anschließende Korollar für uns von besonderem Interesse ist.

1.9 Satz (Optional-Sampling-Theorem.) *Seien $(M_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges Martingal bezüglich einer Filtration $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$ und τ eine Stoppzeit. Dann bildet auch der gestoppte Prozess*

$$X_t := M_{\tau\wedge t}$$

ein stetiges Martingal bezüglich $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$.

Beweis. Vgl. [Stee], S. 51/52. □

Als einfache Konsequenz sei noch notiert, dass das Optional-Sampling-Theorem unmittelbar $EM_{\tau\wedge t} = EM_0$ für beliebiges $t \geq 0$ liefert.

Das bereits angekündigte Korollar ist eine einfache Anwendung des Lemmas von Fatou (vgl. [Als1], S. 37), das uns zusammen mit Satz 1.9 eine sehr nützliche Aussage liefert. Dabei sei für eine Stoppzeit τ auf der Menge $\{\tau = \infty\}$ noch $X_\tau = X_\infty$ gesetzt.

1.10 Korollar *Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein positives Supermartingal. Dann gilt mit $X_\infty = 0$ für jede Stoppzeit τ*

$$EX_\tau \leq EX_0.$$

Beweis. Da X positiv und ein Supermartingal ist, gilt

$$\begin{aligned} EX_\tau &= E\left(\liminf_{n\to\infty} X_{\tau\wedge n}\right) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} E\left(X_{\tau\wedge n}\right) \leq EX_0 \end{aligned}$$

mit dem Lemma von Fatou. □

Eine etwas allgemeinere Aussage beinhaltet das folgende Korollar.

1.11 Korollar *Bezeichnen $(X_t)_{t\geq 0}$ ein nichtnegatives, rechtsseitig stetiges Supermartingal und σ, τ beliebige Stoppzeiten, so gilt mit $X_\infty = 0$*

$$X_\sigma \geq E(X_\tau \mid \mathcal{A}_\sigma) \quad P\text{-fast sicher.} \tag{1.2}$$

Beweis. Vergleiche Theorem 3.3, S. 70 in [Rev]. □

1.12 Bemerkung Durch beidseitiges Bilden des Erwartungswertes in (1.2) erhält man unmittelbar $E(X_\sigma) \geq E(X_\tau)$. Dabei ist der Spezialfall $\tau \equiv 0$ gerade die Aussage von Korollar 1.10.

1.2 Die Brownsche Bewegung

Im letzen Abschnitt haben wir einige allgemeine Aussagen über beliebige stetige Prozesse bereitgestellt. Von nun an werden wir uns mit einem konkreten Prozess, der Brownschen Bewegung, beschäftigen, die ohne Zweifel als der wichtigste stetige Prozess bezeichnet werden darf. Im verbleibenden Teil dieser Arbeit werden fast ausnahmslos Brownsche Bewegungen oder Funktionen der Brownschen Bewegung betrachtet.

1.13 Definition Sei $T > 0$ oder $T = \infty$. Ein zeitstetiger stochastischer Prozess $(B_t)_{0 \leq t < T}$ heißt *Brownsche Bewegung mit Drift* $\mu \in \mathbb{R}$ *und Volatilität* $\sigma > 0$, falls er folgende Eigenschaften besitzt:

1. $B_0 = 0$.

2. Für alle $0 \leq s < t < T$ haben die Zuwächse $B_t - B_s$ eine $\mathcal{N}(0, t-s)$-Verteilung.

3. $(B_t)_{t \geq 0}$ besitzt unabhängige Zuwächse, d.h. für jede endliche Wahl $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < T$ sind $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ stochastisch unabhängig.

4. $B_t(\omega)$ ist stetig in t für alle Elemente $\omega \in N^c$, wobei N eine geeignete P-Nullmenge bezeichne.

Für $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ heißt $(B_t)_{0 \leq t < T}$ *Standard Brownsche Bewegung*. Dieser Prozess wird im Folgenden mit $(W_t)_{0 \leq t < T}$ bezeichnet. Der für $x > 0$ durch

$$S_t = x \exp(\sigma W_t + \mu t)$$

definierte stochastische Prozess $(S_t)_{0 \leq t < T}$ heißt *geometrische Brownsche Bewegung mit Drift μ, Volatilität σ und Startwert x.*

Man beachte, dass auf Grund der Definition die Pfade einer Brownschen Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ in der Tat fast sicher stetig sind und dass auch die Prozesse $(-W_t)_{0 \leq t < T}$ und $(\widetilde{W}_t)_{0 \leq t < b^{-1}T}$, definiert durch

$$\widetilde{W}_t = b^{-1/2}\, W_{bt}$$

mit $b > 0$, Standard Brownsche Bewegungen sind. An späterer Stelle werden diese Feststellungen für uns von Nutzen sein.

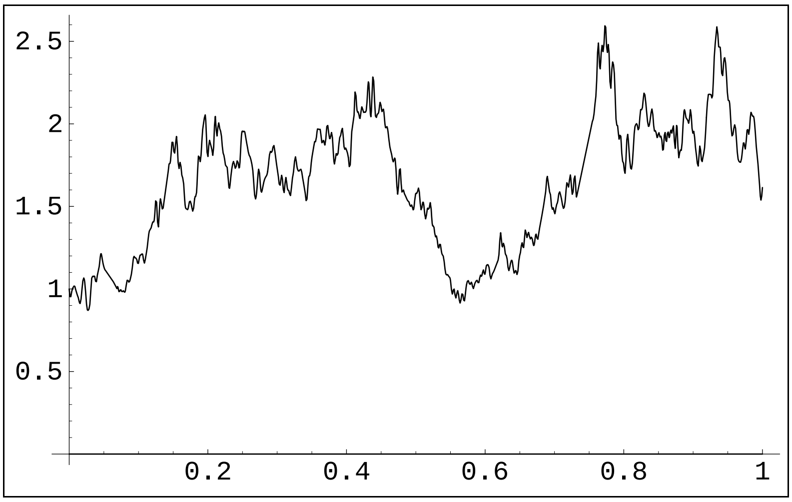

Abbildung 1.1: Pfad einer geometrischen Brownschen Bewegung

Im Anschluss werden zwei einfache Martingaleigenschaften bei Brownschen Bewegungen bewiesen, wobei vor allem die zweite noch des Öfteren benutzt wird.

1.14 Lemma *(a) Eine Brownsche Bewegung ohne Drift bildet ein stetiges Martingal.*

(b) Eine geometrische Brownsche Bewegung $S_t = x\,\exp(\sigma W_t + \mu t)$ bildet genau dann ein stetiges Martingal, wenn $\mu = -\sigma^2/2$ gilt.

Beweis. (a) $(B_t)_{t\geq 0}$ bezeichne wie üblich eine Brownsche Bewegung, die bezüglich einer Filtration $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$ adaptiert sei. Für $\mu = 0$ und $t > s$ gilt:

$$\begin{aligned} E(B_t \mid \mathcal{A}_s) &= E(B_t - B_s + B_s \mid \mathcal{A}_s) \\ &= B_s + E(B_t - B_s \mid \mathcal{A}_s) \\ &= B_s + E(B_t - B_s) \\ &= B_s. \end{aligned}$$

(b) Mit obigen Voraussetzungen, wobei hier $\mu = -\frac{\sigma^2}{2}$ gewählt werde, erhält man

$$\begin{aligned} E(x\, e^{\sigma W_t - \sigma^2 t/2} \mid \mathcal{A}_s) &= x\, E(e^{\sigma W_s} e^{\sigma(W_t - W_s) - \sigma^2 t/2} \mid \mathcal{A}_s) \\ &= x\, e^{\sigma W_s - \sigma^2 t/2} E\big(e^{\sigma(W_t - W_s)} \mid \mathcal{A}_s\big) \\ &= x\, e^{\sigma W_s - \sigma^2 t/2} E\big(e^{\sigma(W_t - W_s)}\big) \\ &= x\, e^{\sigma W_s - \sigma^2 s/2}, \end{aligned}$$

wobei als Letztes der Erwartungswert der Log-Normalverteilung berechnet wurde und zu beachten ist, dass $\sigma(W_t - W_s)$ eine $\mathcal{N}(0, \sigma^2(t-s))$-Verteilung besitzt. □

Eine wichtige Eigenschaft für weitere Untersuchungen stellt bekanntlich die rechtsseitige Stetigkeit der betrachteten Filtration dar (vgl. Satz 1.5). Dass dies in der vorliegenden Arbeit ohne Einschränkung angenommen werden kann, zeigt das folgende Resultat.

1.15 Satz *Es sei $(W_t)_{t\geq 0}$ eine Standard Brownsche Bewegung bezüglich einer Filtration $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$. Dann gilt:*

$(W_t)_{t\geq 0}$ ist Standard Brownsche Bewegung bezüglich $(\mathcal{A}_t^+)_{t\geq 0}$.

Beweis. Vgl. [Irle], S. 132/133. □

Die hier benötigten Stoppzeiten haben folgende oder ähnliche Form:

$$\tau = \inf\{t \geq 0 \,|\, f(B_t) \geq a\} \quad \text{oder} \quad \tau = \inf\{t \geq 0 \,|\, f(B_t) = a\}$$

mit einer stetigen, reellwertigen Funktion f. Gemäß Satz 1.5 liegen damit in der Tat Stoppzeiten vor.

Abschließend sei noch die Filtration angegeben, die in der vorliegenden Arbeit stets zu Grunde gelegt wird, wenn es sich bei den betrachteten Prozessen um Brownsche Bewegungen handelt.

1.16 Satz *Es seien $(W_t)_{t\geq 0}$ eine Standard Brownsche Bewegung und $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ die kanonische Filtration. Ferner sei $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{A} \mid P(A) = 0\}$. Dann ist $(W_t)_{t\geq 0}$ eine Standard Brownsche Bewegung bezüglich der durch*

$$\mathcal{F}_t := \sigma(\mathcal{G}_t \cup \mathcal{N})$$

definierten Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ist rechtsseitig stetig.

Beweis. Vgl. [Irle], S. 136. □

Die eben definierte Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} := (\sigma(\mathcal{G}_t \cup \mathcal{N}))_{t\geq 0}$ wird auch als *Standardfiltration* bezeichnet.

Nachdem nun die wesentlichen Resultate präsentiert wurden, die das Martingalverhalten von Funktionen Brownscher Bewegungen beschreiben, und auch der Begriff der Stoppzeit in diesem Zusammenhang hinreichend geklärt ist, wollen wir an dieser Stelle noch das Pfadverhalten Brownscher Bewegungen genauer untersuchen. Das folgende Resultat besagt, dass sich sämtliche Pfade einer Standard Brownschen Bewegung mit Wahrscheinlichkeit 1 schließlich zwischen den Graphen von $f(t) = \pm\sqrt{2t \ln \ln t}$ entwickeln. Auf Grund dieses Terms trägt es auch den Namen *Gesetz vom iterierten Logarithmus für die Brownsche Bewegung.*

1.17 Satz *Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ eine Standard Brownsche Bewegung. Dann gilt*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t(\omega)}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1$$

und

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{W_t(\omega)}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = -1$$

P-fast sicher.

Beweis. Vgl. [Gäns], S. 319 ff. □

Ein weiteres wichtiges Resultat in diesem Zusammenhang ist das *Reflexionsprinzip für die Standard Brownsche Bewegung.*

1.18 Satz *Sei τ eine Stoppzeit bezüglich der Standardfiltration, gegeben $(W_t)_{t\geq 0}$, dann ist auch der durch*

$$\widetilde{W}_t := \begin{cases} W_t, & \text{falls } t < \tau \\ W_\tau - (W_t - W_\tau), & \text{falls } t \geq \tau \end{cases}$$

definierte, an τ gespiegelte Prozess $(\widetilde{W}_t)_{t\geq 0}$ eine Standard Brownsche Bewegung.

Beweis. Siehe [Irle], S. 145 oder [Rog1], S. 25. □

Im Falle der fast sicher endlichen Stoppzeit $\tau_a = \inf\{t \geq 0 \,|\, W_t = a\}$ liefert der letzte Satz für den gespiegelten Prozess $\widetilde{W}$ die Identität $\widetilde{W}_t = 2a - W_t$ für $t > \tau_a$, d.h. der Prozess $(W_t)_{t\geq 0}$ wird bei Erreichen der horizontalen Geraden der Höhe a an dieser reflektiert. Wir bemerken schon hier, dass die beiden letzten Resultate für uns vor allem bei der Berechnung einiger Wahrscheinlichkeiten von Bedeutung sind.

Kapitel 2

Lösung optimaler Stoppprobleme

In diesem Kapitel wird das Kernstück der vorliegenden Arbeit vorgestellt. Dabei handelt es sich um eine Zerlegungsmethode, die auf einigen sehr effizienten Martingalüberlegungen basiert und mit der sich zahlreiche Stoppprobleme in stetiger Zeit sehr elegant lösen lassen. Die wesentlichen Überlegungen entstammen einer Arbeit von M. Beibel und H. R. Lerche (vgl. [Bei]).

2.1 Eine Zerlegungsmethode

Grundlegend beruht die Methode auf einer geeigneten multiplikativen Zerlegung des Ausgangsprozesses und dem Übergang zu einem äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß. Genauer liefert eine derartige Zerlegung des Prozesses unmittelbar eine optimale Stoppzeit, wobei der Nachweis der Optimalität über das äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaß gebracht wird. Um dieses Stoppverfahren gebührend zu beschreiben, wollen wir zunächst ein wenig ausholen.

In verschiedenen Arbeiten über Bayes-Tests (so z.B. in [Wood], S. 523 ff.) wird folgendes Argument benutzt: Das Bayes-Risiko $R(\tau)$ habe für alle Stoppzeiten τ mit $R(\tau) < \infty$ die Form

$$R(\tau) = Eg(L_\tau), \tag{2.1}$$

wobei L einen bestimmten stochastischen Prozess bezeichne und g eine positive Funktion mit eindeutig bestimmtem Minimum. Dieses Minimum werde in einem Punkt a^* angenommen, sodass offenkundig die Abschätzung

$$R(\tau) = Eg(L_\tau) \geq g(a^*)$$

gilt. Durchläuft der Prozess L den Punkt a^* fast sicher, so ist des Weiteren unmittelbar einzusehen, dass die Stoppzeit $\widehat{\tau} = \inf\{t \geq 0 \mid L_t = a^*\}$ das Bayes-Risiko minimiert.
Falls jedoch L ein zeitdiskreter Prozess ist, so wird er im Allgemeinen den Punkt a^* *nicht* exakt treffen; man wird daher gezwungen sein, den Prozess in einer Umgebung von a^* zu stoppen. Der konkrete Fall $g(x) = |x|$ und $L_n = X_1 + \cdots + X_n$, wobei die X_i geometrisch verteilt sind, ist von Y. S. Chow, H. Robbins und D. Siegmund als „Park-Problem" bezeichnet und genauer untersucht worden (vgl. [Chow], S. 45 und 60). M. Woodroofe, R. Lerche und R. Keener haben für die allgemeine Situation entsprechend den Begriff „verallgemeinerte Park-Probleme" eingeführt und sie unter minimalen Voraussetzungen an die Funktion g und die gemeinsame Verteilung der X_i gelöst (vgl. [Wood], S. 523 ff.).
Im zeitstetigen Fall ist die Lösung - bei entsprechendem Pfadverhalten von L - trivial, sofern eine Darstellung der Form (2.1) gegeben ist. Da dies bei den hier betrachteten Stoppproblemen nicht unmittelbar der Fall ist, erweist es sich als äußerst fruchtbare Idee, die obige Technik mit derjenigen von L. A. Shepp und A. N. Shiryaev (vgl. [She2]) zu kombinieren. Das konkrete Vorgehen soll im Folgenden erläutert werden.

Da die in der vorliegenden Arbeit auftretenden Prozesse in der Regel ein Modell für den Wert eines bestimmten Finanzgutes darstellen und diese aus dem Blickwinkel eines Investors betrachtet werden, stellt sich demnach eher die Aufgabe, den zu erwartenden *maximalen* Wert des Prozesses zu finden. Wenn wir einen Prozess $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ in Abhängigkeit eines Startwertes x betrachten, lautet unser Stoppproblem, die Funktion

$$V^*(x) := \sup_{\tau} E\left(Z_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}\right) \tag{2.2}$$

zu berechnen, wobei das Supremum über alle Stoppzeiten gebildet wird. Der Fall $\tau = \infty$ bedeutet folglich, dass der Wert des betrachteten Finanzgutes verfällt. Es wird sich herausstellen, dass man (2.2) bei einer geeigneten Zerlegung des Ausgangsprozesses Z mit nur wenig Mühe in ein „verallgemeinertes Park-Problem" transformieren kann.

Im Folgenden existiere für den Prozess $(Z_t)_{t\geq 0}$ stets eine Zerlegung der Form

$$Z_t := g(X_t)\, M_t. \tag{2.3}$$

Dabei seien g eine Funktion mit einem eindeutig bestimmten und positiven Maximum in einem Punkt x^*, $(X_t)_{t\geq 0}$ ein beliebiger stetiger reellwertiger stochastischer Prozess, adaptiert bezüglich einer Filtration $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$, und $(M_t)_{t\geq 0}$ ein positives und stetiges Martingal. Die Stoppzeit

$$\widehat{\tau} := \inf\{t \geq 0 : X_t = x^*\}. \tag{2.4}$$

ist schon aus rein heuristischen Überlegungen von besonderem Interesse, τ stehe für eine beliebige Stoppzeit bezüglich der zu Grunde gelegten Filtration.

Wir beginnen die mathematische Betrachtung mit einer sehr einfachen, aber grundlegenden Feststellung, wobei noch erwähnt sei, dass es natürlich keine Einschränkung bedeutet, für die nachfolgenden Resultate $M_0 = 1$ zu setzen (und den eigentlichen Startwert der Funktion g zuzuschreiben). Um im anschließenden Kapitel eine elegantere Notation zur Hand zu haben, soll hier aber auf diese Festlegung verzichtet werden.

2.1 Lemma *Für eine beliebige Stoppzeit τ gilt*

$$E(Z_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}) \leq g(x^*)E(M_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}) \leq g(x^*)EM_0, \tag{2.5}$$

und für $\tau = \widehat{\tau}$ erhält man die Identität

$$E(Z_{\widehat{\tau}} 1_{\{\widehat{\tau}<\infty\}}) = g(x^*) E(M_{\widehat{\tau}} 1_{\{\widehat{\tau}<\infty\}}). \tag{2.6}$$

Beweis. Wegen $Z_t = g(X_t) M_t$ für alle $t \geq 0$ erhält man unmittelbar

$$Z_\tau 1_{\{\tau<\infty\}} = g(X_\tau) M_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}$$

und damit

$$\begin{aligned} E(Z_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}) &= E(g(X_\tau) M_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}) \\ &\leq g(x^*) E(M_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}). \end{aligned}$$

Dabei liegt für $\tau = \widehat{\tau}$ in der letzten Zeile Gleichheit vor, womit die erste Ungleichung in (2.5) und die Gleichung (2.6) gezeigt sind. Da M ein positives Supermartigal bildet, erhält man die Ungleichung

$$E(M_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}) \leq EM_0$$

aus Korollar 1.10. □

Eine nahe liegende Konsequenz aus Lemma 2.1 ist von enormer Bedeutung für das weitere Vorgehen.

2.2 Korollar *Falls $\widehat{\tau}$ P-fast sicher endlich ist und*

$$E(M_{\widehat{\tau}} 1_{\{\widehat{\tau}<\infty\}}) = EM_0 \tag{2.7}$$

gilt, so ist $\widehat{\tau}$ gemäß Lemma 2.1 optimal. □

An dieser Stelle führen wir ein neues Wahrscheinlichkeitsmaß Q ein, da wir auf diese Weise eine in konkreten Fällen leicht nachzuweisende hinreichende Bedingung für unsere späteren Optimierungsprobleme erhalten. Zuvor sei noch in Erinnerung gerufen, dass zwei Wahrscheinlichkeitsmaße *äquivalent* heißen, falls sie dieselben Nullmengen besitzen. Wir definieren

$$\begin{aligned} Q(A) &:= (EM_0)^{-1} \int_A M_t \, dP \\ &= (EM_0)^{-1} E(M_t 1_A); \qquad A \in \mathcal{A}_t. \end{aligned}$$

Dabei ist Q natürlich ein zu P äquivalentes und auch wohldefiniertes Wahrscheinlichkeitsmaß, da $(M_t)_{t\geq 0}$ ein positives Martingal bezüglich $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$ bildet und damit des Weiteren $EM_t = EM_0$ für alle $t \geq 0$ gilt.
Eine Legitimation späterer Rechenschritte liefert das anschließende Resultat.

2.3 Satz *Sei f eine nichtnegative, messbare numerische Funktion auf $(\Omega, \mathcal{A})$, ν sei das Maß mit der μ-Dichte f, d.h.*

$$\nu(A) := \int_A f\, d\mu; \quad A \in \mathcal{A},$$

dann gilt für jede nichtnegative, messbare numerische Funktion g auf $(\Omega, \mathcal{A})$

$$\int f\, d\nu = \int fg\, d\mu. \tag{2.8}$$

Eine $\mathcal{A}$-messbare numerische Funktion g ist genau dann (quasi-) ν-integrierbar, wenn gf (quasi-) μ-integrierbar ist, wobei weiter (2.8) gilt.

Beweis. In [Als1], S. 53. □

Mit Hilfe des voranstehenden Satzes erhalten wir schließlich die zentrale Aussage dieses Abschnitts.

2.4 Satz (a) *Es gilt die Identität*

$$EM_0\, Q(\widehat{\tau} < \infty) = E(M_{\widehat{\tau}} 1_{\{\widehat{\tau}<\infty\}}),$$

d.h. $Q(\widehat{\tau} < \infty) = 1$ liefert die gewünschte Beziehung (2.7).

(b) *$Q(\widehat{\tau} < \infty) = 1$ impliziert*

$$\sup_{\tau} E(Z_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}) = E(Z_{\widehat{\tau}} 1_{\{\widehat{\tau}<\infty\}}),$$

wobei $P(\widehat{\tau} < \infty) < 1$ möglich ist.

Beweis. (a) Da offenkundig $\{\widehat{\tau} < \infty\} \in \mathcal{A}_{\widehat{\tau}}$ gilt, liefert die Definition des Wahrscheinlichkeitsmaßes Q in Verbindung mit Lemma 1.7 die Identität

$$\begin{aligned} Q(\widehat{\tau} < \infty) &= \int_{\{\widehat{\tau}<\infty\}} dQ \\ &= (EM_0)^{-1} \int_{\{\widehat{\tau}<\infty\}} M_{\widehat{\tau}}\, dP, \end{aligned}$$

was Beweisteil (a) abschließt.

(b) Sei τ eine beliebige Stoppzeit. Dann gilt mit $\{\tau < \infty\} \in \mathcal{A}_\tau$

$$\begin{aligned} E(Z_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}) &= E(g(X_\tau) M_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}) \\ &= \int_{\{\tau<\infty\}} g(X_\tau) M_\tau \, dP \\ &= EM_0 \int_{\{\tau<\infty\}} g(X_\tau) \, dQ \leq EM_0 \, g(x^*). \end{aligned}$$

Falls $Q(\widehat{\tau} < \infty) = 1$ gilt, so kann das Ungleichheitszeichen in der letzten Zeile für $\tau = \widehat{\tau}$ durch ein Gleichheitszeichen ersetzt werden. □

An dieser Stelle wollen wir kurz auf die einleitenden Bemerkungen eingehen. Das Wahrscheinlichkeitsmaß Q wurde natürlich gerade so gewählt, dass es die in Aussicht gestellte Transformation des Stoppproblems (2.2) in ein „verallgemeinertes Park-Problem“ ermöglicht. Die konkrete Beziehung

$$E\left(Z_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}\right) = EM_0 \; E_Q\left(g(X_\tau) 1_{\{\tau<\infty\}}\right)$$

ist aus obigem Beweis ersichtlich und liefert schließlich in Übereinstimmung mit unseren anfänglichen Überlegungen die optimale Stoppzeit und das hinreichende Optimalitätskriterium.

Wegen der Bedeutung für den weiteren Text wollen wir das bemerkenswerte Resultat noch einmal formulieren:

> $\widehat{\tau}$ stellt die optimale Stoppzeit für unser Ausgangsproblem (2.2) dar, sofern $\widehat{\tau}$ Q-fast sicher endlich ist. In diesem Fall gilt
>
> $$\sup_\tau E\left(Z_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}\right) = EM_0 \, g(x^*).$$
>
> Auf Grund der Voraussetzung an die Funktion g ist $\widehat{\tau}$ eindeutig bestimmt.

Da die betrachteten Prozesse in der Regel Brownsche Bewegungen sind, wird der bekannte Satz von Girsanov häufiges Hilfsmittel zum Nachweis der hinreichenden Optimalitätsbedingung $Q(\widehat{\tau} < \infty) = 1$ sein. Für die vorliegende Arbeit benötigen wir ihn nur in der einfachsten Form.

2.5 Satz (Satz von Girsanov.) *Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung mit Volatilität σ und Drift μ. Des Weiteren sei $\hat{\mu} \in \mathbb{R}$ und $T > 0$. Wir definieren*

$$L_T := \exp\left(\frac{\hat{\mu} - \mu}{\sigma^2} B_T - \frac{\hat{\mu}^2 - \mu^2}{2\sigma^2} T\right).$$

Dann wird durch $Q(A) := E(L_T 1_A)$ ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß definiert, derart dass $(B_t)_{t\in[0;T]}$ eine Brownsche Bewegung mit Volatilität σ und Drift $\hat{\mu}$ bezüglich Q ist.

Beweis. Siehe S. 151 ff. in [Irle]. □

Damit sind bereits die wesentlichen Überlegungen zu der hier verwendeten Zerlegungsmethode gemacht, wobei wir nicht darauf verzichten wollen, wenige abschließende Bemerkungen hinzuzufügen.

Falls wir an Stelle von $\widehat{\tau}$ die Stoppzeit

$$\tau^* := \inf\{t \geq 0 \,|\, X_t \geq x^*\}$$

betrachten, so ist festzustellen, dass $\tau^* = \widehat{\tau}$ gilt, falls der Prozess X einen Startwert $X_0 = x \leq x^*$ besitzt und fast sicher pfadstetig ist. Da es sich bei den betrachteten Prozessen um Brownsche Bewegungen oder stetige Funktionen Brownscher Bewegungen handelt und überdies Q ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß ist, bereitet diese Forderung keine Probleme, und folglich erweisen sich die zuvor angestellten Überlegungen für unser Ausgangsproblem (2.2) in dieser Situation als überaus fruchtbar. Insbesondere ist in diesem Fall weiterhin $Q(\tau^* < \infty) = 1$ gemäß Satz 2.4 die hinreichende Optimalitätsbedingung, und es gilt für $x \leq x^*$ die Identität

$$V^*(x) := \sup_{\tau} E\left(Z_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}\right) = g(x^*) E M_0.$$

Hingegen könnten für $X_0 = x > x^*$ die Stoppzeiten $\widehat{\tau}$ und τ^* unterschiedlicher nicht sein. Auf die Optimalität von $\widehat{\tau}$ darf in dieser Situation nicht gehofft werden, da die Bedingung $Q(\widehat{\tau} < \infty) = 1$ nicht mehr erfüllt und bereits $Z_0 > Z_{\widehat{\tau}}$ gelten wird. Auch für τ^* finden die obigen Überlegungen zur Zerlegungsmethode wegen $\tau^* \equiv 0$ hier keinen Nutzen. Wir werden aber sehen, dass mittels einiger Resultate aus dem Bereich der stochastischen Integration in Anlehnung an das auf A. N. Kolmogorov zurückgehende „Principle of Smooth Fit“ (vgl. [She2]) nachgewiesen werden kann, dass in der Region $x > x^*$ in der Tat

$$V^*(x) := \sup_{\tau} E\left(Z_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}\right) = Z_0$$

gilt, sodass sofortiges Ausüben ratsam ist. Folglich wird die Stoppzeit τ^* unser Stoppproblem (2.2) vollständig lösen.

Die Überlegungen sind natürlich entsprechend, falls die Stoppzeit $\tau^* := \inf\{t \geq 0 \,|\, X_t \leq x^*\}$ betrachtet wird.

2.2 Der Itô-Kalkül

Wie bereits erwähnt, reicht die zuvor beschriebene Methode nicht immer aus, die betrachteten Stoppprobleme vollständig zu lösen. Die zum Schließen dieser Lücke notwendigen Resultate aus dem Bereich der stochastischen Integration sollen im Folgenden bereitgestellt werden, wobei wir bei der Darstellung dem Werk von J. M. Steele (vgl. [Stee]) folgen. Der an einer detaillierteren Darstellung interessierte Leser sei zudem auf die Werke [Irle], [Rev] und [Rog2] verwiesen, die einen für unsere Zwecke guten Einblick in die stochastische Integration liefern.

In diesem Abschnitt bezeichne T eine positive reelle Zahl, eine Funktion $f : \Omega \times [\,0, T] \to \mathbb{R}$ nennen wir *messbar*, falls sie $\mathcal{F}_T \otimes \mathbb{B}([\,0; T])$-messbar ist, und *adaptiert*, falls sie bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ adaptiert ist. Für den Rest dieses Abschnitts werden wir zwei Klassen von Funktionen unterscheiden: $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}^2[\,0, T]$ bezeichne die Menge aller messbaren, adaptierten Funktionen, die der Bedingung

$$E\left(\int_0^T f^2(\omega,t)\,dt\right) < \infty \tag{2.9}$$

genügen. Damit ist $\mathcal{H}^2$ ein abgeschlossener linearer Unterraum von $L^2(P \otimes \lambda\!\!\lambda)$. Mit $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^2[\,0,T]$ werden wir die Menge aller messbaren, adaptierten Funktionen mit

$$P\left(\int_0^T f^2(\omega,t)\,dt < \infty\right) = 1 \tag{2.10}$$

bezeichnen. Offenkundig gilt $\mathcal{H}^2 \subset \mathcal{L}^2$. Ferner ist jede Funktion f der Form $f(\omega,t) = g(B_t(\omega))$ mit einer stetigen Funktion g Element von $\mathcal{L}^2$, da die Abbildung $t \mapsto g(B_t(\omega))$ auf dem Intervall $[\,0,T]$ auf Grund der Pfadstetigkeit der Brownschen Bewegung beschränkt ist. Der Grund für die frühe Einführung und Unterscheidung dieser beiden Klassen liegt darin, dass die hier betrachteten Funktionen der Bedingung (2.10) oder sogar der Bedingung (2.9) genügen und entsprechende Aussagen für diese Funktionen existieren, die für uns von großem Nutzen sind. So ist die nachfolgende Aussage eine sehr wichtige Folgerung aus der so genannten *Itô-Isometrie* auf $\mathcal{H}^2$.

2.6 Satz *Für jedes $f \in \mathcal{H}^2$ und $0 \le s \le t$ gilt*

$$E\left(\left(\int_s^t f(\omega,u)\,dW_u\right)^2 \mid \mathcal{F}_s\right) = E\left(\int_s^t f^2(\omega,u)\,du \mid \mathcal{F}_s\right).$$

Beweis. Vgl. [Stee], S. 82. □

Von grundlegender Bedeutung ist die Tatsache, dass das Itô-Integral über eine Funktion aus $\mathcal{H}^2$ ein stetiges Martingal bildet.

2.7 Satz *Für jede Funktion $f \in \mathcal{H}^2[\,0,T]$ existiert ein Prozess $(X_t)_{t\in[\,0,T]}$, derart dass X ein stetiges Martingal bezüglich der Standardfiltration $\mathcal{F}$ bildet und*

$$P\left(X_t(\omega) = \int_0^t f(\omega,u)\,dW_u\right) = 1$$

gilt.

Beweis. In [Stee], S. 83 ff. □

Damit sind bereits in Zusammenhang mit der Itô-Integration die für uns wichtigen Aussagen über Funktionen aus $\mathcal{H}^2$ gemacht. Da aber schon stetige Funktionen existieren, für die Bedingung (2.9) nicht erfüllt ist, erscheint eine Erweiterung des stochastischen Integrals unumgänglich. Der Begriff der Lokalisierungsfolge ist in diesem Zusammenhang von fundamentaler Bedeutung.

2.8 Definition Eine monoton wachsende Folge $(\nu_n)_{n\geq 1}$ von Stoppzeiten heißt $\mathcal{H}^2[\,0,T]$-*Lokalisierungsfolge* für f, falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $f_n(\omega,t) := f(\omega,t)1_{\{t\leq\nu_n\}} \in \mathcal{H}^2[\,0,T]$ für alle n.

(ii) $P\left(\bigcup_{n\geq 1}\{\omega : \nu_n = T\}\right) = 1$.

Jedes Element $f \in \mathcal{L}^2[\,0,T]$ besitzt eine Lokalisierungsfolge, denn die Folge

$$\tau_n = \inf\left\{s : \int_0^s f^2(\omega,t)\,dt \geq n \quad\text{oder}\quad s \geq T\right\} \tag{2.11}$$

erfüllt gerade die oben geforderten Bedingungen. Auch der nachfolgende Begriff steht in untrennbarem Zusammenhang mit dem Raum $\mathcal{L}^2$.

2.9 Definition Ein bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ adaptierter Prozess $(M_t)_{t\geq 0}$ heißt *lokales Martingal*, falls eine monoton wachsende Folge $(\tau_k)_{k\geq 1}$ von Stoppzeiten existiert mit $\tau_k \to \infty$ fast sicher für $k \to \infty$, derart dass der Prozess

$$M_t^{(k)} := M_{t\wedge\tau_k} - M_0$$

für jedes k ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ bildet.

Selbstverständlich werden die Begriffe *lokales Sub-* und *lokales Supermartingal* entsprechend definiert. Die Bedeutung der Menge $\mathcal{L}^2$ erschließt sich spätestens aus der folgenden Aussage, die sicherstellt, dass jedes Itô-Integral über eine Funktion aus $\mathcal{L}^2$ ein lokales Martingal bildet.

2.10 Satz *Für jede Funktion $f \in \mathcal{L}^2[\,0, T]$ existiert ein stetiges lokales Martingal $(X_t)_{0 \le t \le T}$, derart dass*

$$P\left(X_t(\omega) = \int_0^t f(\omega, u)\, dW_u \right) = 1$$

gilt. Dabei kann die Lokalisierungsfolge wie in (2.11) gewählt werden.

Beweis. Vgl. [Stee], S. 104. □

Einige einfache, aber nicht minder nützliche Zusammenhänge zwischen den neuen und herkömmlichen Begriffen sollen im Folgenden zusammengestellt werden.

2.11 Lemma *(a) Sei $(X_t)_{t \ge 0}$ ein lokales Martingal und τ eine Stoppzeit. Dann ist auch der gestoppte Prozess $(X_{t \wedge \tau})_{t \ge 0}$ ein lokales Martingal.*

(b) Falls $(X_t)_{t \ge 0}$ ein stetiges lokales Martingal ist und C eine Konstante mit $|X_t| \le C$ für alle $t \ge 0$, dann ist $(X_t)_{t \ge 0}$ ein Martingal.

(c) Jedes nichtnegative lokale Martingal $(X_t)_{0 \le t \le T}$ mit $E|X_0| < \infty$ ist ein Supermartingal. Falls überdies

$$EX_T = EX_0$$

gilt, so ist $(X_t)_{0 \le t \le T}$ ein Martingal.

Beweis. Siehe [Stee], S. 105 ff. □

Kommen wir zum letzten und wichtigsten Teil dieses Abschnitts, der Itô-Formel. Wir geben sie nur in allgemeiner Form und für eindimensionale Prozesse an. Dazu führen wir zunächst folgenden Begriff ein:

2.12 Definition $(X_t)_{0 \le t \le T}$ heißt *Standardprozess*, falls er eine Darstellung der Form

$$X_t = x_0 + \int_0^t a(\omega, s)\, ds + \int_0^t b(\omega, s)\, dW_s \tag{2.12}$$

für alle $0 \leq t \leq T$ besitzt, wobei a, b adaptierte, messbare Prozesse sind, die den Bedingungen

$$P\left(\int_0^T |a(\omega, s)|\, ds < \infty\right) = 1 \quad \text{und} \quad P\left(\int_0^T |b(\omega, s)|^2\, ds < \infty\right) = 1$$

genügen.

Äußerst bedeutend ist die Tatsache, dass jede Funktion eines Standardprozesses, die gewissen Differenzierbarkeitsbedingungen genügt, erneut ein Standardprozess ist und eine Integraldarstellung besitzt, die explizit angegeben werden kann:

2.13 Satz (Itô-Formel) *Sei $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ und $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ ein Standardprozess mit $x_0 = 0$, dann gilt*

$$\begin{aligned} f(t, X_t) = f(0,0) &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)\, ds \\ &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\, dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) b^2(\omega, s)\, ds. \end{aligned}$$

Beweis. Vgl. [Stee], S. 112 ff. und S. 126. □

Der Prozess $f(t, X_t)$ kann auch als stochastische Differentialgleichung geschrieben werden. Im späteren Text werden wir vornehmlich folgende Kurzschreibweise benutzen:

$$df(t, X_t) = f_t(t, X_t)\, dt + f_x(t, X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t) b^2(\cdot, t)\, dt.$$

Abschließend soll noch eine Verallgemeinerung der Itô-Formel auf zwei Standardprozesse angegeben werden.

2.14 Satz *Seien $f \in C^{2,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ und $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$, $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ Standardprozesse mit den Integraldarstellungen*

$$X_t = \int_0^t a(\omega, s)\, ds + \int_0^t b(\omega, s)\, dW_s$$

und

$$Y_t = \int_0^t \alpha(\omega, s)\, ds + \int_0^t \beta(\omega, s)\, dW_s.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(X_t, Y_t) &= f(0,0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, Y_s)\, dX_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(X_s, Y_s)\, dY_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s, Y_s) b^2(\omega, s)\, ds \\ &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(X_s, Y_s) b(\omega, s)\beta(\omega, s)\, ds \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_s, Y_s)\beta^2(\omega, s)\, ds. \end{aligned}$$

Beweis. Vgl. [Stee], S. 112 ff. und S. 126. □

Falls man $f(x, y) = xy$ wählt, so erhält man als Spezialfall die so genannte *Produktregel der stochastischen Integration*:

$$X_t Y_t - X_0 Y_0 = \int_0^t Y_s\, dX_s + \int_0^t X_s\, dY_s + \int_0^t b(\omega, s)\beta(\omega, s)\, ds.$$

Kapitel 3

Optimales Stoppen bei perpetuierten Amerikanischen Put Optionen

In diesem Kapitel wird eine Amerikanische Put Option mit unendlichem Zeithorizont vorgestellt und unter Verwendung der in Abschnitt 2.1 beschriebenen Martingalüberlegungen untersucht. Wesentliches Resultat wird eine Stoppzeit sein, die den erwarteten diskontierten Gewinn des Investors maximiert. Abschließend soll die optimale Ausübungsstrategie auf eine für den Optionsinhaber interessante Eigenschaft untersucht werden.

3.1 Das Modell und die Problemstellung

Die *Amerikanische Put Option* ist ein Finanzderivat, das den Käufer berechtigt, innerhalb oder am Ende einer festgelegten Laufzeit T eine bestimmte Anzahl an Aktien zu einem fixierten Ausübungspreis verkaufen zu können oder aber das Optionsrecht verfallen zu lassen. Die Put Option wird auf einem Finanzmarkt gehandelt, der sich in der Realität als äußerst komplex und facettenreich darstellt. Wir werden daher gezwungen sein, in unserem Modell einige Restriktionen in Kauf zu nehmen.

Für den zu Grunde gelegten Finanzmarkt treffen wir folgende kurz zusammengefasste Annahmen:

- Der Handel mit Finanzgütern verläuft kontinuierlich.
- Bei dem Kauf oder Verkauf von Finanzgütern entstehen keine Transaktionskosten oder Steuern.
- Der Marktzinssatz für risikolose Kapitalaufname und -anlage ist identisch, konstant und kurzfristig ermittelbar.
- Dividenden oder sonstige Erträge werden auf die Wertpapiere nicht ausgeschüttet.

Da der übliche Fall eines endlichen Zeithorizonts deutlich schwieriger zu handhaben ist, da die Entscheidung des Investors, die Option zu einem bestimmten Zeitpunkt auszuüben, wesentlich von der verbleibenden Restlaufzeit $T - t$ abhängt (s.a. [Shi2], S. 751), betrachten wir des Weiteren ausschließlich Finanztitel mit unendlicher Laufzeit.

Von nun an wollen wir uns mit der stochastischen Behandlung des unterstellten Finanzmarktes und speziell der Amerikanischen Put Option beschäftigen. Wie üblich bezeichne für den Rest des Kapitels $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ einen Wahrscheinlichkeitsraum, auf dem eine Standard Brownsche Bewegung $(W_t)_{t\geq 0}$ gegeben sei. Der Kursverlauf einer Aktie kann nur dann sinnvoll modelliert werden, wenn sichergestellt ist, dass der zu Grunde gelegte Prozess stets positiv ist. Daher bietet es sich an, eine geometrische Brownsche Bewegung $(S_t)_{t\geq 0}$ mit Startwert $x > 0$ als Modell für den Aktienkursverlauf zu wählen, d.h. für alle $t \geq 0$ sei

$$S_t \;=\; x\,\exp(\,\sigma W_t + \mu t\,).$$

Häufig schreiben wir die Drift μ einer geometrischen Brownschen Bewegung in der Form $\hat{\mu} - \sigma^2/2$. $\hat{\mu}$ heißt dann *Trend* von $(S_t)_{t\geq 0}$. Falls kein Trend existiert, also $\hat{\mu} = 0$ gilt, bildet der Prozess bekanntlich ein Martingal (vgl. Lemma 1.14). Dem Teilnehmer auf unserem Finanzmarkt bieten sich ausschließlich die Möglichkeiten, in eine risikolose, festverzinsliche Vermögensanlage, auch als *Bond* bezeichnet, zu investieren oder alternativ die risikobehaftete Anlage in Form einer Amerikanischen Put Option zu wählen. Die Kursentwicklung des Bonds werde durch den exponentiellen Preisprozess $(R_t)_{t\geq 0}$,

$$R_t := R_0\, e^{rt}$$

determiniert, wobei $R_0 > 0$ den Anfangswert und $r > 0$ die Verzinsungsrate bedeuten. Da der Käufer einer Put Option nur dann von seinem Optionsrecht Gebrauch macht, wenn der gegenwärtige Aktienkurs kleiner ist als der vorher vereinbarte Ausübungspreis, erhält man $\psi(S_t) := (K - S_t)^+$ als so genannten *inneren Wert* der Option zum Zeitpunkt t und damit die abdiskontierte Auszahlungsfunktion

$$f_t(\omega) := e^{-rt}\psi(S_t(\omega)) = e^{-rt}(K - S_t(\omega))^+,$$

wobei wir nicht darauf verzichten wollen, die wesentlichen Bezeichnungen noch einmal zusammenzufassen:

- Der Prozess $(S_t)_{t\geq 0}$ beschreibt - wie bereits erwähnt - den Kursverlauf der im Put gehandelten Aktie.
- $K > 0$ steht für den vor Abschluss des Kontraktes vereinbarten *Ausübungspreis* (*engl.* strike price) der Put Option.
- e^{-rt} diskontiert den inneren Wert $(K - S_t)^+$ der Option auf den einheitlichen Bezugszeitpunkt $t = 0$; $r > 0$ stellt also die konstante Zinsrate der festverzinslichen, risikolosen Vermögensanlage dar.

Der Käufer der Option wird daran interessiert sein, eine Stoppzeit zu finden, die die erwartete diskontierte Auszahlung Ef_τ maximiert. Folglich ist das Stoppproblem

$$V^*(x) := \sup_{\tau} E(e^{-r\tau}(K - S_\tau)^+ 1_{\{\tau<\infty\}}) \tag{3.1}$$

in Abhängigkeit vom Startwert x der Aktie zu lösen, wobei das Supremum über alle Stoppzeiten gebildet wird. Der Fall $\tau = \infty$ bedeutet dabei natürlich Nichtausüben der Option und somit Verfall des Optionswertes. Bei Unterstellung von *Arbitragefreiheit* kann man diesen Wert auch als *fairen Preis* des Kontraktes ansehen.

3.2 Die optimale Stoppzeit

In diesem Abschnitt werden wir das Stoppproblem (3.1) vollständig lösen. Wir geben die Funktion V^* und eine optimale Stoppzeit τ^* explizit an und untersuchen im zweiten Teil, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Option bei Verfolgen der Strategie τ^* ausgeübt wird. Es soll ohne Umwege das zentrale Resultat dieses Kapitels angegeben werden, wobei zuvor erwähnt sei, dass ein entsprechender Beweis für $x = 1$ und $x^* < 1$ in [Bei], S. 95 ff. zu finden ist (s. a. [Shi2], S. 753 und S. 761 ff.).

3.1 Satz *Seien $r > 0$ und*

$$\gamma = \left(\frac{\hat{\mu}}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{\hat{\mu}}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} \tag{3.2}$$

$$x^* = K\frac{\gamma}{\gamma + 1} \tag{3.3}$$

$$C^* = \gamma^\gamma \left(\frac{K}{\gamma + 1}\right)^{\gamma+1}. \tag{3.4}$$

Dann existiert eine eindeutig bestimmte Stoppzeit τ^*, die das Stoppproblem

$$V^*(x) = \sup_\tau E(e^{-r\tau}(K - S_\tau)^+ 1_{\{\tau<\infty\}})$$

löst, und zwar

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0 : S_t \leq x^*\}.$$

Es gilt $V^*(x) = V(x)$, wobei V durch

$$V(x) := \begin{cases} C^* x^{-\gamma}, & x \geq x^* \\ K - x, & x < x^* \end{cases}$$

gegeben ist.

Man beachte, dass x^* unabhängig von x ist und - wie zu erwarten - in dem Intervall $(0; K)$ liegt.

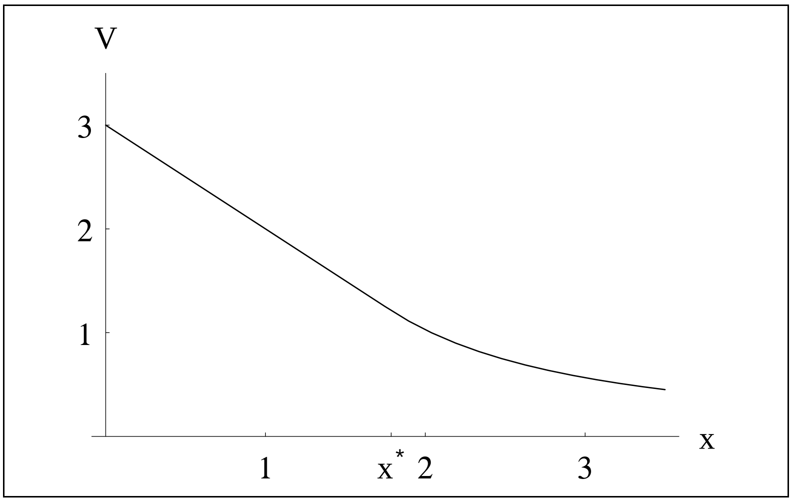

Abbildung 3.1: Lösung der Put Option

Beweis. Für den ersten Teil des Beweises schreiben wir wieder kürzer $\mu = \hat{\mu} - \sigma^2/2$. Durch

$$M_t := e^{-rt} S_t^{-\gamma}$$

wird ein positiver und stetiger stochastischer Prozess $(M_t)_{t\geq 0}$ mit Startwert $M_0 = x^{-\gamma}$ definiert. Überdies bildet $(M_t)_{t\geq 0}$ ein Martingal bezüglich der Standardfiltration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, denn mit

$$\begin{aligned} M_t &= x^{-\gamma} e^{-rt} e^{(-\gamma\sigma)W_t + (-\gamma\mu)t} \\ &= x^{-\gamma} e^{(-\gamma\sigma)W_t - (\gamma\mu + r)t} \\ &= x^{-\gamma} e^{(-\gamma\sigma)W_t - \frac{(\gamma\sigma)^2}{2} t} \end{aligned}$$

hat man gerade eine Darstellung gemäß Lemma 1.14. Man beachte, dass γ die positive Lösung der quadratischen Gleichung $\frac{(\gamma\sigma)^2}{2} - \gamma\mu - r = 0$ ist, was das letzte Gleichheitszeichen begründet. Ferner hat man folgende einfache Zerlegung:

$$Z_t := e^{-rt}(K - S_t)^+ = S_t^{\gamma}(K - S_t)^+ M_t.$$

In Konsistenz zu den einleitenden Überlegungen setzen wir

$$g(y) := y^\gamma (K-y)^+.$$

Damit ist klar, dass wir einfacher schreiben können:

$$\begin{aligned} V^*(x) &= \sup_\tau E(e^{-r\tau}(K-S_\tau)^+ 1_{\{\tau<\infty\}}) \\ &= \sup_\tau E(g(S_\tau) M_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}). \end{aligned}$$

Die Funktion g erfüllt die an sie gestellten Forderungen, wie eine einfache Untersuchung zeigt.

3.2 Lemma *Es gilt*

$$\max_{y\in(0;\infty)} g(y) = g(x^*) = C^*.$$

Dabei ist x^* eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei $0<y<K$. Dann ist g stetig differenzierbar, und es gilt

$$\begin{aligned} g'(y) &= \gamma y^{\gamma-1}(K-y) + y^\gamma(-1) \\ &= y^\gamma[\gamma y^{-1}(K-y)-1] \\ &= y^\gamma[\gamma K y^{-1} - \gamma - 1]. \end{aligned}$$

Aus $y>0$ folgt

$$\begin{aligned} g'(y)=0 &\Leftrightarrow \gamma K y^{-1} = \gamma+1 \\ &\Leftrightarrow y^{-1} = \frac{\gamma+1}{\gamma K} \\ &\Leftrightarrow x^* = K\frac{\gamma}{\gamma+1}. \end{aligned}$$

Eine einfache Rechnung zeigt $g(x^*)=C^*$. Da g nur auf $(0;K)$ postiv ist und

$$\lim_{y\to 0} g(y) = \lim_{y\to K} g(y) = 0$$

gilt, erhält man zusammen mit $g\equiv 0$ für $y\geq K$ die behauptete Aussage. □

Die abschließenden Überlegungen wollen wir hier ein wenig ausführlicher darstellen. So erhält man aus Lemma 2.1 zum einen die Gültigkeit der Ungleichung

$$E(e^{-r\tau}(K - S_\tau)^+ 1_{\{\tau<\infty\}}) \leq C^* x^{-\gamma}$$

für beliebiges τ und zum anderen die Identität

$$E(e^{-r\tau^*}(K - S_{\tau^*}) 1_{\{\tau^*<\infty\}}) = C^* E(M_{\tau^*} 1_{\{\tau^*<\infty\}})$$

für $\tau = \tau^*$. Gemäß Satz 2.4 genügt es, $Q(\tau^* < \infty) = 1$ zu zeigen, um die gewünschte Beziehung $E\left(M_{\tau^*} 1_{\{\tau^*<\infty\}}\right) = x^{-\gamma}$ und schließlich die Optimalität von τ^* zu erhalten. Dabei bezeichnet Q das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{F}_\infty := \sigma(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t)$, das durch

$$\begin{aligned} Q(A) &:= x^\gamma \int_A M_t \, dP \\ &= x^\gamma \, E(M_t 1_A); \quad A \in \mathcal{F}_t \end{aligned}$$

für alle $0 \leq t < \infty$ gegeben ist. Wir benutzen den Satz von Girsanov (vgl. Satz 2.5) und bemerken dazu, dass M hier die Darstellung $M_t = x^{-\gamma} \, e^{-(\gamma\sigma)W_t - \frac{(\gamma\sigma)^2}{2}t}$ besitzt mit einer Standard Brownschen Bewegung W. Damit ist unmittelbar einzusehen, dass W unter dem zu P äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß Q eine Brownsche Bewegung mit Drift $-\gamma\sigma$ ist. Wir formulieren den letzten Beweisschritt als eigenständiges Resultat.

3.3 Lemma *Es gilt* $Q(\tau^* < \infty) = 1$.

Beweis. Da wir mit (3.2) und $\mu = \hat{\mu} - \sigma^2/2$ die Darstellung $\gamma = \mu/\sigma^2 + \sqrt{\mu^2/\sigma^4 + 2r/\sigma^2}$ erhalten, gilt unmittelbar

$$-\gamma\sigma^2 + \mu = -\sigma^2 \sqrt{\frac{\mu^2}{\sigma^4} + \frac{2r}{\sigma^2}} < 0.$$

Da der Prozess $\widetilde{W}_t := W_t + (\gamma\sigma)t$ unter Q eine Standard Brownsche Bewegung ist, folgt

$$\begin{aligned}
Q(\tau^* < \infty) &= Q\left(\min_{t\geq 0} S_t \leq x^*\right) \\
&= Q\left(\min_{t\geq 0}[\sigma W_t + \mu t] \leq \ln x^* - \ln x\right) \\
&= Q\left(\min_{t\geq 0}[\sigma \widetilde{W}_t + (-\gamma\sigma^2 + \mu)t] \leq \ln \frac{x^*}{x}\right) = 1.
\end{aligned}$$

Dabei gilt das letzte Gleichheitszeichen wegen $-\gamma\sigma^2 + \mu < 0$. □

Für $x \geq x^*$ ist dabei die Bedingung $Q(\tau^* < \infty) = 1$ in der Tat hinreichend für die Optimalität von τ^*, da der Prozess $\sigma\widetilde{W}_t + (-\gamma\sigma^2 + \mu)t$ Q-fast sicher pfadstetig ist mit Startwert 0 und somit den Wert $\ln \frac{x^*}{x} \leq 0$ fast sicher durchläuft. Somit gilt für $x \geq x^*$ die Identität

$$\sup_\tau E(e^{-r\tau}(K - S_\tau)^+ 1_{\{\tau<\infty\}}) = g(x^*)\, EM_0 = C^* x^{-\gamma}.$$

Damit ist der Teil des Beweises abgeschlossen, bei dem die Überlegungen zu unserer Zerlegungsmethode Anwendung finden. Für $x < x^*$ werden wir mittels einiger Resultate aus der stochastischen Integration die Identität

$$V^*(x) = \sup_\tau E(e^{-r\tau}(K - S_\tau)^+ 1_{\{\tau<\infty\}}) = V(x)$$

explizit nachrechen, die wegen $V(x) = K - x$ $(= Z_0)$ und $\tau^* = 0$ unmittelbar die Optimalität von τ^* und damit die behauptete Aussage impliziert.
Zunächst ist die Gültigkeit der Ungleichung

$$V(x) \leq \sup_\tau E(e^{-r\tau}(K - S_\tau)^+ 1_{\{\tau<\infty\}}) = V^*(x)$$

leicht einzusehen. Zum Nachweis der umgekehrten Ungleichung $V(x) \geq V^*(x)$ setzen wir $f(t,x) := e^{-rt}V(x)$ für $x < x^*$. f ist zweimal stetig partiell differenzierbar, sodass wir mit der Itô-Formel (vgl. Satz 2.13) unter Berücksichtigung der bekannten stochastischen Differentialgleichung

$$dS_t = S_t\,(\hat{\mu}\, dt + \sigma\, dW_t), \qquad S_0 = x$$

erhalten:

$$\begin{aligned} (3.5) \qquad df(t, S_t) &= e^{-rt}\left[-rV(S_t) + \hat{\mu} S_t V'(S_t) + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 V''(S_t)\right] dt \\ &\quad + e^{-rt} \sigma S_t V'(S_t)\, dW_t. \end{aligned}$$

Gemäß Satz 2.10 bildet

$$M_t := e^{-rt} \sigma S_t V'(S_t)\, dW_t \tag{3.6}$$

ein stetiges lokales Martingal. Unter Berücksichtigung von

$$V(S_t) = K - S_t \Leftrightarrow S_t < x^*$$

zeigt eine einfache, aber erst später durchgeführte Rechnung

$$-rV(S_t) + \hat{\mu} S_t V'(S_t) + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 V''(S_t) \leq 0, \tag{3.7}$$

sodass aus (3.5), (3.6) und (3.7) auf die Ungleichung

$$e^{-rt}\, V(S_t) \leq V(S_0) + M_t$$

geschlossen werden kann, die wir noch einmal in der Form

$$V(x) \geq e^{-rt} V(S_t) - M_t \tag{3.8}$$

notieren. Da $(M_t)_{t \geq 0}$ ein lokales Martingal bildet, nehmen wir im Folgenden τ_n als Lokalisierungsfolge und τ als beliebige Stoppzeit an, sodass wir aus (3.8) unmittelbar folgern können:

$$\begin{aligned} V(x) &\geq E\left(e^{-r(\tau_n \wedge \tau)} V(S_{\tau_n \wedge \tau})\right) - E M_{\tau_n \wedge \tau} \\ &= E\left(e^{-r(\tau_n \wedge \tau)} V(S_{\tau_n \wedge \tau})\right) \\ &\geq E\left(e^{-r(\tau_n \wedge \tau)} V(S_{\tau_n \wedge \tau}) 1_{\{\tau < \infty\}}\right). \end{aligned}$$

Unter Verwendung des Lemmas von Fatou erhalten wir damit die Abschätzung

$$\begin{aligned} V(x) &\geq \liminf_{n \to \infty} E\left(e^{-r(\tau_n \wedge \tau)} V(S_{\tau_n \wedge \tau}) 1_{\{\tau < \infty\}}\right) \\ &\geq E\left(\liminf_{n \to \infty} e^{-r(\tau_n \wedge \tau)} V(S_{\tau_n \wedge \tau}) 1_{\{\tau < \infty\}}\right) \\ &= E\left(e^{-r\tau} V(S_\tau) 1_{\{\tau < \infty\}}\right). \end{aligned}$$

für alle Stoppzeiten τ. Geht man auf beiden Seiten zum Supremum über, so erhält man die gewünschte Aussage

$$V(x) \geq \sup_\tau E\left(e^{-r\tau} V(S_\tau) 1_{\{\tau<\infty\}}\right) = V^*(x)$$

und somit insgesamt $V(x) = V^*(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$. □

Wir wollen noch die Gültigkeit der wichtigen Ungleichung (3.7) begründen. Wir setzen also $x < x^*$ und wollen folglich zeigen, dass in diesem Fall die Ungleichung

$$-r(K-x) - \hat{\mu}x \leq 0$$

gilt. Für $\hat{\mu} \geq r$ ist diese Ungleichung trivial. Falls $r > \hat{\mu}$ gilt, so ist obige Ungleichung genau dann erfüllt, wenn $x \leq \frac{rK}{r-\hat{\mu}}$ ist. Wegen $x < x^* = K\frac{\gamma}{\gamma+1}$ reicht es zu zeigen, dass

$$\frac{\gamma}{\gamma+1} \leq \frac{r}{r-\hat{\mu}}$$

gilt, d.h. es muss $\gamma\hat{\mu} + r \geq 0$ nachgewiesen werden. Da γ Lösung der quadratischen Gleichung $\gamma^2\frac{\sigma^2}{2} - \gamma\left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2}\right) - r = 0$ ist, ist diese Ungleichung also auch im Fall $r > \hat{\mu}$ erfüllt.

Da wir in unserem Stoppproblem (3.1) das Supremum über alle Stoppzeiten gebildet haben, ist es durchaus möglich, dass die Option bei Verfolgen der Strategie τ^* mit positiver Wahrscheinlichkeit nicht ausgeübt wird. Der folgende Satz gibt eine vollständige Antwort, wann dies der Fall ist oder wann der Optionsinhaber sicher optiert (s. a. [Shi2], S. 753 ff.).

3.4 Satz *Es gilt*

$$P(\tau^* < \infty) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \hat{\mu} \leq \frac{\sigma^2}{2} \text{ oder } x \leq x^* \\ \left(\frac{x}{x^*}\right)^{1-\frac{2\hat{\mu}}{\sigma^2}}, & \text{falls } \hat{\mu} > \frac{\sigma^2}{2} \text{ und } x > x^* \end{cases}.$$

Beweis. Dass die Stoppzeit $\tau^* = \inf\{t \geq 0 \,|\, S_t \leq x^*\}$ für $x \leq x^*$ fast sicher endlich ist, folgt sofort aus $\tau^* = 0$ P-fast sicher. Auch im Fall $\mu \leq 0$ (und

$x > x^*$) ist die Aussage wegen

$$P(\tau^* < \infty) = P\left(\min_{t\geq 0}(\sigma W_t + \mu t) \leq \ln \frac{x^*}{x}\right) = 1$$

unmittelbar einzusehen. Damit ist also nur noch der letzte Teil der behaupteten Aussage zu verifizieren, was zwar mit ein wenig Mühen verbunden ist, aber auch Resultate von eigenständigem Interesse generiert. Wir definieren zunächst das *laufende Maximum* einer Brownschen Bewegung $(B_t)_{t\geq 0}$ durch

$$B_t^* := \sup_{0\leq s\leq t} B_s$$

und formulieren folgende bemerkenswerte Feststellung:

3.5 Lemma *Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ eine Standard Brownsche Bewegung und $(W_t^*)_{t\geq 0}$ das laufende Maximum von $(W_t)_{t\geq 0}$. Für alle $t > 0$, $y \geq 0$, und $x > 0$ gilt die Identität*

$$P(W_t^* \geq x, W_t \leq x - y) = P(W_t > x + y).$$

Beweis. Für $\tau_x := \inf\{t \geq 0 \,|\, W_t = x\}$ erhalten wir zunächst die Mengengleichheit

$$\{W_t^* \geq x\} = \{\tau_x \leq t\}.$$

$(\widetilde{W}_t)_{t\geq 0}$ bezeichne die in Satz 1.18 definierte Standard Brownsche Bewegung mit der Stoppzeit $\tau = \tau_x$. Ferner sei $\widetilde{\tau}_x = \inf\{t \geq 0 \,|\, \widetilde{W}_t = x\}$. Dann gilt $\tau_x = \widetilde{\tau}_x$ und somit

$$\begin{aligned}
P(W_t^* &\geq x, W_t < x - y) \\
&= P(\widetilde{\tau}_x \leq t, \widetilde{W}_t < x - y) \\
&= P(\tau_x \leq t, 2W_{\tau_x} - W_t < x - y) \\
&= P(\tau_x \leq t, W_t > x + y) \\
&= P(W_t > x + y),
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile die einfache Inklusion $\{W_t > x + y\} \subset \{W_t^* \geq x\}$ ausgenutzt wurde. $\square$

Es ergeben sich aus diesem Lemma einige interessante wie überraschende Konsequenzen (vgl. [Stee], S. 68 ff.), für unsere Zwecke ist vor allem das folgende Resultat von Bedeutung (s. [Irle], S. 161 ff. für $\sigma = 1$).

3.6 Satz *Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung mit Volatilität $\sigma > 0$ und Drift $\mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $z \geq x$*

$$P(B_t \leq x, B_t^* < z) = \Phi\left(\frac{x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{\frac{2\mu z}{\sigma^2}}\Phi\left(\frac{x - 2z - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right).$$

Beweis. Es bezeichne in diesem Beweis $(W_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung mit Volatilität σ bezüglich P. Q bezeichne das Wahrscheinlichkeitsmaß definiert durch

$$\frac{dQ}{dP}|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2}W_t - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}t\right) =: L_t.$$

Nach dem Satz von Girsanov (vgl. Satz 2.5) ist dann $(W_s)_{s\in[0;t]}$ eine Brownsche Bewegung mit Volatilität σ und Drift μ bezüglich Q. Daher gilt

$$\begin{aligned} & P(B_t \leq x, B_t^* < z) \\ &\quad = Q(W_t \leq x, W_t^* < z) \\ &\quad = \int_{\{W_t \leq x, W_t^* < z\}} L_t \, dP \end{aligned} \tag{3.9}$$

mit der $\mathcal{F}_t$-messbaren Menge $\{W_t \leq x, W_t^* < z\}$. Eine Anwendung von Lemma 3.5 ergibt

$$\begin{aligned} & P(W_t \leq x, W_t^* < z) \\ &\quad \overset{(a)}{=} P(W_t \leq x) - P(W_t \leq x, W_t^* \geq z) \\ &\quad \overset{(b)}{=} P(W_t \leq x) - P(W_t > 2z - x) \\ &\quad \overset{(c)}{=} \Phi\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{t}}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{2z - x}{\sigma\sqrt{t}}\right). \end{aligned}$$

Dabei begründet (a) eine einfache Mengengleichheit, (b) ist gerade die Anwendung von Lemma 3.5 und in (c) haben wir davon Gebrauch gemacht, dass $W_t/\sigma\sqrt{t}$ bezüglich P $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt ist.

An dieser Stelle soll das bedingte Wahrscheinlichkeitsmaß $P(W_t \in \cdot \,|\, W_t^* < z)$ betrachtet werden, das die Verteilungsfunktion

$$P(W_t \leq x \,|\, W_t^* < z) = \begin{cases} 1, & x > z \\ (P(W_t^* < z))^{-1} \left[\Phi\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{t}}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{2z-x}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right], & x \leq z \end{cases}$$

besitzt. Differenzieren liefert die Dichte

$$\begin{aligned} h(y) &= \frac{\partial}{\partial y} P(W_t \leq y \,|\, W_t^* < z) \\ &= \begin{cases} 0, & y > z \\ (\sigma\sqrt{t}P(W_t^* < z))^{-1} \left[\varphi\left(\frac{y}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \varphi\left(\frac{2z-y}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right], & y \leq z. \end{cases} \end{aligned}$$

Damit kann nun (3.9) berechnet werden. Es gilt

$$\int_{\{W_t \leq x, W_t^* < z\}} L_t \, dP = P(W_t^* < z) \int_{\{W_t \leq x\}} L_t \, dP(\cdot \,|\, W_t^* < z).$$

Mit

$$f(y) = 1_{(-\infty,x]}(y) \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2} y - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} t \right)$$

folgt

$$\begin{aligned} &\int_{\{W_t \leq x, W_t^* < z\}} L_t \, dP \\ &= \int f(y) P(W_t^* < z) \, dP(W_t \in \cdot \,|\, W_t^* < z) \\ &= \int f(y) P(W_t^* < z) h(y) \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left[\varphi\left(\frac{y}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \varphi\left(\frac{2z-y}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right] 1_{(-\infty;x]}(y) \\ &\quad \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2} y - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} t \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\exp\left(-\frac{y^2}{2t\sigma^2} \right) - \exp\left(-\frac{(2z-y)^2}{2t\sigma^2} \right) \right] \\ &\quad \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2} y - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} t \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma} \exp\left(-\frac{y^2}{2t\sigma^2} + \frac{\mu}{\sigma^2} y - \frac{\mu^2 t}{2\sigma^2} \right) dy - \\ &\quad \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma} \exp\left(-\frac{(y-2z)^2}{2t\sigma^2} + \frac{\mu}{\sigma^2} y - \frac{\mu^2 t}{2\sigma^2} \right) dy. \end{aligned}$$

Wegen $-(y-2z)^2+2y\mu t-\mu^2t^2 = -(y-2z-\mu t)^2+4z\mu t$ für alle z gilt damit

$$\begin{aligned}\int_{\{W_t\le x, W_t^*<z\}} L_t\,dP &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma}\exp\left(\frac{(y-\mu t)^2}{2t\sigma^2}\right)dy - \\ &\quad \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma}\exp\left(-\frac{(y-2z-\mu t)^2}{2t\sigma^2}+\frac{4z\mu t}{2t\sigma^2}\right)dy \\ &= \Phi\left(\frac{x-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{\frac{2\mu z}{\sigma^2}}\Phi\left(\frac{x-2z-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right),\end{aligned}$$

was in Verbindung mit (3.9) den Beweis abschließt. □

3.7 Korollar *Für $\mu<0$ gilt*

$$P\left(\sup_{t\ge 0}(\sigma W_t+\mu t)\le x\right) = 1-\exp\left(\frac{2\mu x}{\sigma^2}\right).$$

Ist $\mu\ge 0$, so gilt $P\left(\sup_{t\ge 0}(\sigma W_t+\mu t)\le x\right)=0$.

Beweis. Im vorstehenden Satz setzen wir $z=x$ und bemerken die Gültigkeit der Identität

$$\{B_t^*<x\} = \{B_t\le x, B_t^*<x\}.$$

Damit erhalten wir auf Grund der Stetigkeit des unbestimmten Integrals

$$\begin{aligned}P\left(\sup_{t\ge 0}(\sigma W_t+\mu t)\le x\right) &= \lim_{t\to\infty} P(B_t^*\le x) \\ &= \lim_{t\to\infty} P(B_t\le x, B_t^*<x) \\ &= \lim_{t\to\infty}\left[\Phi\left(\frac{x-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}}\Phi\left(\frac{-x-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right] \\ &= 1-\exp\left(\frac{2\mu x}{\sigma^2}\right).\end{aligned}$$

Die zweite Aussage ist trivial. □

Damit können wir nun die gewünschte Aussage beweisen. Seien also wieder

$\tau^* = \inf\{t \geq 0 \mid S_t \leq x^*\}$, $\mu > 0$ und $x > x^*$. Dann gilt

$$\begin{aligned} P(\tau^* = \infty) &= P\left(\inf_{t\geq 0} S_t > x^*\right) \\ &= P\left(\inf_{t\geq 0}[\sigma W_t + \mu t] > \ln \frac{x^*}{x}\right) \\ &= P\left(\sup_{t\geq 0}[-\sigma W_t - \mu t] < \ln \frac{x}{x^*}\right). \end{aligned}$$

Wir benutzen nun das vorstehende Korollar und die Tatsache, dass mit $(W_t)_{t\geq 0}$ auch $(-W_t)_{t\geq 0}$ eine Standard Brownsche Bewegung ist, für die weitere Rechnung

$$\begin{aligned} P(\tau^* = \infty) &= P\left(\sup_{t\geq 0}[\sigma W_t + (-\mu)t] \leq \ln \frac{x}{x^*}\right) \\ &= 1 - \exp\left(\frac{2(-\mu)\ln \frac{x}{x^*}}{\sigma^2}\right) \\ &= 1 - \left(\frac{x}{x^*}\right)^{-\frac{2\mu}{\sigma^2}} = 1 - \left(\frac{x}{x^*}\right)^{1-\frac{2\hat{\mu}}{\sigma^2}}. \end{aligned}$$

Mit $P(\tau^* < \infty) = 1 - P(\tau^* = \infty)$ erhält man unmittelbar die eingangs behauptete Aussage. $\square$

Falls man an Stelle einer Put Option eine Call Option betrachtet, so ändert sich der innere Wert der Option: Da der Investor nur dann von seinem Recht Gebrauch macht, den Call auszuüben, wenn der Aktienkurs über dem Ausübungspreis liegt, erhält man als neue Zielfunktion

$$V^*(x) := \sup_{\tau} E(e^{-r\tau}(S_\tau - K)^+ 1_{\{\tau<\infty\}}).$$

Die oben benutzte Beweismethode funktioniert hier völlig analog. Daher soll an dieser Stelle nur das Resultat angegeben werden. Zudem sei erwähnt, dass sich bei den alternativen Beweisverfahren die Herleitung einer optimalen Stoppzeit bei einem Call als geringfügig schwieriger erweist, da die Funktion $\psi(y) := (y - K)^+$ (also der innere Wert des Calls) unbeschränkt ist (vgl. [Shi2], S. 764).

3.8 Satz *Seien* $r > 0$ *und*

$$\begin{aligned}
\gamma &= -\left(\frac{\hat{\mu}}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{\hat{\mu}}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} \\
x^* &= K\frac{\gamma}{\gamma - 1} \\
C^* &= \gamma^{-\gamma}\left(\frac{\gamma - 1}{K}\right)^{\gamma - 1}.
\end{aligned}$$

Dann existiert eine eindeutig bestimmte Stoppzeit τ^*, *die das Stoppproblem*

$$V^*(x) = \sup_{\tau} E(e^{-r\tau}(S_\tau - K)^+ 1_{\{\tau < \infty\}})$$

löst, und zwar

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0 \,|\, S_t \geq x^*\}.$$

Es gilt $V^*(x) = V(x)$, *wobei* V *durch*

$$V(x) := \begin{cases} C^* x^\gamma, & x < x^* \\ x - K, & x \geq x^* \end{cases}$$

gegeben ist. Des Weiteren gilt

$$P(\tau^* < \infty) = \begin{cases} 1, & \hat{\mu} \geq \frac{\sigma^2}{2} \text{ oder } x \geq x^* \\ \left(\frac{x}{x^*}\right)^{1 - \frac{2\hat{\mu}}{\sigma^2}}, & \hat{\mu} < \frac{\sigma^2}{2} \text{ und } x < x^* \end{cases}.$$

□

Kapitel 4

Optimales Stoppen bei beschränkten Funktionen

Ziel ist es, in diesem Kapitel einen allgemeineren Lösungsansatz zu wählen, der es uns ermöglicht, Stoppprobleme der Form (3.1) für etwas kompliziertere Funktionen ψ zu lösen (vgl. [Bei], S. 98-102). Wir betrachten den Prozess $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$, gegeben durch

$$Z_t := e^{-rt}\psi_x(B_t)$$

mit einer reellwertigen messbaren Funktion ψ_x und dem Startwert $\psi_x(0)$. $B = (B_t)_{t\geq 0}$ beschreibe eine Brownsche Bewegung mit Drift $\mu \in \mathbb{R}$ und Volatilität $\sigma > 0$, r sei eine positive Konstante. Im letzten Kapitel haben wir den konkreten Prozess Z mit $\psi_x(B_t) = (K - xe^{B_t})^+$ ausführlich untersucht. In diesem Kapitel wollen wir den Prozess Z bei möglichst minimalen Forderungen an ψ_x auf Optimalitätsaussagen überprüfen, wobei im letzten Teil erneut eine spezielle Funktion ψ_x näher betrachtet wird.

4.1 Einseitige Schranken

Im letzten Kapitel haben wir bereits gesehen, wie fruchtbar sich eine Zerlegung $Z_t := g(X_t)M_t$ des Ausgangsprozesses $(Z_t)_{t\geq 0}$ in Hinblick auf Optimalitätsuntersuchungen gestaltet. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels leiten wir eine optimale Ausübungsstrategie her für den Fall, dass die Funktion g einseitig nach oben beschränkt ist.

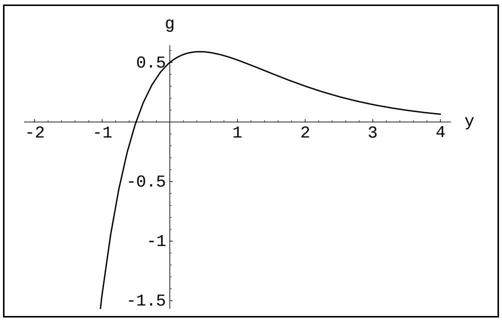

Abbildung 4.1: Graph von g mit $\psi_x(y) = x + y$

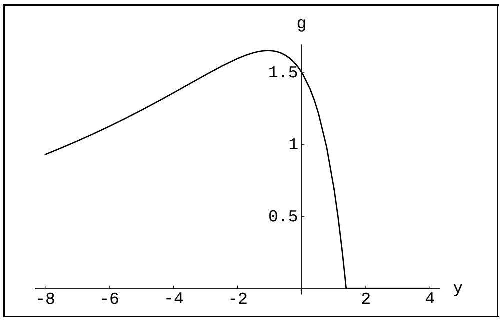

Abbildung 4.2: Graph von g mit $\psi_x(y) = (K - xe^y)^+$

4.1.1 Die optimale Stoppzeit

Das in diesem Abschnitt behandelte etwas allgemeinere Stoppproblem lautet folglich, die Funktion

$$V^*(x) := \sup_\tau E(e^{-r\tau}\psi_x(B_\tau)1_{\{\tau<\infty\}})$$

zu berechnen. Wir beginnen mit einigen Vorbemerkungen. Seien

$$\alpha_1 = -\frac{\mu}{\sigma^2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{\sigma^4} + \frac{2r}{\sigma^2}} \tag{4.1}$$

und

$$\alpha_2 = -\frac{\mu}{\sigma^2} - \sqrt{\frac{\mu^2}{\sigma^4} + \frac{2r}{\sigma^2}}. \tag{4.2}$$

Dann sind α_1 und α_2 offenkundig gerade die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\frac{(\alpha\sigma)^2}{2} + \alpha\mu - r = 0. \tag{4.3}$$

Die Abschätzung $\sqrt{\frac{\mu^2}{\sigma^4} + \frac{2r}{\sigma^2}} > |\frac{\mu}{\sigma^2}|$ liefert die einfache, aber wichtige Beziehung

$$\alpha_2 < 0 < \alpha_1. \tag{4.4}$$

Wir betrachten im Folgenden die durch

$$M_t^{(1)} := e^{-rt} e^{\alpha_1 B_t}$$

und

$$M_t^{(2)} := e^{-rt} e^{\alpha_2 B_t}$$

definierten positiven Prozesse $M_t^{(i)}, i = 1, 2$, mit den Startwerten $M_0^{(1)} = M_0^{(2)} = 1$. Auch hier erhält man unter Verwendung von Lemma 1.14 und der Rechnung

$$\begin{aligned} M_t^{(i)} &= e^{-rt} e^{\alpha_i B_t} \\ &= e^{(\alpha_i \sigma) W_t + (\alpha_i \mu - r) t} \\ &\overset{(4.3)}{=} e^{(\alpha_i \sigma) W_t - \frac{(\alpha_i \sigma)^2}{2} t} \end{aligned}$$

die gewünschte Aussage, dass die Prozesse $M_t^{(i)}, i = 1, 2$ stetige Martingale bilden. Auf diese Weise erhalten wir die Zerlegungen $Z_t = g_i(B_t) M_t^{(i)}, i = 1, 2$ des Ausgangsprozesses mit den Funktionen

$$g_i(y) := e^{-\alpha_i y} \psi_x(y),$$

und wir können das Hauptresultat dieses Abschnitts formulieren.

4.1 Satz *Sei $C_1 := C_{1,x} := \sup_{y \in \mathbb{R}} g_1(y)$. Falls $0 < C_1 < \infty$ und $C_1 = g_1(y_1)$ für ein $y_1 > 0$ gilt, so folgt*

$$V^*(x) = C_1.$$

Es existiert eine optimale Stoppzeit τ^*, die gegeben ist durch

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0 : B_t \geq y_1\}.$$

Beweis. Bezeichnet $Q^{(1)}$ das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t\right)$ mit der Standardfiltration $\mathcal{F}$, das für alle $0 \leq t < \infty$ durch

$$Q^{(1)}(A) := \int_A M_t^{(1)} \, dP; \qquad A \in \mathcal{F}_t$$

gegeben ist, so folgt aus Satz 2.4, dass $Q^{(1)}(\tau^* < \infty) = 1$ die Optimalität von τ^* und weiter

$$\sup_\tau E\left(Z_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}\right) = g_1(y_1) = C_1$$

impliziert. Der Nachweis benutzt nahezu dieselben Argumente wie Lemma 3.3, wir geben ihn dennoch aus Vollständigkeitsgründen an.

4.2 Lemma *Es gilt* $Q^{(1)}(\tau^* < \infty) = 1$.

Beweis. Mit $M_t^{(1)} = e^{(\alpha_1\sigma)W_t - \frac{(\alpha_1\sigma)^2}{2}t}$ und dem Satz von Girsanov (Satz 2.5) folgt, dass W Brownsche Bewegung mit Volatilität σ und Drift $\alpha_1\sigma > 0$ unter $Q^{(1)}$ ist, d.h. der Prozess

$$\widetilde{W}_t := W_t - \alpha_1\sigma t \tag{4.5}$$

bildet eine Standard Brownsche Bewegung unter $Q^{(1)}$. Unter Berücksichtigung von (4.1) gilt weiter

$$\alpha_1\sigma^2 + \mu = \sigma^2\sqrt{\frac{\mu^2}{\sigma^4} + \frac{2r}{\sigma^2}} > 0,$$

sodass Ausnutzen der Beziehung (4.5) die Identität

$$\begin{aligned} Q^{(1)}\left(\tau^* < \infty\right) &= Q^{(1)}\left(\max_{t\geq 0} B_t \geq y_1\right) \\ &= Q^{(1)}\left(\max_{t\geq 0}(\sigma W_t + \mu t) \geq y_1\right) \\ &= Q^{(1)}\left(\max_{t\geq 0}(\sigma \widetilde{W}_t + (\alpha_1\sigma^2 + \mu)t \geq y_1\right) \end{aligned}$$

liefert. Die positive Drift des Prozesses $\sigma\widetilde{W}_t + (\alpha_1\sigma^2+\mu)t$ unter $Q^{(1)}$ liefert schließlich die behauptete Aussage. □

Falls wir die Funktion $g_2(y) = e^{-\alpha_2 x}\psi_x(y)$ anstelle von g_1 betrachten und entsprechend $M_t^{(1)}$ und $Q^{(1)}$ durch $M_t^{(2)} := e^{-rt}e^{\alpha_2 B_t}$ und $Q^{(2)}(A) := \int_A M_t^{(2)}\, dP$ mit $A \in \mathcal{F}_t$ ersetzen, so erhält man mit nahezu identischen Argumenten das folgende Resultat.

4.3 Satz *Sei* $C_2 := C_{2,x} := \sup_{y\in\mathbb{R}} g_2(y)$*. Falls* $0 < C_2 < \infty$ *und* $C_2 = g_2(y_2)$ *für ein* $y_2 < 0$ *gilt, so folgt*

$$V^*(x) = C_2.$$

Es existiert eine optimale Stoppzeit τ^**, die gegeben ist durch*

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0 : B_t \leq y_2\}.$$

Die Vermutung, dass nur eine der letzten beiden Situationen vorliegen kann oder genauer, dass nur eine der möglichen Zerlegungen des Prozesses Optimalitätsaussagen zulässt, soll noch mathematisch präzisiert werden.

4.4 Bemerkung Die Voraussetzungen der Sätze 4.1 und 4.3 schließen sich gegenseitig aus.

Beweis. Für den Beweis macht es keinen Unterschied, ψ_x durch ψ zu ersetzen. Sei also die erste Voraussetzung von Satz 4.1 erfüllt, d.h. gelte

$$0 < C_1 = \sup_{y\in\mathbb{R}} g_1(y) < \infty$$

mit $g_1(y) = e^{-\alpha_1 y}\psi(y)$ und $C_1 = g_1(y_1)$ für ein $y_1 > 0$. Diese Voraussetzung impliziert unmittelbar die einfache, aber mehrfach benötigte Tatsache $\psi(y_1) > 0$. Wegen $\alpha_2 < 0 < \alpha_1$ gilt dann für alle $y < 0$ mit $\psi(y) > 0$ die folgende Ungleichungskette

$$e^{-\alpha_1 y_1}\psi(y_1) \geq e^{-\alpha_1 y}\psi(y) > e^{-\alpha_2 y}\psi(y). \tag{4.6}$$

$y_1 > 0$ und $\alpha_2 < 0 < \alpha_1$ liefern des Weiteren $e^{-\alpha_2 y_1}\psi(y_1) > e^{-\alpha_1 y_1}\psi(y_1)$, was in Verbindung mit (4.6) sofort

$$e^{-\alpha_2 y_1}\psi(y_1) > e^{-\alpha_2 y}\psi(y) \text{ für alle } y < 0 \text{ mit } \psi(y) > 0$$

ergibt. Wegen $\psi(y_1) > 0$ gilt diese Ungleichung natürlich auch für alle $y < 0$ mit $\psi(y) \leq 0$. Insgesamt erhält man demnach

$$e^{-\alpha_2 y_1}\psi(y_1) > e^{-\alpha_2 y}\psi(y) \text{ für alle } y < 0,$$

was aber direkt bedeutet, dass $\sup_{y\in\mathbb{R}} e^{-\alpha_2 y}\psi(y)$ nicht angenommen werden kann für ein $y_2 < 0$. Die noch offenen Implikationen können entsprechend gezeigt werden. □

4.1.2 Das Modell von Bachelier

In diesem Abschnitt werden wir eine einfache und zugleich klassische Anwendung der letzten Ergebnisse präsentieren. Zunächst stellen wir eine elementare Feststellung vorweg.

4.5 Korollar *Falls ψ_x stetig differenzierbar ist, so genügt ein möglicher Extremwert von g_i der Gleichung*

$$\frac{\partial}{\partial y} \ln\left(\psi_x(y)\right) = \alpha_i.$$

Beweis. Die notwendige Bedingung $g_i'(y) = 0$ und die elementare Rechnung

$$\begin{aligned} (e^{-\alpha_i y}\psi_x(y))' &= e^{-\alpha_i y}(\psi_x'(y) - \alpha_i \psi_x(y)) = 0 \\ \Leftrightarrow &\quad \frac{\psi_x'(y)}{\psi_x(y)} = \alpha_i \\ \Leftrightarrow &\quad \frac{\partial}{\partial y} \ln \psi_x(y) = \alpha_i \end{aligned}$$

liefern unmittelbar die Behauptung. □

In dem im Jahre 1900 veröffentlichten Modell von Bachelier (1870 - 1946) wird der Kursverlauf des betrachteten Finanzgutes durch die Funktion $\psi_x(B_t) := x + B_t$ beschrieben, wobei $x = \psi_x(0)$ den Startwert des Finanzgutes bezeichnet.

Da die Brownsche Bewegung $(B_t)_{t \geq 0}$ mit positiver Wahrscheinlichkeit negative Werte annimmt, ist dieses Modell für eine Übertragung auf die meisten Finanzgüter eher ungeeignet, sodass wir uns im Weiteren auf die Darstellung der mathematischen Resultate beschränken. Wir betrachten sofort den allgemeinen Fall $x \in \mathbb{R}$ und werden sehen, dass mit den vorangegangenen Überlegungen schnell eine Stoppzeit angegeben werden kann, die den Erwartungswert der diskontierten Auszahlung

$$f_t(\omega) := e^{-rt}(x + B_t(\omega))$$

maximiert.

4.6 Satz *Es existiert eine Stoppzeit τ^*, die in dem Sinne optimal ist, dass sie das Stoppproblem*

$$V^*(x) := \sup_{\tau} E\left(e^{-r\tau}(x + B_\tau)1_{\{\tau<\infty\}}\right)$$

löst. Dabei ist τ^* eindeutig bestimmt und besitzt die Form

$$\tau^* = \inf\left\{t \geq 0 \,|\, x + B_t \geq \frac{1}{\alpha_1}\right\}.$$

Des Weiteren gilt $V^*(x) = V(x)$ mit

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_1} e^{\alpha_1 x - 1} & \text{falls } x < \frac{1}{\alpha_1} \\ x & \text{falls } x \geq \frac{1}{\alpha_1} \end{cases} .$$

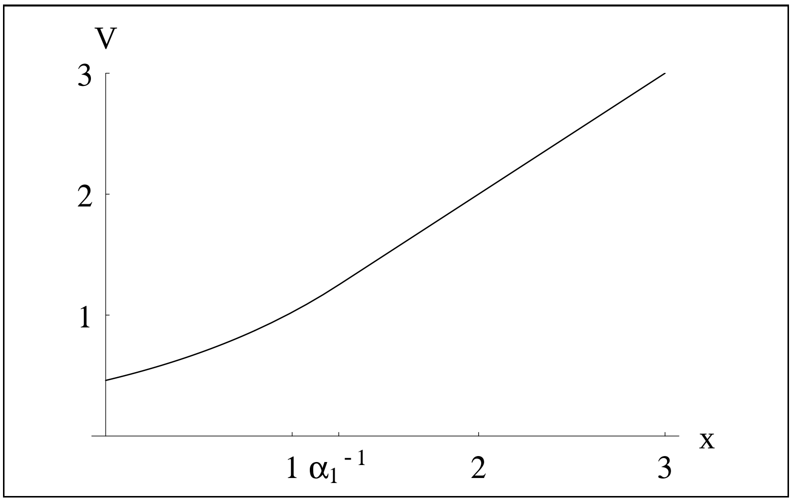

Abbildung 4.3: Lösung des Modells von Bachelier

Beweis. Wegen $\psi_x(y) = x + y$ ist die Funktion $g_1(y) = e^{-\alpha_1 y}(x + y)$ stetig differenzierbar, und man erhält gemäß Korollar 4.5

$$\frac{\partial}{\partial y} \ln(x + y) = \frac{1}{x + y} = \alpha_1 \Leftrightarrow y_1 = \frac{1}{\alpha_1} - x.$$

g_1 besitzt die einzige Nullstelle $-x$, ferner gilt

$$g > 0 \Leftrightarrow y > -x$$

und $\lim_{y\to\infty} g(y) = 0$. Da y_1 die einzig mögliche Extremstelle ist, folgt, dass g in y_1 das eindeutig bestimmte Maximum annimmt mit Funktionswert

$$g(y_1) = \frac{1}{\alpha_1} e^{x\alpha_1 - 1} > 0.$$

Für $x < \frac{1}{\alpha_1}$ ist $y_1 > 0$, und Satz 4.1 liefert schließlich die Optimalität von $\tau^* = \inf\{t \geq 0 \mid B_t \geq \frac{1}{\alpha_1} - x\}$ und $V^*(x) = \frac{1}{\alpha_1} e^{x\alpha_1 - 1}$ für $x < \frac{1}{\alpha_1}$.

Im zweiten Teil des Beweises werden wir die Identität

$$V^*(x) = \sup_\tau E\left(e^{-r\tau}(x + B_\tau)1_{\{\tau<\infty\}}\right) = V(x)$$

für $x \geq \frac{1}{\alpha_1}$ mittels einiger Resultate aus dem Bereich der stochastischen Integration explizit nachrechnen, aus der wegen $V(x) = x$ und $\tau^* = 0$ unmittelbar die behauptete Aussage folgt. Die Ungleichung

$$V^*(x) = \sup_\tau E\left(e^{-r\tau}(x + B_\tau)1_{\{\tau<\infty\}}\right) \geq V(x)$$

ist evident, sodass nur die umgekehrte Ungleichung $V(x) \geq V^*(x)$ zu zeigen bleibt. Dazu betrachten wir die Funktion $f(t,x) := e^{-rt}V(x)$. Anwendung der Itô-Formel (vgl. Satz 2.13) liefert

$$\begin{aligned} df(t, X_t) &= -re^{-rt}V(X_t)\,dt + e^{-rt}V'(X_t)\,dX_t \\ &\quad + \frac{1}{2}e^{-rt}V''(X_t)\sigma^2\,dt. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Unter Berücksichtigung der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = \sigma\,dW_t + \mu\,dt, \qquad X_0 = x$$

erhalten wir somit

$$\begin{aligned} df(t, X_t) &= e^{-rt}\left[-rV(X_t) + \mu V'(X_t) + \frac{\sigma^2}{2}V''(X_t)\right]dt \\ &\quad + \sigma e^{-rt}V'(X_t)\,dW_t. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Gemäß Satz 2.7 bildet der durch

$$M_t := \sigma e^{-rt}\,dW_t$$

definierte Prozess $(M_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges Martingal, und unter Berücksichtigung von

$$V(X_t) = X_t \Leftrightarrow X_t \geq \frac{1}{\alpha_1}$$

erhalten wir die Ungleichung

$$\begin{aligned} e^{-rt}(-rX_t + \mu) &\leq e^{-rt}\left(-\frac{r}{\alpha_1} + \mu\right) \\ &\overset{(4.3)}{=} e^{-rt}\left(-\frac{(\alpha_1\sigma)^2}{2}\right) \leq 0. \end{aligned}$$

Damit folgt aus (4.7) und (4.8)

$$e^{-rt}V(X_t) \leq V(X_0) + M_t$$

und unter Verwendung von $X_0 = x$

$$V(x) \geq e^{-rt}V(X_t) - M_t.$$

Mit $EM_{\tau\wedge n} = 0$ liefert das Lemma von Fatou für jede Stoppzeit τ

$$\begin{aligned} V(x) &\geq \liminf_{n\to\infty} E\left(e^{-r(\tau\wedge n)}V(X_{\tau\wedge n})\right) \\ &\geq E\left(\liminf_{n\to\infty} e^{-r(\tau\wedge n)}V(X_{\tau\wedge n})1_{\{\tau<\infty\}}\right) \\ &= E\left(e^{-r\tau}V(X_\tau)1_{\{\tau<\infty\}}\right). \end{aligned}$$

Wenn man auf beiden Seiten zum Supremum übergeht, erhält man die gewünschte Aussage

$$V(x) \geq \sup_\tau E\left(e^{-r\tau}V(X_\tau)1_{\{\tau<\infty\}}\right) = V^*(x),$$

und damit die Identität $V^*(x) = V(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. □

Die Ähnlichkeit des Modells von Bachelier zu der in Kapitel 3 ausführlich behandelten Put Option ist offenkundig. Daher sei noch erwähnt:

4.7 Bemerkung Es lässt sich einfach feststellen, dass auch das Ergebnis aus Kapitel 3 ein Spezialfall dieses Kapitels ist.

Beweis. Wir betrachten die Funktionen $\psi_x(y) = (K - xe^y)^+$ und

$$g_2(y) = e^{-\alpha_2 y}(K - xe^y)^+.$$

Aus Korollar 4.5 folgt, dass ein möglicher Extremwert y_2 der Bedingung $\frac{\partial}{\partial y}\ln(\psi_x(y)) = \alpha_2$ genügen muss, die sich nach einigen elementaren Rechenschritten zu

$$y_2 = \ln \frac{\alpha_2 K}{x(\alpha_2 - 1)}$$

vereinfacht. Bei näherer Betrachtung der Funktion g_2 ist klar, dass sie an der Stelle y_2 in der Tat ein Maximum besitzt mit zugehörigem positivem Funktionswert

$$\begin{aligned} C_{2,x} := g_2(y_2) &= \left(\frac{\alpha_2 K}{\alpha_2 - 1}\right)^{-\alpha_2} x^{\alpha_2}\left[K - \frac{\alpha_2 K}{x(\alpha_2 - 1)}\right] \\ &= \left(\frac{\alpha_2 K}{\alpha_2 - 1}\right)^{-\alpha_2} x^{\alpha_2}\left[-\frac{K}{\alpha_2 - 1}\right] \\ &= (-\alpha_2)^{-\alpha_2}\left(\frac{K}{1-\alpha_2}\right)^{-\alpha_2+1} x^{\alpha_2}. \end{aligned}$$

Wegen $y_2 < 0$ unter der Voraussetzung $x > \frac{\alpha_2 K}{\alpha_2 - 1}$ erhält man mit Satz 4.3 unter Beachtung von $\alpha_2 = -\gamma$ gerade die dort gezeigte Identität $V^*(x) = \gamma^\gamma \left(\frac{K}{\gamma+1}\right)^{\gamma+1} x^{-\gamma}$. $\square$

4.2 Zweiseitige Schranken

Nach der ausführlichen Behandlung einer Zerlegung $Z_t = g(X_t)M_t$ des Ausgangsprozesses in ein Martingal M und eine einseitig nach oben beschränkte Funktion g soll nun der Fall betrachtet werden, dass g in beide Richtungen nach oben beschränkt ist.

4.2.1 Die optimale Stoppzeit

In gewisser Analogie zu Abschnitt 4.1 stellt sich das Problem,

$$V^*(x) = \sup_\tau E(e^{-r\tau}\psi_x(B_\tau)1_{\{\tau<\infty\}})$$

zu berechnen, wobei die Funktion ψ_x hier folgenden echten Ungleichungen genüge:

$$\sup_{y\leq 0}(e^{-\alpha_1 y}\psi_x(y)) > \sup_{y\geq 0}(e^{-\alpha_1 y}\psi_x(y)) > 0 \tag{4.9}$$

$$\sup_{y\geq 0}(e^{-\alpha_2 y}\psi_x(y)) > \sup_{y\leq 0}(e^{-\alpha_2 y}\psi_x(y)) > 0. \tag{4.10}$$

Zwei Beispiele für Funktionen, die diese Bedingungen erfüllen, sind $\psi_x(y) = x + y^2$ und die im letzten Teil dieses Abschnitts ausführlich behandelte Funktion $\psi_x(y) = \max\{(L - xe^y)^+, (xe^y - K)^+\}$ für $\alpha_1 > 1$.

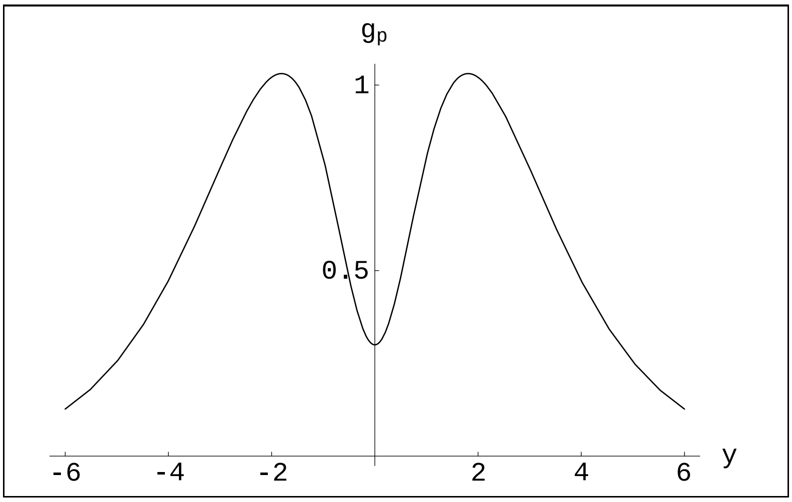

Abbildung 4.4: Graph von g mit $\psi_x(y) = x + y^2$

Dass damit tatsächlich eine neue Situation gegeben ist, zeigt die anschließende Bemerkung.

4.8 Bemerkung Die Bedingungen (4.9), (4.10) und die Voraussetzungen der Sätze 4.1 und 4.3 in Abschnitt 4.1 schließen sich gegenseitig aus.

Beweis. Es seien die Voraussetzungen von Satz 4.1 erfüllt, d.h es gelte

$$0 < C_1 := \sup_{y\in\mathbb{R}}(e^{-\alpha_1 y}\psi_x(y)) < \infty$$

und

$$C_1 = e^{-\alpha_1 y_1}\psi_x(y_1) \text{ für ein } y_1 > 0.$$

Dann ist offensichtlich die erste Ungleichung in (4.9) verletzt. Völlig analog ist (4.10) nicht mit den Voraussetzungen in Satz 4.3 vereinbar. □

Damit scheinen die Überlegungen aus Abschnitt 4.1 für diese Problemstellung zunächst ungeeignet; es stellt sich jedoch heraus, dass die dort eingeführten Martingale $M_t^{(1)}$ und $M_t^{(2)}$ auch hier ihren Nutzen finden. Grundlegende Idee ist nämlich, die bereits angesprochenen Martingale miteinander zu kombinieren. Dazu bezeichne $(M_t)_{t\geq 0}$ den durch

$$M_t := pM_t^{(1)} + (1-p)M_t^{(2)}$$

definierten stochastischen Prozess, wobei $p \in (0;1)$ geeignet gewählt sei. Damit ist klar, dass M ein positives und stetiges Martingal bildet mit Startwert $M_0 = 1$.

Für den Ausgangsprozess $(Z_t)_{t\geq 0}$ mit $Z_t = e^{-rt}\psi_x(B_t)$ existiert somit die gewünschte Zerlegung $Z_t = g(X_t)M_t$, wobei die Funktion g durch

$$g_p(y) := \frac{\psi_x(y)}{pe^{\alpha_1 y} + (1-p)e^{\alpha_2 y}}$$

gegeben ist. Zunächst müssen wir die Funktion g_p genauer untersuchen; denn bisher ist noch nichts über einen geeigneten Wert für p ausgesagt.
Der nachstehende Satz besagt, dass die Voraussetzungen an ψ_x sicherstellen, dass ein Wert $p^* \in (0;1)$ existiert mit der Eigenschaft, dass die Funktion g_{p^*} sowohl auf $[0;\infty)$ als auch auf $(-\infty;0]$ ihr Maximum annimmt und dass diese Werte übereinstimmen (oder dass g_{p^*} in beide Richtungen nach oben unbeschränkt ist).

4.9 Satz *Sind (4.9) und (4.10) erfüllt, so existiert ein Wert $p^* \in (0;1)$ mit*

$$\sup_{y\geq 0} g_{p^*}(y) = \sup_{y\leq 0} g_{p^*}(y).$$

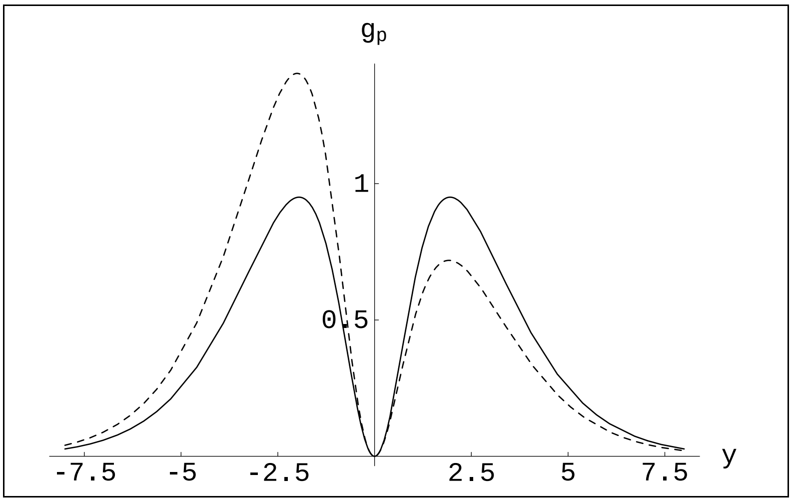

Abbildung 4.5: Graph von g_p mit $\psi_x(y) = y^2$ $(p = 1/2$ und $p = 1/3)$

Beweis. Wir setzen kürzer $\psi = \psi_x$. Wegen (4.9) existieren Werte $y_1 \geq 0$ und $y_2 \leq 0$ mit $\psi(y_1), \psi(y_2) > 0$, damit sind die Mengen $A_1 := \{y \geq 0 \mid \psi(y) > 0\}$ und $A_2 := \{y \leq 0 \mid \psi(y) > 0\}$ beide nichtleer. Da der Nenner von g_p stets positiv ist, gilt

$$\sup_{y\geq 0} g_p(y) = \sup_{y\in A_1} g_p(y) = \left(\inf_{y\in A_1} \frac{1}{g_p(y)}\right)^{-1}$$

und

$$\sup_{y\leq 0} g_p(y) = \sup_{y\in A_2} g_p(y) = \left(\inf_{y\in A_2} \frac{1}{g_p(y)}\right)^{-1}.$$

Leicht erhält man für alle $p \in (0; 1)$ aus (4.9) und (4.10) die folgenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned} 0 < \sup_{y\in A_1} g_p(y) &= \sup_{y\in A_1} \frac{\psi(y)}{pe^{\alpha_1 y} + (1-p)e^{\alpha_2 y}} \\ &= \sup_{y\in A_1} \frac{e^{-\alpha_1 y}\psi(y)}{p + (1-p)e^{(\alpha_2-\alpha_1)y}} \\ &\leq \frac{1}{p} \sup_{y\geq 0}(e^{-\alpha_1 y}\psi(y)) < \infty \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
0 < \sup_{y \in A_1} g_p(y) &= \sup_{y \in A_2} \frac{\psi(y)}{pe^{\alpha_1 y} + (1-p)e^{\alpha_2 y}} \\
&= \sup_{y \in A_2} \frac{e^{-\alpha_2 y}\psi(y)}{pe^{(\alpha_1-\alpha_2)y} + (1-p)} \\
&\leq \frac{1}{1-p} \sup_{y \leq 0} (e^{-\alpha_2 y}\psi(y)) < \infty.
\end{aligned}$$

Falls man ein festes y mit $\psi(y) > 0$ betrachtet, ist die Funktion

$$p \mapsto \frac{pe^{\alpha_1 y} + (1-p)e^{\alpha_2 y}}{\psi(y)}$$

linear, d.h. wir können abkürzend schreiben

$$\frac{pe^{\alpha_1 y} + (1-p)e^{\alpha_2 y}}{\psi(y)} = a_y p + b_y,$$

wobei $a_y := \frac{e^{\alpha_1 y} - e^{\alpha_2 y}}{\psi(y)}$ und $b_y := \frac{e^{\alpha_2 y}}{\psi(y)}$ die zugehörigen reellen Konstanten bezeichnen.

4.10 Lemma *Die Funktionen*

$$m_1(p) := \inf_{y \in A_1} \frac{pe^{\alpha_1 y_1} + (1-p)e^{\alpha_2 y_2}}{\psi(y)}$$

und

$$m_2(p) := \inf_{y \in A_2} \frac{pe^{\alpha_1 y_1} + (1-p)e^{\alpha_2 y_2}}{\psi(y)}$$

sind konkav mit Definitionsbereich (0;1) und Werten in $(0; \infty)$, m_1 *ist auf (0;1) streng monoton wachsend,* m_2 *streng monoton fallend.*

Beweis. Seien $p_1, p_2 \in (0; 1)$. Dann gilt für alle $0 \leq \lambda \leq 1$

$$\begin{aligned}
m_1(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2) &= \inf_{y \in A_1} (a_y(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2) + b_y) \\
&= \inf_{y \in A_1} (\lambda a_y p_1 + (1-\lambda)a_y p_2 + \lambda b_y + (1-\lambda)b_y) \\
&\geq \inf_{y \in A_1} (\lambda(a_y p_1 + b_y)) + \inf_{y \in A_1} (1-\lambda)(a_y p_2 + b_y)) \\
&= \lambda m_1(p_1) + (1-\lambda)m_1(p_2),
\end{aligned}$$

was die Konkavität von m_1 beweist. Wegen $\alpha_2 < 0 < \alpha_1$ erhält man leicht

$$y \in A_1 \Rightarrow a_y > 0 \quad \text{und} \quad y \in A_2 \Rightarrow a_y < 0,$$

was sofort die behaupteten Monotonieeigenschaften liefert. □

Als Nächstes sei eine Randuntersuchung vorgenommen; die gewünschten Abschätzungen liefern dann wiederum die Voraussetzungen (4.9) und (4.10).

$$\lim_{p\to 1} m_1(p) = \lim_{p\to 1} \frac{1}{\sup_{y\geq 0} g_p(y)} = \frac{1}{\sup_{y\geq 0}(e^{-\alpha_1 y}\psi(y))} < \infty$$

$$\lim_{p\to 0} m_2(p) = \lim_{p\to 0} \frac{1}{\sup_{y\leq 0} g_p(y)} = \frac{1}{\sup_{y\leq 0}(e^{-\alpha_2 y}\psi(y))} < \infty$$

sowie

$$\lim_{p\to 0} m_1(p) = \frac{1}{\sup_{y\geq 0}(e^{-\alpha_2 y}\psi(y))}$$

$$\lim_{p\to 1} m_2(p) = \frac{1}{\sup_{y\leq 0}(e^{-\alpha_1 y}\psi(y))},$$

wobei die übliche Konvention $\frac{1}{\infty} = 0$ getroffen werde.
Da nach (4.10) $\sup_{y\geq 0}(e^{-\alpha_2 y}\psi(y)) > \sup_{y\leq 0}(e^{-\alpha_2 y}\psi(y)) > 0$ gilt, folgt unmittelbar

$$\lim_{p\to 0}(m_1(p) - m_2(p)) < 0.$$

Genauso sieht man mit (4.9)

$$\lim_{p\to 1}(m_1(p) - m_2(p)) > 0.$$

Das beweist die Existenz eines Wertes $p^* \in (0;1)$ mit $m_1(p^*) - m_2(p^*) = 0$ bzw. $\sup_{y\geq 0} g_{p^*}(y) = \sup_{y\leq 0} g_{p^*}(y)$. □
Im letzten Satz ist p^* im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Das ändert sich, wenn die Funktion g_p ihr Maximum auf $[0;\infty)$ annimmt.

4.11 Lemma *Die Existenz eines Punktes $\tilde{y} > 0$ mit der Eigenschaft*

$$e^{-\alpha_1 \tilde{y}}\psi_x(\tilde{y}) = \sup_{y\geq 0}(e^{-\alpha_1 y}\psi_x(y))$$

ist hinreichend für die Eindeutigkeit von p^*.

Beweis. Angenommen, es existieren $0 < p^* < p^{**} < 1$ mit der Eigenschaft

$$m_1(p^*) - m_2(p^*) = 0 = m_1(p^{**}) - m_2(p^{**}),$$

dann folgt (da m_1 monoton wachsend und m_2 monoton fallend ist)

$$0 \geq m_1(p^*) - m_1(p^{**}) = m_2(p^*) - m_2(p^{**}) \geq 0,$$

was sofort

$$m_1(p^*) - m_1(p^{**}) = m_2(p^*) - m_2(p^{**}) = 0$$

impliziert. Damit erhält man unmittelbar

$$m_1(p^*) = m_1(p^{**}) \text{ und } m_2(p^*) = m_2(p^{**}) \text{ mit } p^* < p^{**}. \tag{4.11}$$

Im Folgenden betrachten wir nur noch die Funktion m_1, von der wir bereits wissen, dass sie monoton wachsend und konkav ist. Dann muss m_1 wegen der Eigenschaft (4.11) aber schon konstant sein auf dem Intervall $(p^*; 1)$, d.h. es gilt

$$m_1(p) = m_1(p^{**}) \text{ für alle } p \in (p^*; 1).$$

Damit ist der Wert von $m_1(p^{**})$ bereits bekannt (vgl. Beweis von Satz 4.9); man erhält

$$m_1(p^{**}) = \lim_{p \to 1} m_1(p) = \frac{1}{\sup_{y \geq 0}(e^{-\alpha_1 y}\psi_x(y))}. \tag{4.12}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} m_1(p^{**}) &= \inf_{y \in A_1} \frac{p^{**}e^{\alpha_1 y} + (1-p^{**})e^{\alpha_2 y}}{\psi_x(y)} \\ &\leq \frac{p^{**}e^{\alpha_1 \tilde{y}} + (1-p^{**})e^{\alpha_2 \tilde{y}}}{\psi_x(\tilde{y})} \\ &< \frac{p^{**}e^{\alpha_1 \tilde{y}} + (1-p^{**})e^{\alpha_1 \tilde{y}}}{\psi_x(\tilde{y})} = \frac{1}{e^{-\alpha_1 \tilde{y}}\psi_x(\tilde{y})}, \end{aligned}$$

wobei das Ungleichheitszeichen mit $\alpha_2 < 0 < \alpha_1$ und $\tilde{y} > 0$ begründet werden kann. Daraus folgt nach Voraussetzung

$$m_1(p^{**}) \quad < \quad \frac{1}{\sup_{y \geq 0} e^{-\alpha_1 y}\psi_x(y)}. \tag{4.13}$$

Den gewünschten Widerspruch liefern jetzt (4.12) und (4.13). □

Damit ist das nötige Rüstzeug bereitgestellt, um das zentrale Resultat dieses Abschnitts angeben zu können.

4.12 Satz *Sei $p^* \in (0;1)$ so gewählt, dass $\sup_{y \geq 0} g_{p^*}(y) = \sup_{y \leq 0} g_{p^*}(y)$ gilt, und sei $C^* = C^*_x$ das eindeutig bestimmte Supremum von g_{p^*}. Falls Punkte $y_1 > 0$ und $y_2 < 0$ existieren mit $g_{p^*}(y_1) = C^* = g_{p^*}(y_2)$, dann gilt*

$$V^*(x) = C^*.$$

Es existiert eine optimale Stoppzeit τ^*, und zwar

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0 : B_t = y_1 \;\; \textit{oder} \;\; B_t = y_2.\}.$$

Beweis. Sei $M_t := p^* M_t^{(1)} + (1 - p^*) M_t^{(2)}$. Gemäß Satz 2.4 genügt es, $Q(\tau^* < \infty) = 1$ zu zeigen, wobei Q das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t\right)$ mit der Standardfiltration $\mathcal{F}$ bezeichnet, das durch

$$Q(A) := \int_A M_t \, dP; \quad A \in \mathcal{F}_t$$

gegeben ist. Für die beiden nachfolgenden Aussagen bezeichne $\widehat{W}$ eine Standard Brownsche Bewegung unter P und Θ eine von $\widehat{W}$ unabhängige Zufallsvariable mit

$$P(\Theta = \alpha_1 \sigma) = p^* = 1 - P(\Theta = \alpha_2 \sigma).$$

4.13 Lemma *Unter Q besitzt $(W_t)_{t \geq 0}$ die gleiche Verteilung wie $(\widehat{W}_t + \Theta t)_{t \geq 0}$ unter P.*

Beweis. Es genügt, die Identität für die eindimensionalen Randverteilungen nachzuweisen, da $Q^{(W_t)_{t \geq 0}}$ auf Grund des Satzes von Kolmogorov zunächst durch die endlichdimensionalen, wegen der stochastischen Unabhängigkeit und Stationärität der Zuwächse von $(W_t)_{t \geq 0}$ schließlich sogar durch die eindimensionalen Randverteilungen eindeutig bestimmt ist.

Für $A \in \mathcal{F}_t$ erhalten wir

$$\begin{aligned} Q(W_t \in A) &= E_P\left[(p^* M_t^{(1)} + (1-p^*)M_t^{(2)})1_{\{W_t \in A\}}\right] \\ &= \int_{\{W_t\in A\}} \left[p^* e^{\alpha_1\sigma W_t - \frac{(\alpha_1\sigma)^2}{2}t} + (1-p^*)e^{\alpha_2\sigma W_t - \frac{(\alpha_2\sigma)^2}{2}t}\right] dP. \end{aligned}$$

Sei f_{μ,σ^2} die Dichte einer $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$-Verteilung. Dann folgt unter Verwendung des Transformationssatzes (vgl. [Als1], S. 57)

$$\begin{aligned} Q(W_t \in A) &= \int_A \left[p^* e^{\alpha_1\sigma y - \frac{(\alpha_1\sigma)^2}{2}t} + (1-p^*)e^{\alpha_2\sigma y - \frac{(\alpha_2\sigma)^2}{2}t}\right] f_{0,t}(y)\, dy \\ &= \int_A \left[p^* e^{\alpha_1\sigma y - \frac{(\alpha_1\sigma)^2}{2}t} + (1-p^*)e^{\alpha_2\sigma y - \frac{(\alpha_2\sigma)^2}{2}t}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}}\, dy. \end{aligned}$$

Mit der Identität $\alpha_1\sigma y - \frac{(\alpha_1\sigma)^2}{2}t - \frac{y^2}{2t} = -\frac{1}{2t}(y-\alpha_1\sigma t)^2$ und entsprechend für α_2 vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\begin{aligned} Q(W_t \in A) &= \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left[p^* e^{-\frac{1}{2t}(y-\alpha_1\sigma t)^2} + (1-p^*)e^{-\frac{1}{2t}(y-\alpha_2\sigma t)^2}\right] dy \\ &= \int_A [p^* f_{\alpha_1\sigma t,t}(y) + (1-p^*) f_{\alpha_2\sigma t,t}(y)]\, dy. \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} P(\widehat{W}_t + \Theta t \in A) &= E_P\left[1_{\{\widehat{W}_t + \Theta t \in A\}}\right] \\ &= P(\Theta = \alpha_1\sigma) E_P 1_{\{\widehat{W}_t + \alpha_1\sigma t \in A\}} + P(\Theta = \alpha_2\sigma) E_P 1_{\{\widehat{W}_t + \alpha_2\sigma t \in A\}} \\ &= \int_A [p^* f_{\alpha_1\sigma t,t}(y) + (1-p^*) f_{\alpha_2\sigma t,t}(y)]\, dy, \end{aligned}$$

was den Beweis abschließt. □

4.14 Korollar *Es gilt* $Q(\tau^* < \infty) = 1$.

Beweis. Wegen $\tau^* = \inf\{t > 0 \mid B_t = y_1 \,\vee\, B_t = y_2\}$ mit $y_1 > 0$ und $y_2 < 0$ und der Pfadstetigkeit der Brownschen Bewegung B mit Startwert $B_0 = 0$ können wir zunächst

$$Q(\tau^* > T) = Q(\sigma W_t + \mu t \in (\, y_2; y_1)\ \forall\ t \in [0;T])$$

festhalten. Die in Lemma 4.13 gefundene Identität liefert

$$\begin{aligned} &Q\left(W_t \in \left(\frac{y_2-\mu t}{\sigma}; \frac{y_2-\mu t}{\sigma}\right)\ \forall\ t \in [0;T]\right) \\ &\quad = P\left(\widehat{W}_t + \Theta t \in \left(\frac{y_2-\mu t}{\sigma}; \frac{y_2-\mu t}{\sigma}\right)\ \forall\ t \in [0;T]\right), \end{aligned}$$

sodass die vorangegangenen Überlegungen zusammen mit $P(\Theta = \alpha_1\sigma) = p^* = 1 - P(\Theta = \alpha_2\sigma)$ ergeben:

$$\begin{aligned} Q(\tau^* > T) \;&=\; p^*\, P(\sigma\widehat{W}_t + (\alpha_1\sigma^2 + \mu)t \in (\,y_2; y_1)\ \forall\ t \in [0;T]) + \\ &\quad\; (1-p^*)\, P(\sigma\widehat{W}_t + (\alpha_2\sigma^2 + \mu)t \in (\,y_2; y_1)\ \forall\ t \in [0;T]). \end{aligned}$$

Grenzübergang $T \to \infty$ liefert auf Grund des Pfadverhaltens einer Brownschen Bewegung die Behauptung. □

Natürlich liefert das Pfadverhalten einer Brownschen Bewegung ebenso, dass τ^* auch bezüglich des Originalmaßes P fast sicher endlich ist (vgl. Satz 1.17). Allerdings wollen wir schon hier auf eine unerfreuliche Eigenschaft der Lösung hinweisen, bevor wir uns ausführlicher mit einer konkreten Anwendung beschäftigen.

4.15 Bemerkung Im Allgemeinen sind die Werte p^*, y_1 und y_2 nicht explizit bestimmbar. Selbst in der Situation, dass ψ_x die Symmetrieeigenschaft $\psi_x(y) = \psi_x(-y)$ für alle y besitzt und die Brownsche Bewegung B Drift Null hat, kann im Allgemeinen nur der Wert p^* explizit angegeben werden. In diesem Fall gilt $\alpha_2 = -\alpha_1 = -\sqrt{2r/\sigma^2}$, $p^* = 1/2$ und $y_2 = -y_1$, wobei y_1 der Gleichung $g_p'(y) = 0$ genügt, sofern ψ_x stetig differenzierbar ist. y_1 ist also Lösung der Differentialgleichung

$$\psi_x'(y)(e^{\alpha y} + e^{-\alpha y}) = \alpha\psi_x(y)(e^{\alpha y} - e^{-\alpha y})$$

mit $\alpha = \sqrt{2r/\sigma^2}$.

4.2.2 Strangle und Straddle

Eine *Amerikanischer Straddle* ist eine Kombination einer Amerikanischen Call Option und einer Amerikanischen Put Option auf dasselbe Wertpapier mit identischem Ausübungspreis K. Bei einem *Strangle* hingegen unterscheiden sich die Ausübungspreise L der Put Option und K der Call Option, wobei $L < K$ angenommen werden kann. Die Kursentwicklung des zu Grunde liegenden Wertpapiers wird - wie üblich - durch eine geometrische Brownsche Bewegung

$$S_t = x \exp\left(\sigma W_t + (\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2})\, t\right)$$

modelliert. Für weitere Details über das betrachtete Finanzderivat verweisen wir auf die entsprechende Literatur, die wesentlichen Eigenschaften des zu Grunde gelegten Finanzmarktes können aus Abschnitt 3.1 übernommen werden.

Die zuvor bereitgestellten Resultate erweisen sich für die Berechnung einer optimalen Stoppzeit eines Amerikanischen Strangle (Straddle) als sehr fruchtbar. Wir legen zunächst den Startwert der geometrischen Brownschen Bewegung auf $S_0 = 1$ fest. Dies ist nur eine vorübergehende technische Vereinfachung, die keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet, wie wir an späterer Stelle sehen werden. Der Auszahlungsprozess eines Strangle (Straddle) wird dann durch die Funktion

$$\psi(y) = \begin{cases} L - e^y, & \text{falls } \; y \leq \ln L \\ 0, & \text{falls } \; \ln L \leq y \leq \ln K \\ e^y - K, & \text{falls } \; y \geq \ln K \end{cases}$$

beschrieben, sodass wir daran interessiert sind, den Wert

$$V^*(1) := \sup_{\tau} E(e^{-r\tau}\psi(B_\tau)1_{\{\tau<\infty\}})$$

zu berechnen. α_1 und α_2 seien wie in (4.1) und (4.2) mit $\mu = \hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2}$, d.h.

$$\alpha_1 = -\left(\frac{\hat{\mu}}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\frac{2r}{\sigma^2} + \left(\frac{\hat{\mu}}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2}$$

und

$$\alpha_2 = -\left(\frac{\hat{\mu}}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\frac{2r}{\sigma^2} - \left(\frac{\hat{\mu}}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2}.$$

Wir treffen im Folgenden die Annahmen, dass die Verzinsungsrate größer als der Aktientrend sei ($r > \hat{\mu}$) und dass $\ln L \leq 0 = B_0 \leq \ln K$ gelte. Die zweite Forderung resultiert aus der vorübergehenden Festlegung $S_0 = 1$ und erklärt sich spätestens mit der Erweiterung der Option auf einen beliebigen Startwert. Auch die erste Annahme bedeutet keine wirkliche Einschränkung, denn für $\hat{\mu} \geq r$ bildet der einen Call beschreibenden Prozess $Z_t = e^{-rt}(K - S_t)^+$ ein Submartingal, sodass ausschließliche Investition in den Call bei längstmöglicher Aufrechterhaltung der Beobachtung die „optimale Strategie“ darstellt.

4.16 Lemma *Es gilt $\alpha_2 < 0 < 1 < \alpha_1$, und die Funktion ψ genügt den Ungleichungen (4.9) und (4.10).*

Beweis. In der ersten Aussage ist nur noch $\alpha_1 > 1$ zu beweisen. Das folgt jedoch aus der Voraussetzung $r > \hat{\mu}$:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1}{\sigma^2}\left(-\hat{\mu} + \frac{\sigma^2}{2} + \sqrt{2r\sigma^2 + \left(-\hat{\mu} + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}\right) \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\left(-\hat{\mu} + \frac{\sigma^2}{2} + \sqrt{2r\sigma^2 + \hat{\mu}^2 - \sigma^2\hat{\mu} + \frac{\sigma^4}{4}}\right) \\
&\overset{r>\hat{\mu}}{>} \frac{1}{\sigma^2}\left(-\hat{\mu} + \frac{\sigma^2}{2} + \sqrt{\hat{\mu}^2 + \sigma^2\hat{\mu} + \frac{\sigma^4}{4}}\right) \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\left(-\hat{\mu} + \frac{\sigma^2}{2} + \hat{\mu} + \frac{\sigma^2}{2}\right) = 1.
\end{aligned}$$

Wegen $\alpha_1 > 1$ gilt schließlich

$$\begin{aligned}
\infty &= \sup_{y\leq 0} e^{-\alpha_1 y}(L - e^y) = \sup_{y \leq 0} e^{-\alpha_1 y}\psi(y) \\
&> \sup_{y\geq 0} e^{-\alpha_1 y}(e^y - K) = \sup_{y\geq 0} e^{-\alpha_1 y}\psi(y) > 0,
\end{aligned}$$

was Ungleichung (4.9) beweist. (4.10) sieht man analog für $\alpha_2 < 0$. □

4.17 Lemma *Sei das folgende Gleichungssystem gegeben mit* $\ln L < 0$ *und* $\ln K > 0$.

$$\frac{e^{y_1} - K}{p^* e^{\alpha_1 y_1} + (1-p^*) e^{\alpha_2 y_1}} = \frac{L - e^{y_2}}{p^* e^{\alpha_1 y_2} + (1-p^*) e^{\alpha_2 y_2}}$$

$$\frac{e^{y_1}}{e^{y_1} - K} = \frac{p^* \alpha_1 e^{\alpha_1 y_1} + (1-p^*) \alpha_2 e^{\alpha_2 y_1}}{p^* e^{\alpha_1 y_1} + (1-p^*) e^{\alpha_2 y_1}}$$

$$\frac{-e^{y_2}}{L - e^{y_2}} = \frac{p^* \alpha_1 e^{\alpha_1 y_2} + (1-p^*) \alpha_2 e^{\alpha_2 y_2}}{p^* e^{\alpha_1 y_2} + (1-p^*) e^{\alpha_2 y_2}}$$

Dann existiert eine eindeutig bestimmte Lösung (y_1, y_2, p^*) *mit* $y_2 < \ln L$, $y_1 > \ln K$, *und* $0 < p^* < 1$.

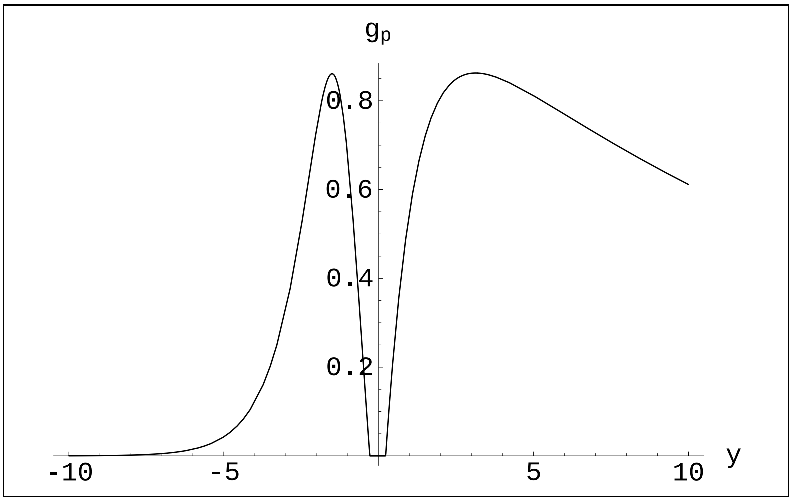

Abbildung 4.6: Graph von g_{p^*} mit $\psi_x(y) = \max\{(L - e^y)^+, (e^y - K)^+\}$

Beweis. In der vorliegenden Situation ist die Funktion g von der Form

$$g_p(y) := \frac{\max\{(L - e^y)^+, (e^y - K)^+\}}{p e^{\alpha_1 y} + (1-p) e^{\alpha_2 y}},$$

wobei die Funktion $\psi(y) = \max\{(L - e^y)^+, (e^y - K)^+\}$ offenkundig positiv und stetig differenzierbar ist. Wir zeigen sukzessive, dass jede Gleichung eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt.

(a) Differenzieren zeigt $\sup_{y \geq 0} e^{-\alpha_1 y} \psi(y) = e^{-\alpha_1 \tilde{y}} \psi(\tilde{y})$ für $\tilde{y} = \ln \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - 1} + \ln K$, wobei natürlich $\tilde{y} > 0$ gilt wegen der Voraussetzungen $\alpha_1 > 1$ und $\ln K >$

0. Damit existiert nach Bemerkung 4.11 ein eindeutig bestimmtes p^* mit $\sup_{y\geq 0} g_{p^*}(y) = C^* = \sup_{y\leq 0} g_{p^*}(y)$, was gerade die eindeutige Lösung der Gleichung

$$\frac{e^{y_1} - K}{p^* e^{\alpha_1 y_1} + (1-p^*)e^{\alpha_2 y_1}} = \frac{L - e^{y_2}}{p^* e^{\alpha_1 y_2} + (1-p^*)e^{\alpha_2 y_2}}$$

liefert.

(b) Wegen $\alpha_1 > 1$ gilt für jedes $0 < p < 1$ $\lim_{y\to\infty} g_p(y) = 0$. Für $0 \leq y \leq \ln K$ ist $\psi(y) = 0$. Für $y > \ln K$ hingegen gilt $\psi(y) > 0$ und somit auch $g_p(y) > 0$. Das bedeutet, dass die Funktion g_p für jedes $0 < p < 1$ ihr Maximum in einem Punkt $y \in (\ln K; \infty)$ annimmt. Notwendigerweise muss dann $g_p'(y) = 0$ gelten. Auf $(\ln K; \infty)$ ist diese Gleichung äquivalent zu

$$\frac{e^y}{e^y - K} = \frac{p\alpha_1 e^{\alpha_1 y} + (1-p)\alpha_2 e^{\alpha_2 y}}{p e^{\alpha_1 y} + (1-p)e^{\alpha_2 y}}.$$

Da die Funktion $\frac{e^y}{e^y-K}$ auf $(\ln K; \infty)$ streng monoton wachsend ist, während die Funktion $\frac{p\alpha_1 e^{\alpha_1 y}+(1-p)\alpha_2 e^{\alpha_2 y}}{pe^{\alpha_1 y}+(1-p)e^{\alpha_2 y}}$ streng monoton fällt, existiert höchstens eine Lösung von $g_p'(y) = 0$.

(c) Mit fast identischen Überlegungen wie unter (b) sieht man, dass die Gleichung

$$\frac{-e^y}{L - e^y} = \frac{p\alpha_1 e^{\alpha_1 y} + (1-p)\alpha_2 e^{\alpha_2 y}}{p e^{\alpha_1 y} + (1-p)e^{\alpha_2 y}}$$

genau eine Lösung in $(-\infty; \ln L)$ besitzt. □

4.18 Korollar *Bezeichne C^* also den gemeinsamen Wert von*

$$\frac{e^{y_1} - K}{p^* e^{\alpha_1 y_1} + (1-p^*)e^{\alpha_2 y_1}} = \frac{L - e^{y_2}}{p^* e^{\alpha_1 y_2} + (1-p^*)e^{\alpha_2 y_2}}.$$

Dann folgt für $\psi(y) = \max\{(L-e^y)^+, (e^y - K)^+\}$ aus Satz 4.12, dass

$$V^*(1) = \sup_\tau E(e^{-r\tau}\psi(B_\tau)1_{\{\tau<\infty\}}) = C^*$$

gilt und dass die Stoppzeit

$$\tau^* = \inf\left\{t \geq 0 : \sigma W_t + \left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2}\right)t = y_1 \text{ oder } \sigma W_t + \left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2}\right)t = y_2\right\}$$

in diesem Sinne optimal ist. □

Abschließend soll noch eine Verallgemeinerung auf einen beliebigen Startwert $S_0 = x$ untersucht werden. Dazu seien $\widehat{L}$ und $\widehat{K}$ beliebige Konstanten mit $\widehat{K} > \widehat{L} > 0$. Wir betrachten einen Startwert x im ökonomisch sinnvollen Bereich $x \in (\widehat{L}; \widehat{K})$ und die zugehörige Auszahlungsfunktion

$$\widehat{\psi}_x(y) := \max\left\{\widehat{L} - xe^y, 0, xe^y - \widehat{K}\right\}.$$

Mit $\widehat{L}/x =: L < 1$ und $\widehat{K}/x =: K > 1$ erhalten wir die Identität

$$\max\left\{x\left(\widehat{L}/x - e^y\right), 0, x\left(e^y - \widehat{K}/x\right)\right\} = x\,\max\{L - e^y, 0, e^y - K\},$$

aus der unmittelbar die Beziehung $\widehat{\psi}_x(y) = x\psi(y)$ folgt. Die Berechnung der optimalen Stoppzeit einer beliebigen Strangle Option kann demnach problemlos auf die zuvor gemachten Aussagen zurückgeführt werden.

Kapitel 5

Das $W_T/(\tau + 1)$- Problem

Die folgenden Überlegungen beschäftigen sich vornehmlich mit der klassischen Frage, ob eine Stoppzeit τ^* gefunden werden kann, die den Erwartungswert $E(W_\tau/(\tau + 1))$ maximiert. Diese Frage gewinnt nicht zuletzt deswegen an Bedeutung, da sie als stetiges Analogon zu einer Reihe von Problemen in diskreter Zeit angesehen werden kann.

In Form eines Ausblicks sei exemplarisch eine Folge $X_1, X_2, \ldots$ von Zufallsgrößen gegeben, wobei es dem Beobachter möglich sein soll, beliebig viele dieser Versuche zu verfolgen. Entscheidet er sich für einen Zeitpunkt n, in dem er die Beobachtung abbricht, so stehe ihm der gewichtete Gewinn $(X_1 + \cdots + X_n)/n$ zu. Eine interessante wie nahe liegende Frage ist es, ob eine Stoppstrategie existiert, die den zu erwartetenden Gewinn maximiert. L.A. Shepp hat für den Fall, dass die X_i stochastisch unabhängig sind mit $EX_i = 0$ und $EX_i^2 = \sigma^2 < \infty$, sehr interessante Aussagen bewiesen, wobei er die entsprechenden zeitstetigen Resultate zur Approximation genutzt hat (vgl. [She1], S. 993 ff.).

Wir beschränken uns im weiteren Text auf die Darstellung der Resultate in stetiger Zeit, wobei es uns möglich ist, eine optimale Stoppzeit und den erwarteten Gewinn in einer etwas allgemeineren Situation explizit anzugeben.

Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sei eine Standard Brownsche Bewegung $(W_t)_{t\geq 0}$ gegeben. τ bezeichne eine Stoppzeit bezüglich der Standardfiltration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, x, b seien reelle Zahlen mit $-\infty < x < \infty$ und $b > 0$. Die erwartete Auszahlung im Zeitpunkt τ sei gegeben durch

$$V(x,b,\tau) := E((x+W_\tau)/(b+\tau)), \tag{5.1}$$

wobei die rechte Seite gleich Null gesetzt werden soll für $\tau = \infty$. Damit liegt in der Tat eine Situation vor, die unser ursprüngliches Problem als Spezialfall enthält. Unser Ziel ist es folglich,

$$V(x,b) := \sup_\tau V(x,b,\tau) \tag{5.2}$$

zu berechnen, wobei das Supremum über alle Stoppzeiten gebildet wird. Wir stellen das zentrale Resultat dieses Kapitels vor.

5.1 Satz *Für $b > 0$ existiert eine Stoppzeit τ^*, die in dem Sinne optimal ist, dass*

$$V(x,b) = V(x,b,\tau^*)$$

gilt. τ^* ist dabei eindeutig bestimmt und besitzt die Form

$$\tau^* = \inf\left\{t \geq 0 \,|\, x + W_t \geq x^*\,(b+t)^{1/2}\right\},$$

wobei x^* die eindeutige reelle Lösung der Gleichung

$$x^* = \left(1 - (x^*)^2\right) \int_0^\infty \exp\left(ux^* - u^2/2\right)\, du$$

ist. Des Weiteren gilt für $b \geq 0$ und $-\infty < x < \infty$

$$V(x,b) = \begin{cases} (1-(x^*)^2)\,\int_0^\infty \exp\left(ux - u^2 b/2\right)\, du\,, & x \leq x^* b^{1/2} \\ x/b\,, & x > x^* b^{1/2} \end{cases}.$$

5.2 Bemerkung

- In der letzten Zeile ist der Fall $b = 0$ zugelassen, d.h. es gilt $V(x,0) = \infty$ für $x \geq 0$ und damit insbesondere $\sup_\tau E(W_\tau/\tau) = \infty$.

- Für $b > 0$ gilt $V(x,b) > x/b$ genau dann, wenn $x < x^* b^{1/2}$.

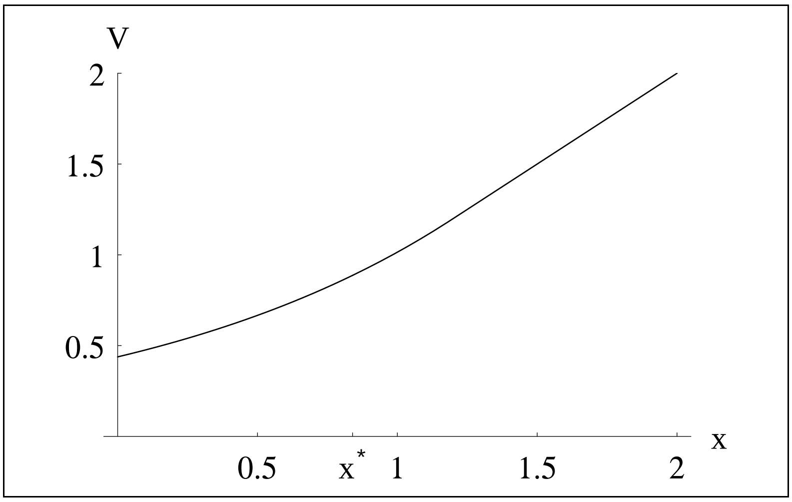

Abbildung 5.1: Lösung des $(x + W_t)/(t + 1)$-Problems

- x^* ist unabhängig von b und x, und es gilt $x^* \approx 0,8399$.

Bevor wir einen vollständigen Beweis dieses Satzes angeben, wollen wir uns mit einer Situation beschäftigen, die obige Situation weiter verallgemeinert und daher von eigenständigem Interesse ist.

5.1 Optimales Stoppen bei parabolischen Schranken

Es bezeichne $(X_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung mit Startwert x_0, d.h. für alle $0 \leq t < \infty$ gelte

$$X_t = x_0 + W_t \tag{5.3}$$

mit einer Standard Brownschen Bewegung $(W_t)_{t \geq 0}$. In diesem Abschnitt betrachten wir die Funktion

$$\widehat{V}_h(x_0, 1, \beta, \tau) := E\left[(\tau + 1)^{-\beta} h\left(\frac{X_\tau}{\sqrt{\tau + 1}}\right)\right], \tag{5.4}$$

wobei h zunächst irgendeine Funktion und β eine reelle Zahl bezeichne und die rechte Seite gleich Null gesetzt werden soll für $\tau = \infty$. Unser Ziel ist es, eine Stoppzeit zu finden, die obigen Wert (5.4) maximiert. Der nachstehende Satz gibt - unter geeigneten Voraussetzungen an h und β - die Funktion

$$\widehat{V}_h(x_0,1,\beta) := \sup_\tau \widehat{V}_h(x_0,1,\beta,\tau) \tag{5.5}$$

und die optimale Stoppzeit τ^* explizit an (vgl. [Bei], S. 102-104 für den Fall $x_0 \le x^*$).

5.3 Satz *Sei $\beta > 0$ und $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ die durch*

$$x \mapsto \int_0^\infty e^{ux-\frac{u^2}{2}} u^{2\beta-1}\, du \tag{5.6}$$

gegebene Funktion. Des Weiteren bezeichne h eine messbare reellwertige Funktion mit der Eigenschaft

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{h(x)}{H(x)} = \frac{h(x^*)}{H(x^*)} =: C^*; \tag{5.7}$$

dabei sei x^* eindeutig bestimmt und $0 < C^* < \infty$.
Dann gilt für $x_0 \le x^*$

$$\widehat{V}_h(x_0,1,\beta) = E\left[(\tau^*+1)^{-\beta} h\left(\frac{X_{\tau^*}}{\sqrt{\tau^*+1}}\right)\right] = H(x_0)\, C^*$$

und für $x_0 > x^*$, sofern h überdies auf $[0;\infty)$ positiv, monoton wachsend und konkav ist,

$$\widehat{V}_h(x_0,1,\beta) = h(x_0),$$

wobei τ^* die Stoppzeit der Form

$$\tau^* = \inf\left\{t \ge 0 \,|\, X_t \ge x^* \sqrt{t+1}\right\}$$

bezeichnet und eindeutig bestimmt ist.

Wir wollen dem Beweis von Satz 5.3 zunächst eine wichtige Hilfsaussage voranstellen.

5.4 Lemma *Der durch*

$$M_t := (t+1)^{-\beta} H(x_0)^{-1}\, H\left(\frac{X_t}{\sqrt{t+1}}\right) \tag{5.8}$$

definierte stochastische Prozess $(M_t)_{t\ge0}$ bildet ein positives Martingal mit $EM_0 = 1$.

Beweis. Wegen $X_t = x_0 + W_t$ ist $EM_0 = 1$ evident, und so bleibt nur die Martingaleigenschaft von $(M_t)_{t\geq 0}$ zu prüfen. Die einfache Substitution $v = u\sqrt{t+1}$ liefert

$$\begin{aligned} H\left(\frac{X_t}{\sqrt{t+1}}\right) &= \int_0^\infty e^{v\frac{X_t}{\sqrt{t+1}}-\frac{v^2}{2}} v^{2\beta-1}\,dv \\ &= \int_0^\infty e^{uX_t-\frac{(t+1)u^2}{2}} (\sqrt{t+1}u)^{2\beta-1}\sqrt{t+1}\,du \\ &= (t+1)^\beta \int_0^\infty e^{uX_t-\frac{u^2}{2}t} e^{-\frac{u^2}{2}} u^{2\beta-1}\,du, \end{aligned}$$

sodass wir gleichwertig mit (5.8) schreiben können

$$M_t = H(x_0)^{-1}\int_0^\infty e^{uX_t-\frac{u^2}{2}t} e^{-\frac{u^2}{2}} u^{2\beta-1}\,du. \tag{5.9}$$

Mit dem Satz von Fubini erhalten wir

$$\begin{aligned} E(M_t\,|\,\mathcal{F}_s) &= H(x_0)^{-1}\, E\left(\int_0^\infty e^{uX_t-\frac{u^2}{2}t} e^{-\frac{u^2}{2}} u^{2\beta-1}\,du\,|\,\mathcal{F}_s\right) \\ &= H(x_0)^{-1}\int_0^\infty E\left(e^{uX_t-\frac{u^2}{2}t}\,|\,\mathcal{F}_s\right) e^{--\frac{u^2}{2}} u^{2\beta-1}\,du \;=\; M_s, \end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Zeile davon Gebrauch gemacht haben, dass der Prozess $\left(e^{uX_t-\frac{u^2}{2}t}\right)_{t\geq 0}$ ein Martingal bildet. □

Das vorangegangene Lemma stellt eine wesentliche Grundlage für die gesuchte Zerlegung des Ausgangsprozesses dar:

Beweis von Satz 5.3. Für den Prozess $Z_t := (t+1)^{-\beta} h\left(X_t/\sqrt{t+1}\right)$ kann unter Verwendung von Lemma 5.4 die gewünschte Zerlegung der Form (2.3) angegeben werden. Hier erhalten wir die Abschätzung

$$(t+1)^{-\beta} h\left(\frac{X_t}{\sqrt{t+1}}\right) \overset{(1)}{=} H(x_0)\frac{h\left(\frac{X_t}{\sqrt{t+1}}\right)}{H\left(\frac{X_t}{\sqrt{t+1}}\right)} M_t \overset{(2)}{\leq} H(x_0)C^* M_t,$$

bei der in (1) die Definition von $(M_t)_{t\geq 0}$ in (5.8) und in (2) die Definition von C^* in (5.7) eingeflossen ist. Mit der Festlegung $M_\infty = 0$ impliziert dies für alle Stoppzeiten τ (vgl. Korollar 1.10):

$$(5.10)\quad E\left[(\tau+1)^{-\beta}h\left(\frac{X_\tau}{\sqrt{\tau+1}}\right)\right] \leq H(x_0)\,C^*\,EM_\tau \leq H(x_0)\,C^*.$$

Auf der Menge $\{\tau^* < \infty\}$ gilt offenbar $h\left(\frac{X_{\tau^*}}{\sqrt{\tau^*+1}}\right)/H\left(\frac{X_{\tau^*}}{\sqrt{\tau^*+1}}\right) = C^*$, was unmittelbar die Identität

$$(5.11)\qquad (\tau^*+1)^{-\beta}h\left(\frac{X_{\tau^*}}{\sqrt{\tau^*+1}}\right) = H(x_0)\,C^*\,M_{\tau^*}$$

auf dieser Menge sicherstellt.

Um die Optimalität von τ^* nachzuweisen, genügt es also zu zeigen:

(i) τ^* ist fast sicher endlich und

(ii) M_{τ^*} besitzt den Erwartungswert 1.

Die erste Eigenschaft ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Gesetz vom iterierten Logarithmus für die Brownsche Bewegung (vgl. Satz 1.17):

5.5 Lemma *Es gilt* $P(\tau^* < \infty) = 1$.

Beweis. Zunächst kann festgehalten werden:

$$\begin{aligned} P(\tau^* < \infty) &= P\left(\exists t \geq 0 \,|\, X_t \geq x^*\sqrt{t+1} < \infty\right) \\ &\geq P\left(\sup_{0\leq t<\infty} \frac{X_t}{\sqrt{t+1}} > x^*\right). \end{aligned}$$

Das Gesetz vom iterierten Logarithmus liefert

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{X_t}{\sqrt{t+1}} = \infty \quad \text{fast sicher,}$$

was unmittelbar die Behauptung impliziert. □

Um die Gleichung $EM_{\tau^*} = 1$ nachzuweisen, kann die äquivalente Charakterisierung $Q(\tau^* < \infty) = 1$ (vgl. Satz 2.4) herangezogen werden, wobei Q das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{s\geq 0}\mathcal{F}_s\right)$ bezeichnet, das durch

$$Q(A) := \int_A M_t\,dP; \quad A \in \mathcal{F}_t$$

gegeben ist. ρ bezeichne das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}^+$ mit der Lebesgue-Dichte $H(x_0)^{-1}e^{ux_0-\frac{u^2}{2}}u^{2\beta-1}$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} Q(A) &= \int_A M_t\,dP \\ &\overset{(5.9)}{=} H(x_0)^{-1}\int_A\int_0^\infty e^{uX_t-\frac{u^2}{2}t}e^{-\frac{u^2}{2}}u^{2\beta-1}\,du\,dP \\ &= \int_A\int_0^\infty e^{uW_t-\frac{u^2}{2}t}\,d\rho\,dP \end{aligned}$$

für alle $0 \le t < \infty$ und $A \in \mathcal{F}_t$, und wir können formulieren:

5.6 Lemma *Bezeichnet $\widehat{W} = (\widehat{W}_t)_{t\ge 0}$ eine Standard Brownsche Bewegung unter P und Θ eine von $\widehat{W}$ unabhängige Zufallsvariable mit $P^\Theta = \rho$, so gilt*

$$Q^{(X_t)_{t\ge 0}} = P^{(x_0+\widehat{W}_t+\Theta t)_{t\ge 0}}.$$

Beweis. Wie bereits im Beweis zu Lemma 4.13 angemerkt, genügt es, die Identität für die eindimensionalen Randverteilungen zu beweisen. Wegen $X_t = x_0 + W_t$ für alle $t \ge 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ ist weiter unmittelbar einzusehen, dass es ausreicht, die Identität

$$Q^{(W_t)_{t\ge 0}} = P^{(\widehat{W}_t+\Theta t)_{t\ge 0}}$$

nachzuweisen (da dann bereits die zugehörigen Verteilungsfunktionen übereinstimmen). Da der Fall $t = 0$ evident ist, sei im Folgenden $t > 0$. Abkürzend soll von nun an

$$g(v) := H(x_0)^{-1}\,e^{vx_0-\frac{v^2}{2}}\,v^{2\beta-1}$$

die Dichte von P^Θ bezeichnen. Mit der Transformationsformel für Lebesgue-Integrale (vgl. [Als1], S. 59) und einer einfachen Substitution erhalten wir die Identität

$$\int_{A/t} g(v)\,dv = \int_A \frac{1}{t}\,g\left(\frac{v}{t}\right)\,dv,$$

d.h. $\frac{1}{t}\,g\left(\frac{v}{t}\right)$ ist Dichte von $P^{\Theta t}$. Da $\widehat{W}_t$ und Θt nach Voraussetzung stochastisch unabhängig sind, besitzt $P^{\widehat{W}_t+\Theta t} = P^{\widehat{W}_t} * P^{\Theta t}$ die Dichte

$$\int_0^\infty f_{0,t}(x-v)\,\frac{1}{t}\,g\left(\frac{v}{t}\right)\,dv,$$

wobei $f_{0,t}$ die Dichte einer $\mathcal{N}(0,t)$-Verteilung bezeichnet.

Andererseits gilt wegen $Q^{W_t}(A) = \int_{\{W_t \in A\}} \int_0^\infty e^{uW_t - \frac{u^2}{2}t}\, d\rho\, dP$ und dem Transformationssatz ([Als1], S. 57):

$$Q^{W_t}(A) = \int_A \int_0^\infty e^{ux - \frac{u^2}{2}t}\, \rho(du)\, P^{W_t}(dx).$$

Da g eine Lebesgue-Dichte von ρ und $P_t^W(dx) = f_{0,t}(x)dx$ ist, erhalten wir

$$Q^{W_t}(A) = \int_A \int_0^\infty e^{ux - \frac{u^2}{2}t}\, g(u)\, f_{0,t}(x)\, du\, dx.$$

Wegen $f_{0,t}(x) = (2\pi t)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)$ und $ux - \frac{u^2}{2}t - \frac{x^2}{2t} = -\frac{(x-ut)^2}{2t}$ erhält man unmittelbar

$$Q^{W_t}(A) = (2\pi t)^{-\frac{1}{2}} \int_A \int_0^\infty e^{-\frac{(x-ut)^2}{2t}}\, g(u)\, du\, dx.$$

Die Substitution $v = ut$ liefert die gewünschte Beziehung

$$Q^{W_t}(A) = \int_A \int_0^\infty f_{0,t}(x-v)\, \frac{1}{t}\, g\left(\frac{v}{t}\right)\, dv\, dP,$$

was den Beweis abschließt. □

5.7 Korollar *Bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes Q ist die Stoppzeit τ^* fast sicher endlich.*

Beweis. Mit Lemma 5.6 und identischen Bezeichnungen können wir zunächst festhalten, dass

$$Q\left(x_0 + W_t < x^* \sqrt{t+1}\right) = P\left(x_0 + \widehat{W}_t + \Theta t < x^* \sqrt{t+1}\right)$$

gilt. Da Θ eine positive Zufallsvariable ist, erhalten wir die Ungleichung

$$\begin{aligned} &P\left(x_0 + \widehat{W}_t + \Theta t < x^* \sqrt{t+1} \quad \forall\ t \in [0;T]\right) \\ &\quad \le P\left(x_0 + \widehat{W}_t < x^* \sqrt{t+1} \quad \forall\ t \in [0;T]\right) \\ &\quad = P\left(\frac{x_0 + \widehat{W}_t}{\sqrt{t+1}} < x^* \quad \forall\ t \in [0;T]\right). \end{aligned}$$

Das Gesetz vom iterierten Logarithmus für die Brownsche Bewegung liefert

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{x_0 + \widehat{W}_t}{\sqrt{t+1}} = \infty \quad \text{fast sicher.}$$

Damit gilt $Q\left(x_0 + W_t < x^* \sqrt{t+1} \quad \forall\, t \in [0;T]\right) \to 0$ für $T \to \infty$ und somit $Q(\tau^* < \infty) = 1$. □

Gemäß Satz 2.4 ist damit sichergestellt, dass die Identität $EM_{\tau^*} = 1$ gilt respektive dass $\tau^* = \inf\{t \geq 0 \,|\, x_0 + W_t \geq x^* \sqrt{t+1}\}$ optimal ist für $x_0 \leq x^*$. Unter dieser Voraussetzung gilt

$$\sup_\tau E\left[(\tau+1)^{-\beta} h\left(\frac{X_\tau}{\sqrt{\tau+1}}\right)\right] = H(x_0)C^*.$$

Den noch offenen Teil von Satz 5.3 beweisen wir mittels einiger Resultate aus dem Bereich der stochastischen Integration. Für $x_0 > x^*$ und $Y_t := (t+1)^{-1/2}(x_0 + W_t)$ zeigen wir die Identität

$$\widehat{V}_h(x_0, 1, \beta) = \sup_\tau E\left((\tau+1)^{-\beta} h(Y_\tau)\right) = h(x_0),$$

die zusammen mit $\tau^* = 0$ den Beweis abschließt. Die Ungleichung

$$\widehat{V}_h(x_0, 1, \beta) = \sup_\tau E\left((\tau+1)^{-\beta} h(Y_\tau)\right) \geq h(x_0)$$

ist evident, sodass nur die umgekehrte Ungleichung $\widehat{V}_h(x_0, 1, \beta) \leq h(x_0)$ zu zeigen bleibt. Aus der Produktregel der stochastischen Integration (vgl. Satz 2.14) erhält man zunächst folgende stochastische Differentialgleichung für Y:

$$\begin{aligned} dY_t &= -\frac{1}{2}(t+1)^{-3/2}(x_0 + W_t)\,dt + (t+1)^{-1/2}\,dW_t \\ &= -\frac{1}{2}(t+1)^{-1} Y_t\,dt + (t+1)^{-1/2}\,dW_t. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Wir setzen $f(t, x_0) = (t+1)^{-\beta} h(x_0)$ für $x_0 > x^*$ und können aus der Itô-Formel (vgl. Satz 2.13) auf die stochastische Differentialgleichung

$$\begin{aligned} df(t, Y_t) &= -\beta(t+1)^{-\beta-1} h(Y_t)\,dt + (t+1)^{-\beta} h'(Y_t)\,dY_t + \\ &\quad \frac{1}{2}(t+1)^{-\beta-1} h''(Y_t)\,dt \end{aligned}$$

schließen. In Verbindung mit (5.12) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
df(t,Y_t) &= \frac{1}{2}(t+1)^{-\beta-1/2}h'(Y_t)\,dW_t \\
&+ (t+1)^{-\beta-1}[-\beta h(Y_t)+\frac{1}{2}h''(Y_t)-\frac{1}{2}Y_t h'(Y_t)\,]\,dt. \qquad (5.13)
\end{aligned}
$$

Der durch

$$
M_t := \frac{1}{2}(t+1)^{-\beta-1/2}h'(Y_t)\,dW_t \qquad (5.14)
$$

definierte Prozess $(M_t)_{t\geq 0}$ bildet gemäß Satz 2.10 ein stetiges lokales Martingal. Auf Grund der Voraussetzung an h ist der Integrand in (5.13) stets nichtpositiv, sodass aus (5.13) und (5.14) gefolgert werden kann:

$$
f(t,Y_t) \leq f(0,Y_0) + M_t.
$$

Sei τ_n eine Lokalisierungsfolge. Unter Berücksichtigung von $Y_0 = x_0$ erhalten wir schließlich für jede Stoppzeit τ

$$
h(x_0) \geq ((\tau\wedge\tau_n)+1)^{-\beta}h(Y_{\tau\wedge\tau_n}) - M_{\tau\wedge\tau_n}.
$$

Beidseitiges Bilden des Erwartungswertes und anschließende Anwendung des Lemmas von Fatou liefert

$$
\begin{aligned}
h(x_0) &\geq \liminf_{n\to\infty} E\left(((\tau\wedge\tau_n)+1)^{-\beta}h(Y_{\tau\wedge\tau_n})\right) \\
&\geq E\left(\liminf_{n\to\infty}((\tau\wedge\tau_n)+1)^{-\beta}h(Y_{\tau\wedge\tau_n})\right) \\
&= E\left((\tau+1)^{-\beta}h(Y_\tau)\right).
\end{aligned}
$$

Wenn wir nun auf beiden Seiten zum Supremum übergehen, so erhalten wir die gewünschte Aussage

$$
h(x_0) \geq \sup_\tau \left((\tau+1)^{-\beta}h(Y_\tau)\right) = \widehat{V}_h(x_0,1,\beta),
$$

und der Beweis von Satz 5.3 ist somit abgeschlossen. □

5.2 Beweis von Satz 5.1

Wir wiederholen zunächst die zu Beginn des Kapitels formulierte Aussage, bevor wir den Beweis vorstellen.

5.1 Satz *Für $b > 0$ existiert eine Stoppzeit τ^*, die in dem Sinne optimal ist, dass*

$$V(x, b) = V(x, b, \tau^*)$$

gilt. τ^* ist dabei eindeutig bestimmt und besitzt die Form

$$\tau^* = \inf\left\{t \geq 0 \,|\, x + W_t \geq x^* \,(b + t)^{1/2}\right\},$$

wobei x^* die eindeutige reelle Lösung der Gleichung

$$x^* = \left(1 - (x^*)^2\right) \int_0^\infty \exp\left(ux^* - u^2/2\right)\, du$$

ist. Des Weiteren gilt für $b \geq 0$ und $-\infty < x < \infty$

$$V(x, b) = \begin{cases} (1 - (x^*)^2) \int_0^\infty \exp\left(ux - u^2 b/2\right)\, du\,, & x \leq x^* b^{1/2} \\ x/b\,, & x > x^* b^{1/2} \end{cases}.$$

Beweis. Satz 5.3 wird sich als äußerst nützlich erweisen, einen vollständigen Beweis von Satz 5.1 zu erbringen. Um ihn auf die vorliegende Situation anwenden zu können, muss zunächst die in (5.2) eingeführte Funktion $V(x, b)$ genauer untersucht werden. Offenkundig wird durch

$$\widetilde{W}_t := b^{-1/2}\, W_{bt} \tag{5.15}$$

eine Standard Brownsche Bewegung definiert. Für eine beliebige Stoppzeit τ bezüglich W ist des Weiteren $\widetilde{\tau} := \tau/b$ wegen $\{\widetilde{\tau} \leq t\} \in \sigma((W_{bs})_{0\leq s\leq t}) = \sigma((\widetilde{W}_s)_{0\leq s\leq t})$ offenbar eine Stoppzeit bezüglich $\widetilde{W}$. Eine einfache Rechnung zeigt die Identität

$$\begin{aligned} E\left((x + W_\tau)/(b + \tau)\right) &= E\left((x + W_{b\widetilde{\tau}})/(b + b\widetilde{\tau})\right) \\ &= b^{-1/2}\, E\left((xb^{-1/2} + \widetilde{W}_{\widetilde{\tau}})/(1 + \widetilde{\tau})\right), \end{aligned}$$

die auch in der Form $V(x,b,\tau) = b^{-1/2}\, V\left(xb^{-1/2}, 1, \widetilde{\tau}\right)$ geschrieben werden kann. Geht man auf beiden Seiten zum Supremum über, so erhält man die Beziehung

$$V(x,b) = b^{-1/2}\, V\left(xb^{-1/2}, 1\right). \tag{5.16}$$

Mit Blick auf Satz 5.3 ist intuitiv klar, dass sich dieser Ausdruck als äußerst nützlich erweisen wird. Die genaue Begründung geben wir im Folgenden. Von nun an soll mit H ausschließlich die Funktion

$$x \mapsto \int_0^\infty e^{ux - \frac{u^2}{2}}\, du \tag{5.17}$$

bezeichnet werden, also gerade die in (5.6) definierte Funktion für $\beta = 1/2$. Wenn wir im Fall $h(x) = x$ für alle x kürzer $\widehat{V}$ an Stelle von $\widehat{V}_h$ schreiben, so erhalten wir als spezielle Aussage von Satz 5.3:

5.8 Korollar *Für $\beta = 1/2$ und $h(x) = x$ gilt*

$$\widehat{V}(x_0, 1) = \begin{cases} H(x_0)\, C^*, & x_0 \le x^* \\ x_0, & x_0 > x^* \end{cases},$$

wobei $C^* = x^*/H(x^*)$ und H gemäß (5.17) gegeben sind. □

Dass damit in der Tat bereits die Aussage von Satz 5.1 gegeben ist, zeigen die folgenden abschließenden Überlegungen. Wegen

$$\begin{aligned} e^{-x^2/2} \int_0^\infty e^{ux-u^2/2}\, du \quad &= \quad \int_0^\infty e^{-(x-u)^2/2}\, du \\ &\overset{z=x-u}{=} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2}\, dz \end{aligned}$$

erhält man unmittelbar die Identität

$$H(x) = e^{x^2/2} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2}\, dz.$$

Aus dieser Darstellung ist sofort die stetige Differenzierbarkeit von H mit der Ableitung

$$H'(x) \quad = \quad xH(x) + 1 \tag{5.18}$$

abzulesen. Da somit auch die Funktion $x \mapsto x/H(x)$ stetig differenzierbar und des Weiteren nur auf $\mathbb{R}^+$ positiv ist mit

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{H(x)} = 0,$$

nimmt sie ihr Maximum auf $\mathbb{R}^+$ an, welches notwendigerweise der Bedingung $(x/H(x))' = 0$ genügt. Ein möglicher Extremwert ist folglich Lösung der Gleichung

$$H(x) - xH'(x) = 0,$$

die sich gemäß (5.18) zu $(1-x^2)\,H(x) - x = 0$ vereinfacht und eine eindeutige Lösung x^* besitzt. Unter Berücksichtigung von $C^* = x^*/H(x^*)$ und der eben gefundenen Beziehung $x^* = (1-(x^*)^2)\;H(x^*)$ erhalten wir

$$H(x_0)\,C^* = (1-(x^*)^2)\,H(x_0).$$

Insgesamt erhält man gemäß Korollar 5.8

$$\widehat{V}(x_0,1) = \begin{cases} (1-(x^*)^2)\,H(x_0)\,, & x_0 \leq x^* \\ x_0\,, & x_0 > x^* \end{cases}.$$

Ersetzt man nun x_0 durch $xb^{-1/2}$, so folgt unter Berücksichtigung der in (5.16) gefundenen Beziehung $V(x,b) = b^{-1/2}\,V\left(xb^{-1/2},1\right)$ und der einfachen Rechnung

$$\begin{aligned} H(xb^{-1/2}) \quad &= \quad \int_0^\infty e^{uxb^{-1/2}-\frac{u^2}{2}}\,du \\ &\overset{v=ub^{-1/2}}{=} \quad b^{1/2}\int_0^\infty e^{vx-\frac{v^2}{2}b}\,dv \end{aligned}$$

das Resultat aus Satz 5.1. $\square$

Abbildungsverzeichnis

Verzeichnis ausgewählter Symbole

$\mathbb{R}$	Körper der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$	positive reelle Zahlen
$\mathbb{B}$	Borelsche σ-Algebra über $\mathbb{R}$
$\lambda\!\!\lambda$	Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$
$L^2(P \otimes \lambda\!\!\lambda)$	Vektorraum der reellen, quadratisch $(P \otimes \lambda\!\!\lambda)$-integrierbaren Funktionen
$\mathcal{H}^2$	Menge $\left\{ f \mid \int_\Omega \int_{[0;T]} f^2(\omega, t)\, \lambda\!\!\lambda(dt)\, P(d\omega) < \infty \right\}$
$\mathcal{L}^2$	Menge $\left\{ f \mid P\left(\int_{[0;T]} f^2(\omega, t)\, \lambda\!\!\lambda(dt) < \infty \right) = 1 \right\}$
$\mathcal{A}$	σ-Algebra $\mathcal{A}$ oder Filtration $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$
$\mathcal{A}_\tau$	σ-Algebra der τ-Vergangenheit $= \left\{ A \in \mathcal{A}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{A}_t \right) \mid A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{A}_t \;\; \forall\; t \in [0; \infty] \right\}$
$\mathbb{B}([\,0; t]) \otimes \mathcal{A}_t$	von der Borelschen σ-Algebra auf $[0; t]$ und $\mathcal{A}_t$ erzeugte Produkt-σ-Algebra
$\mathcal{F}$	Standardfiltration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$
X	stochastischer Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$

W	Standard Brownsche Bewegung $(W_t)_{t\geq 0}$
B	Brownsche Bewegung $(B_t)_{t\geq 0}$ mit Drift $\mu \in \mathbb{R}$ und Volatilität $\sigma > 0$
S	geometrische Brownsche Bewegung $(S_t)_{t\geq 0}$ mit Drift $\mu = \hat{\mu} - \sigma^2/2 \in \mathbb{R}$ und Volatilität $\sigma > 0$
$E(X \mid \mathcal{F})$	bedingter Erwartungswert der Zufallsgröße X unter der Unter-σ-Algebra $\mathcal{F}$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	Normalverteilung mit Mittelwert μ und Varianz σ^2
f_{μ,σ^2}	Dichte der $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-Verteilung
$\widehat{\tau}$	Stoppzeit $\inf\{t \geq 0 \mid X_t = x^*\}$
τ^*	Stoppzeit $\inf\{t \geq 0 \mid X_t \geq (\leq)\, x^*\}$

Literaturverzeichnis

[Als1] **Alsmeyer, G.** *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Skripten zur mathematischen Statistik, Nr. 30. Universität Münster (2000)

[Als2] **Alsmeyer, G.** *Stochastische Prozesse.* Skripten zur mathematischen Statistik, Nr. 33. Universität Münster (2000)

[Bei] **Beibel, M. / Lerche, H. R.** *A new look at optimal stopping problems related to mathematical finance.* Statistica Sinica **7**, 93-108 (1997)

[Chow] **Chow, Y.S. / Robbins, H. / Siegmund, D.** *Great Expectations.* Houghton Mifflin Comp., Boston (1971)

[Gäns] **Gänssler, P. / Stute, W.** *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1977)

[Irle] **Irle, A.** *Finanzmathematik.* Teubner, Stuttgart (1998)

[Jaeg] **Jaeger, M.** *Eine Verallgemeinerung der Itô-Formel und ihre Anwendung auf ausgewählte Stopprobleme der Finanzmathematik.* Diplomarbeiten der WWU Münster (2002)

[Nov] **Novikov, A.** *On stopping times for a Wiener process.* Theory of Probability and its Applications **16**, 449-456 (1971)

[Rev] **Revuz, D. / Yor, M.** *Continuous Martingales and Brownian Motion.* Third Edition. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1999)

[Rog1] **Rogers, L.C.G. / Williams, D.** *Diffusions, Markov Processes and Martingales.* Volume One: Foundations. Second Edition. John Wiley & Son's, Chichester (1994)

[Rog2] **Rogers, L.C.G. / Williams, D.** *Diffusions, Markov Processes and Martingales.* Volume Two: Itô Calculus. John Wiley & Son's, Chichester (1987)

[Schm] **Schmitz, N.** *Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitstheorie.* Teubner, Stuttgart (1996)

[She1] **Shepp, L. A.** *Explicit solutions to some problems of optimal stopping.* The Annals of Mathematical Statistics **40**, 993-1010 (1969)

[She2] **Shepp, L. A. / Shiryaev, A. N.** *The Russian option: Reduced regret.* The Annals of Applied Probability **3**, 631-640 (1993)

[She3] **Shepp, L. A.** *A first passage time problem for a Wiener process.* The Annals of Mathematical Statistics **38**, 1912-1914 (1967)

[Shi1] **Shiryaev, A. N.** *On optimum methods in quickest detection problems.* Theory of Probability and its Applications **8**, 22-46 (1963)

[Shi2] **Shiryaev, A. N.** *Essentials of Stochastic Finance.* World Scientific, Singapore (1999)

[Stee] **Steele, J. M.** *Stochastic Calculus and Financial Applications.* Springer-Verlag, New York (2001)

[Wood] **Woodroofe, M. / Lerche, R. / Keener, R.** *A generalized parking problem.* Statistical Decision Theory and related Topics V, 523-532 Springer-Verlag, Berlin (1993)

Münster, 10. September 2003

Ich versichere hiermit, die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und dabei keine anderen Hilfsmittel als die angegebenen verwendet zu haben.