Zufällige logistische Transformationen

Diplomarbeit

von Silke Ahlers

6. November 2007

Betreut durch Prof. Dr. G. Alsmeyer
Institut für Mathematische Statistik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Ich danke Professor G. Alsmeyer
für die Betreuung und Unterstützung
bei der Erstellung dieser Arbeit.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

In dieser Arbeit werden wir uns mit zufälligen logistischen Transformationen beschäftigen. Eine Abbildung

$$x \mapsto f(x) = Cx(1-x),$$

die wir nur auf dem Intervall $[0,1]$ betrachten werden, heißt logistische Transformation. Dabei ist die Konstante $C \in [0,4]$ gewählt, damit der Bildraum wieder dem Intervall $[0,1]$ entspricht. Durch Iteration dieser Abbildung f bei fest gewähltem C entsteht ein bereits intensiv untersuchtes dynamisches System (s. Devaney [12], Graczyk und Swiatek [14]), das häufig zur Modellierung von Populationsentwicklungen benutzt wird (s. z.B. May [18], Klebaner [16]). Die logistischen Transformationen bieten dabei die Möglichkeit, viele Faktoren zu berücksichtigen, die die Entwicklung der Population beeinflussen. Betrachtet man einzelne Generationen, so hängt die Größe P_{n+1} der $(n+1)$-ten Generation durch die der betrachteten Population eigenen Geburts- und Sterberate natürlich von der Größe der n-ten Generation ab. Geht man weiter davon aus, dass es durch äußere Einflüsse wie Nahrungsangebot, Lebensraumgröße etc. eine obere Schranke L für die Populationsgröße gibt, und berücksichtigt man Rivalität und Konkurrenzkampf unter den Individuen, beeinflusst durch deren Anzahl, erhält man als weiteren Faktor

$L - P_n$. Allgemeine Umwelteinflüsse wie das Nahrungsangebot, die Anzahl natürlicher Feinde, das Klima u. Ä. können schließlich durch einen konstanten Faktor C wiedergegeben werden, wobei die oben erwähnte Geburts- und Sterberate auch in dieser Konstante enthalten ist. Bei Division durch L erhält man folglich für die relative Größe X_{n+1} der $(n+1)$-ten Generation:

$$X_{n+1} \;=\; CX_n(1 - X_n).$$

Da nun aber davon auszugehen ist, dass in vielen Fällen die Umwelteinflüsse im Laufe der Zeit variieren können (Populationsschwankungen bei den natürlichen Feinden, Veränderungen im Nahrungsangebot, wechselnde klimatische Bedingungen, usw.), ist es sinnvoll, den Faktor C nicht bei jeder Generation gleich zu wählen. Dies drückt man in einer Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus, die nun an die Stelle des zuvor konstanten Faktors C treten:

$$X_{n+1} \;=\; C_n X_n(1 - X_n).$$

Die Verteilung dieser Zufallsgrößen beinhaltet dann Informationen über mögliche Schwankungen der Umwelteinflüsse bzw. deren Wahrscheinlichkeiten.

Auch Beziehungen der Form

$$P_{n+1} \;=\; (C+1)P_n - \frac{C}{L}P_n^2$$

heißen logistische Gleichung, die man erhält, wenn man die Wachstumsrate einer Population betrachtet (s. Sandefur [23], S.125f). Dazu gehört auch das Verhulst-Populationsmodell, das auf der Gleichung

$$p_{n+1} \;=\; p_n + rp_n(1 - p_n)$$

aufbaut. Das sich dadurch ergebende dynamische System ist ein klassischer Untersuchungsgegenstand der Fraktaltheorie (s. Peitgen und Richter [22] oder Peitgen, Jürgens und Saupe [21]).

Die zufälligen logistischen Transformationen finden auch dort Anwendung, wo bei Versuchen, die auf einem Modell nicht-zufälliger logistischer Transformationen beruhenden, die Konstante C nicht exakt gemessen werden kann. Dabei liegen die Messwerte um die Konstante C gestreut, und man modelliert diese Situation durch eine geeignete Verteilung auf einer Umgebung $(C-\varepsilon, C+\varepsilon)$ des theoretisch vorliegenden Wertes, z. B. durch eine Gleichverteilung oder eine Normalverteilung mit entsprechend kleiner Varianz und Mittelwert C. Andererseits lassen sich durch Betrachtung des Falls einer Gleichverteilung auf einem solchen Intervall $(C-\varepsilon, C+\varepsilon)$ für $\varepsilon \to 0$ möglicherweise Erkenntnisse über den deterministischen Fall gewinnen. Dieser Frage wird von Kifer [17] in Verbindung mit Misiurewicz-Abbildungen nachgegangen.

Bei der Untersuchung zufälliger logistischer Transformationen wollen wir nun wie folgt vorgehen: In Kapitel 2 richten wir das Hauptaugenmerk auf das Langzeitverhalten der durch Iteration der Transformationen entstehenden Markov-Kette und insbesondere auf eine mögliche Stabilität im Sinne der Stationarität. Dafür werden wir notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz stationärer Verteilungen untersuchen, u.a. mit Hilfe von Okkupationsmaßen, die im gleichen Zuge definiert werden. Im Laufe dieses Kapitels kommen wir dann zu folgenden Ergebnissen:

1. Besitzt die Markov-Kette eine invariante Verteilung π mit $\pi\big(\{0\}\big) = 0$, so müssen für die Faktoren C_n, $n \in \mathbb{N}$, schon folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\,|\lg C_n| \;<\; \infty \\ \text{und}\quad &\mathrm{E}\lg C_n \;=\; -\int_{(0,1)} \lg(1-x)\;\pi(dx) \;>\; 0. \end{aligned}$$

2. Gilt für ebendiese Faktoren C_n, $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\lg C_n &> 0 \\ \text{sowie} \quad \mathrm{E}\,|\lg(4 - C_n)| &< \infty, \end{aligned}$$

so existiert eine invariante Verteilung π mit $\pi\big(\{0\}\big) = 0$.

3. Konvergiert eine Teilfolge der Okkupationsmaße schwach gegen ein Maß π, ist dieses invariant.

In Kapitel 3 folgt eine Untersuchung des Konvergenzverhaltens der Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Dazu wird eine Fallunterscheidung in Abhängigkeit von der Verteilung der C_n, $n \in \mathbb{N}$ vorgenommen:

1. Falls $\mathrm{E}\lg C_1 < 0$ erfüllt ist (subkritischer Fall), so gilt

$$X_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \mathrm{P}-\text{f.s..}$$

Hat zusätzlich C_1 endliche Varianz $\mathrm{Var}(\lg C_1) = \sigma^2 < \infty$, ergibt sich

$$\frac{\lg X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \overset{d}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0,1).$$

2. Im kritischen Fall $\mathrm{E}\lg C_1 = 0$ konvergiert die Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in Wahrscheinlichkeit gegen 0, im Allgémeinen aber nicht fast sicher, da eine von der Verteilung der C_n, $n \in \mathbb{N}$, abhängige Menge A existiert, so dass bei beliebigem $x \in A$

$$\mathrm{P}_x\big(X_n \geq \beta \text{ unendlich oft}\big) \;=\; 1$$

für ein geeignetes $\beta \in (0,1)$ gilt, falls zusätzlich $\mathrm{P}(C_1 = 1) < 1$ gültig ist. Dabei ist $A = \emptyset$ im Fall $\mathrm{P}(C_1 = 0) > 0$, für $\mathrm{P}\big(C_1 \in (0,4)\big) = 1$ gilt $A = (0,1)$, und für $P(C_1 = 4) > 0$ ist $\Delta = (0,1) - A$ höchstens abzählbar.

3. Im superkritischen Fall existiert eine von der Dirac-Verteilung δ_0 verschiedene invariante Verteilung, falls $\mathrm{E}\,|\lg(4 - C_1)| < \infty$ gilt.

Diese beiden Kapitel sind an den Artikel von K.B. Athreya und J.J. Dai [4] angelehnt, ebenso das letzte Beispiel in Kapitel 4, wobei in das dritte Kapitel noch Ergebnisse aus dem Artikel von K.B. Athreya und H.-J. Schuh [7] eingehen.

Kapitel 4 beschäftigt sich ausschließlich mit dem superkritischen Fall und der Frage der Eindeutigkeit der invarianten Verteilung. Ein Ergebnis von Athreya und Dai [5] liefert Voraussetzungen an die $C_n,\ n \in \mathbb{N}$, unter denen die Markov-Kette mehr als eine invariante Verteilung besitzt, die nicht die Dirac-Verteilung in 0 ist. Untersuchungen von Dai [11], Bhattacharya und Rao [9] sowie von Bhattacharya und Majumdar [8] zeigen die Eindeutigkeit einer solchen Verteilung, wiederum unter geeigneten Voraussetzungen an die C_n, $n \in \mathbb{N}$.

Im Anhang findet sich eine kurze Zusammenstellung wichtiger Ergebnisse zur Harris-Rekurrenz.

Kapitel 2

Existenz stationärer Verteilungen

Wie schon in der Einleitung angedeutet, wollen wir uns in diesem Kapitel mit stationären Verteilungen der durch Iteration zufälliger logistischer Transformationen entstehenden Markov-Kette beschäftigen, wobei wir immer von folgender Situation ausgehen wollen:

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, auf dem eine Folge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsgrößen mit Werten in $[0,4]$ gegeben sei. Dann definieren wir eine weitere Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ mit Werten in $[0,1]$ durch

$$\begin{aligned} \mathrm{P}^{X_0} : \mathcal{A} &\longrightarrow [0,1] \\ X_{n+1} &= C_{n+1} X_n (1 - X_n) \end{aligned} \tag{2.1}$$

für alle $n \geq 0$, und erhalten eine Folge *iterierter zufälliger logistischer Transformationen*, die eine Markov-Kette mit Zustandsraum $[0,1]$ und mit dem Übergangskern $\mathbb{P}$, gegeben durch

$$\mathbb{P}(x, A) = \mathrm{E}\,\mathbf{1}_A\big(C_1 x(1-x)\big)$$

für alle $x \in [0,1]$ und alle $A \subset [0,1]$, bildet.

2.1 Invariante Verteilungen der Markov-Kette

Im Folgenden begeben wir uns auf die Suche nach invarianten Verteilungen der Markov-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Dabei heißt ein σ-endliches Maß π *stationäres* oder *invariantes Maß*, falls für alle $A \subset [0,1]$

$$\pi\,\mathbb{P}(A) \;:=\; \int_{[0,1]} \mathbb{P}(x,A)\;\pi(dx) \;=\; \pi(A)$$

gilt. Ist π sogar ein Wahrscheinlichkeitsmaß, nennt man es *stationäre* oder *invariante Verteilung* für $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Die Markov-Kette $\mathbf{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist *stationär* unter P_π, falls für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\mathrm{P}_\pi^{\mathbf{X}^{(n)}} \;=\; \mathrm{P}_\pi^{\mathbf{X}}, \tag{2.2}$$

wobei $\mathbf{X}^{(n)} := (X_{n+k})_{k\geq 0}$ definiert ist (s. z.B. [1] oder [2]).

Da wir unsere Aufmerksamkeit im weiteren Verlauf nur auf solche invarianten Maße π lenken wollen, die endlich sind, d.h. $\pi([0,1]) < \infty$, erhalten wir durch

$$\tilde{\pi}(\cdot) \;:=\; \frac{1}{\pi\big([0,1]\big)}\;\pi(\cdot)$$

eine invariante Verteilung, denn es gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}(\cdot) \;&=\; \frac{1}{\pi\big([0,1]\big)}\;\pi(\cdot) \\
&=\; \frac{1}{\pi\big([0,1]\big)} \int_{[0,1]} \mathbb{P}^n(x,\cdot)\;\pi(dx) \\
&=\; \int_{[0,1]} \mathbb{P}^n(x,\cdot)\;\frac{\pi(dx)}{\pi\big([0,1]\big)} \\
&=\; \int_{[0,1]} \mathbb{P}^n(x,\cdot)\;\tilde{\pi}(dx).
\end{aligned}$$

Es genügt demnach die Beschäftigung mit invarianten Verteilungen, wodurch auch Eindeutigkeitsaussagen möglich werden, die sich im Fall eines invarianten Maßes auf Eindeutigkeit bis auf multiplikative Konstanten beschränken müssten. Wir suchen also Wahrscheinlichkeitsmaße π, auf die

$$\mathrm{P}^{X_0} \;=\; \pi \quad\Rightarrow\quad \mathrm{P}^{X_1} \;=\; \pi$$

zutrifft. Die definierende Gleichung (2.1) der Markov-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ legt nun nahe, dass die Verteilung der C_n, $n \in \mathbb{N}$, eine wichtige Rolle beim Finden notwendiger und hinreichender Bedingungen für die Existenz stationärer Verteilungen spielt.

Lemma 2.1. *Jede stationäre Verteilung der Markov-Kette* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *ist im Punkt 1 masselos. Des Weiteren ist die Dirac-Verteilung* δ_0 *invariant und die einzige solche Verteilung, falls* C_1 *nicht f.s. positiv ist, also* $\mathrm{P}(C = 0) > 0$.

Beweis. Nach Gleichung (2.1) gilt für alle $n \geq 0$

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= C_{n+1}X_n(1 - X_n), \\ \text{insbesondere} \qquad X_1 &= C_1 X_0(1 - X_0). \end{aligned}$$

Da weiter C_{n+1} für alle $n \geq 0$ unabhängig von $X_0, \dots, X_n$ ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{P}^{X_1}\big(\{0\}\big) &= \mathrm{P}(X_1 = 0) \\ &= \mathrm{P}\big(C_1 X_0(1 - X_0) = 0\big) \\ &= \mathrm{P}(X_0 = 0) + \mathrm{P}(X_0 = 1) + \mathrm{P}\big(X_0 \in (0,1)\big)\,\mathrm{P}(C_1 = 0) \\ &= \mathrm{P}^{X_0}\big(\{0\}\big) + \mathrm{P}^{X_0}\big(\{1\}\big) + \mathrm{P}^{X_0}\big((0,1)\big)\,\mathrm{P}(C_1 = 0) \end{aligned}$$

Ist nun π eine invariante Verteilung der Kette, gilt also $\pi = \mathrm{P}^{X_0} = \mathrm{P}^{X_n}$ f.a. $n \in \mathbb{N}$, so muss sie der Gleichung

$$\pi\big(\{0\}\big) = \pi\big(\{0\}\big) + \pi\big(\{1\}\big) + \pi\big((0,1)\big)\,\mathrm{P}(C_1) \tag{2.3}$$

und entsprechend

$$\begin{aligned} \pi\big(\{1\}\big) &= 0 \\ \text{sowie} \quad \pi\big((0,1)\big)\,\mathrm{P}(C_1 = 0) &= 0 \end{aligned}$$

genügen. Falls $\mathrm{P}(C_1 = 0)$ positiv ist, muss $\pi\big((0,1)\big)$ verschwinden, d.h. $\pi\big(\,(0,1]\,\big) = 0$ und $\pi\big(\{0\}\big) = 1 - 0 = 1$. In diesem Fall ist π demnach gleich der Dirac-Verteilung im Punkt 0. Diese ist offensichtlich eine invariante Verteilung für $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. $\square$

Der degenerierte Fall $\pi = \delta_0$ ist hier nicht weiter von Interesse, und so werden wir uns im Folgenden solchen Verteilungen π zuwenden, für die $\pi\big((0,1)\big) \in (0,1]$ gilt. Wie gerade gesehen, müssen wir dazu $C_1 > 0$ f.s. voraussetzen.

Lemma 2.2. *Ist π eine invariante Verteilung mit $\pi\big((0,1)\big) \in (0,1)$, so gibt es eine weitere invariante Verteilung $\tilde{\pi}$ mit $\tilde{\pi}\big((0,1)\big) = 1$.*

Beweis. Gibt es ein invariantes π mit $\pi\big((0,1)\big) \in (0,1)$, kann es auch so ausgedrückt werden:

$$\pi \;=\; \pi\big(\{0\}\big)\,\delta_0 + \Big(1 - \pi\big(\{0\}\big)\Big)\,\tilde{\pi} \tag{2.4}$$

mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{\pi}$ mit $\tilde{\pi}\big((0,1)\big) = 1$. Dieses Maß ist als Linearkombination von π und δ_0 wieder invariant:

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi} \;&=\; \frac{\pi - \pi\big(\{0\}\big)\,\delta_0}{1 - \pi\big(\{0\}\big)} \\
&=\; \frac{\pi\,\mathbb{P} - \pi\big(\{0\}\big)\,\delta_0\,\mathbb{P}}{1 - \pi\big(\{0\}\big)} \\
&=\; \frac{\pi - \pi\big(\{0\}\big)\,\delta_0}{1 - \pi\big(\{0\}\big)}\,\mathbb{P} \\
&=\; \tilde{\pi}\,\mathbb{P},
\end{aligned}$$

wobei die Invarianz von π und δ_0 sowie die Linearität der Integration im Maß ausgenutzt wurden. □

2.2 Notwendige Bedingungen

Wie in dem vorhergehenden Lemma wollen wir auch im nun folgenden ersten Theorem von einer gegebenen invarianten Verteilung ausgehen, um Aufschlüsse über notwendige Bedingungen für die Existenz invarianter Verteilungen zu gewinnen. Die dortigen Ergebnisse werden die Vorüberlegung bestätigen, dass hier die Verteilung der Faktoren $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entscheidend ist.

Theorem 2.3. *Es sei π eine invariante Verteilung für die durch (2.1) definierte Markov-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $\pi\big(\{0\}\big) = 0$. Dann gilt für alle $i \geq 1$:*

1. $\mathrm{E}\,|\lg C_i| \ < \infty$,

2. $\mathrm{E}\,\lg C_i \ > 0$,

3. $\mathrm{E}\,\lg C_i \ = \ -\int_{(0,1)} \lg(1-x)\ \pi(dx)$.

Beweis. X_0 habe die Verteilung π. Dann besitzt diese auch X_1 wegen der Invarianz von π. Durch Anwendung des natürlichen Logarithmuses auf die gemäß (2.1) bestehende Beziehung $X_1 \ = \ C_1 X_0(1-X_0)$ ergibt sich nun:

$$\lg X_1 \ = \ \lg C_1 + \lg X_0 + \lg\,(1-X_0). \tag{2.5}$$

Um die Punkte 1.-3. in der Allgemeinheit des Theorems zu zeigen, bedarf es einer länglichen Argumentation mit Hilfe eines Stutzungsverfahrens. Setzt man allerdings zusätzlich die Existenz des Erwartungswertes von $\lg X_0$ voraus, vermag man die Aussagen 1.-3. schneller (und auf intuitiv verständliche Weise) zu erreichen. Schauen wir uns diesen Spezialfall einmal genauer an:

Nach der Definition der Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sind die Zufallsgrößen C_n, $n \in \mathbb{N}$, identisch verteilt, und es reicht, C_1 zu betrachten. Wegen

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,\big|\lg\big(C_1\mathbf{1}_{[1,4]}(C_1)\big)\big| \ &= \ \mathrm{E}\,\Big(\lg\big(C_1\mathbf{1}_{[1,4]}(C_1)\big)\Big) \\
&\leq \ \lg 4 \ < \ \infty
\end{aligned}$$

hat im Fall $\mathrm{E}\,|\lg X_0| < \infty$ Folgendes Gültigkeit:

$$\begin{aligned}
\infty \ &> \ \mathrm{E}\,|\lg X_0| + \mathrm{E}\,\lg\big(C_1\mathbf{1}_{[1,4]}(C_1)\big) \\
&= \ \mathrm{E}\,|\lg X_1| + \mathrm{E}\,\big|\lg\big(C_1\mathbf{1}_{[1,4]}(C_1)\big)\big| \\
&= \ \mathrm{E}\,\big|\lg X_1 - \lg\big(C_1\mathbf{1}_{[1,4]}(C_1)\big)\big|.
\end{aligned}$$

Dabei ergibt sich die erste Gleichung aus der Verteilungsgleichheit von X_0 und X_1 und die zweite geht auf die Ungleichungen $\lg\big(C_1\mathbf{1}_{[1,4]}(C_1)\big) \geq 0$ und

$\lg X_0 \leq 0$, da X_0 $[0,1]$-wertig ist, zurück. Da C_1 nur Werte in $[0,4]$ annimmt, kann man mit Gleichung (2.5) schließen:

$$\begin{aligned}
\infty \ &> \ \mathrm{E}\,\big|\lg X_1 - \lg\big(C_1\mathbf{1}_{[1,4]}(C_1)\big)\big| \\
&= \ \mathrm{E}\,\big|\lg X_0 + \lg(1-X_0) + \lg C_1 - \lg\big(C_1\mathbf{1}_{[1,4]}(C_1)\big)\big| \\
&= \ \mathrm{E}\,\big|\lg X_0 + \lg(1-X_0) + \lg\big(C_1\mathbf{1}_{[0,1)}(C_1)\big)\big| \\
&= \ \mathrm{E}\,\big|\lg X_0\big| + \mathrm{E}\,\big|\lg(1-X_0)\big| + \mathrm{E}\,\big|\lg\big(C_1\mathbf{1}_{[0,1)}(C_1)\big)\big|
\end{aligned}$$

Dies impliziert die Existenz der Erwartungswerte von $\lg(1-X_0)$ und $\lg C_1$. Nun gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\ \lg X_0 \ &= \ \mathrm{E}\ \lg X_1 \\
&= \ \mathrm{E}\,\big(\lg X_0 + \lg(1-X_0) + \lg C_1\big) \\
&= \ \mathrm{E}\ \lg X_0 + \mathrm{E}\ \lg(1-X_0) + \mathrm{E}\ \lg C_1 \\
\Leftrightarrow \qquad 0 \ &= \ \mathrm{E}\ \lg(1-X_0) + \mathrm{E}\ \lg C_1 \\
\Leftrightarrow \qquad \mathrm{E}\ \lg C_1 \ &= \ \mathrm{E}\,\big(-\lg(1-X_0)\big) \ = \ \mathrm{E}\,\big|\lg(1-X_0)\big|
\end{aligned}$$

Da $-\lg(1-X_0) > 0$ für $X_0 \in [0,1)$ gilt und der Punkt 1 gemäß (2.3) für die invariante Verteilung masselos ist, folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\ \lg C_1 \ &= \ \mathrm{E}\,\big(-\lg(1-X_0)\big) \\
&= \ \int_{(0,1)} \big(-\lg(1-x)\big)\ \pi(dx) \ > 0.
\end{aligned}$$

Kümmern wir uns jetzt um den allgemeinen Fall, in dem nichts über $\mathrm{E}\,|\lg X_0|$ bekannt ist. Doch vor der Beschäftigung mit dem oben schon angekündigten Stutzungsargument seien hier noch zwei Bezeichnungen und eine später nützliche Ungleichung festgehalten.

Für eine reelle Funktion $f:\Omega\to\mathbb{R}$, $\omega\mapsto f(\omega)$ sind der Positivteil f^+ und der Negativteil f^- durch

$$\begin{aligned}
f^+(\omega) \ &= \ \max\big\{f(\omega),0\big\}, \\
f^-(\omega) \ &= \ \max\big\{-f(\omega),0\big\}
\end{aligned}$$

erklärt, und es gilt

$$\begin{aligned} f^+, f^- &\geq 0, \\ f &= f^+ - f^-, \\ |f| &= f^+ + f^-. \end{aligned}$$

Des Weiteren schreibt man häufig $a \vee b$ für das Maximum zweier reeller Zahlen a, b und entsprechend $a \wedge b$ für das Minimum. Es gilt zudem für alle a, b, $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\big|(a \wedge k) - (b \wedge k)\big| \leq |a - b|, \tag{2.6}$$

wie nachstehende Fallunterscheidung zeigt:

1. Für $a < k, b < k$ gilt: $\big|(a \wedge k) - (b \wedge k)\big| = |a - b|$,
2. für $a < k \leq b$: $\big|(a \wedge k) - (b \wedge k)\big| = |a - k| = k - a \leq b - a = |a - b|$,
3. für $a \geq k > b$ gilt (2.6) nach 2. wegen der Symmetrie in a und b,
4. für $a \geq k, b \geq k$ ist: $\big|(a \wedge k) - (b \wedge k)\big| = |k - k| = 0 \leq |a - b|$.

Zur weiteren Vorbereitung des Beweises definieren wir vier Zufallsgrößen:

$$\begin{aligned} \eta &:= \lg C_1 \\ Y_0 &:= -\lg X_0 \\ Y_1 &:= -\lg X_1 \\ Z &:= -\lg(1 - X_0) + (\lg C_1)^- \\ &= -\lg(1 - X_0) + \eta^-. \end{aligned}$$

Wegen $X_0, X_1 \in [0, 1]$ sind Y_0, Y_1 und $-\lg(1 - X_0)$ nicht-negativ, während dies auf η^- definitionsgemäß zutrifft. Folglich ist auch Z eine nicht-negative Zufallsgröße.

Ausgehend von Gleichung (2.5) erhält man:

$$
\begin{aligned}
-Y_1 &= \lg X_1 \\
&= \lg X_0 + \lg(1-X_0) + (\lg C_1)^+ - (\lg C_1)^- \\
&= -Y_0 - \big(-\lg(1-X_0)\big) + \eta^+ - \eta^- \qquad (2.7)\\
&= -Y_0 + \eta^+ - Z \\
\Rightarrow \quad Z &= Y_1 - Y_0 + \eta^+ \quad \mathrm{P}-\text{f.s.}
\end{aligned}
$$

Die abschließende Folgerung ist richtig, da nach Voraussetzung $\pi\big(\{0\}\big) = 0$ und gemäß (2.3) $\pi\big(\{1\}\big) = 0 = \mathrm{P}(C_1 = 0)$ gilt und die Zufallsgrößen nur für $X_0 \in \{0,1\}$, $X_1 = 0$ und $C_1 = 0$ unendlich sind. Diese Zufallsgröße $Y_1 - Y_0 + \eta^+$, die fast sicher Z entspricht, wird nun durch eine natürliche Zahl gestutzt. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei

$$
Z_k := (Y_1 \wedge k) - (Y_0 \wedge k) + \eta^+. \qquad (2.8)
$$

Da C_1 $[0,4]$-wertig und daher $\eta^+ = \lg\big(C_1 \mathbf{1}_{[1,4]}(C_1)\big)$ ist, ergibt sich unter Beachtung der Nicht-Negativität der betrachteten Zufallsgrößen

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\,|\eta^+| &= \mathrm{E}\,\eta^+ \leq \lg 4 < \infty, \\
\mathrm{E}\,|Y_1 \wedge k| &= \mathrm{E}\,(Y_1 \wedge k) \\
&= \mathrm{E}\,(-\lg X_1 \wedge k) \\
&= \mathrm{E}\,(-\lg X_0 \wedge k) \\
&= \mathrm{E}\,(Y_0 \wedge k) \\
&= \mathrm{E}\,|Y_0 \wedge k| \leq k < \infty.
\end{aligned}
$$

Damit kann $\mathrm{E}\,|Z_k|$ abgeschätzt werden:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\,|Z_k| &= \mathrm{E}\,\big|(Y_1 \wedge k) - (Y_0 \wedge k) + \eta^+\big| \\
&\leq \mathrm{E}\,\big(|Y_1 \wedge k| + |Y_0 \wedge k| + |\eta^+|\big) \\
&\leq 2k + \lg 4 < \infty,
\end{aligned}
$$

d.h. der Erwartungswert von Z_k existiert und ist gleich

$$\mathrm{E}\, Z_k \;=\; \mathrm{E}\,(Y_1 \wedge k) - \mathrm{E}\,(Y_0 \wedge k) + \mathrm{E}\,\eta^+ \;=\; \mathrm{E}\,\eta^+. \tag{2.9}$$

Anhand einer viergliedrigen Fallunterscheidung kann man leicht verdeutlichen, dass $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge fast sicher nicht-negativer Zufallsgrößen darstellt:

1. Auf $\{Y_1 \geq k, Y_0 \geq k\}$ gilt:

$$\begin{aligned} Z_k &= (Y_1 \wedge k) - (Y_0 \wedge k) + \eta^+ \\ &= k - k + \eta^+ \;\geq 0, \end{aligned}$$

2. auf $\{Y_1 \geq k, Y_0 < k\}$:

$$\begin{aligned} Z_k &= k - Y_0 + \eta^+ \\ &> \eta^+ \;\geq 0, \end{aligned}$$

3. auf $\{Y_1 < k, Y_0 \geq k\}$ gilt nach (2.7):

$$\begin{aligned} Z_k &= Y_1 - k + \eta^+ \\ &\geq Y_1 - Y_0 + \eta^+ \\ &= Z \;\geq 0 \quad \mathrm{P}-\text{f.s.}, \end{aligned}$$

4. auf $\{Y_1 < k, Y_0 < k\}$ gilt ebenfalls mit (2.7):

$$\begin{aligned} Z_k &= Y_1 - Y_0 + \eta^+ \\ &= Z \;\geq 0 \quad \mathrm{P}-\text{f.s.} \end{aligned}$$

Außerdem wissen wir

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}\Big(\lim_{k\to\infty} Z_k = Z\Big) \\ = {}&\mathrm{P}\Big(\lim_{k\to\infty} \big((Y_1 \wedge k) - (Y_0 \wedge k) + \eta^+\big) = Y_1 - Y_0 + \eta^+ = Z\Big) \;= 1, \end{aligned}$$

da nach Voraussetzung $\mathrm{P}(X_0 = 0) = \mathrm{P}(X_1 = 0) = \pi(\{0\}) = 0$ und somit $\mathrm{P}(Y_0 = -\lg X_0 = \infty) = \mathrm{P}(Y_1 = -\lg X_1 = \infty) = 0$ gilt. Zur Abschätzung des Erwartungswertes von Z kann infolgedessen das Lemma von Fatou verwendet werden:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,|Z| &= \mathrm{E}\,Z \\
&= \mathrm{E}\lim_{k\to\infty} Z_k \\
&= \mathrm{E}\liminf_{k\to\infty} Z_k \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \mathrm{E}\,Z_k \\
&= \liminf_{k\to\infty} \mathrm{E}\,\eta^+ \;=\; \mathrm{E}\,\eta^+ < \infty,
\end{aligned}$$

wobei bei der Ungleichung das Lemma von Fatou und bei der vorletzten Gleichheit die Beziehung (2.9) benutzt wurde. Wie in (2.7) gezeigt, ist Z fast sicher gleich $Y_1 - Y_0 + \eta^+$, woraus durch

$$\begin{aligned}
\infty &> \mathrm{E}\,Z + \mathrm{E}\,\eta^+ \\
&= \mathrm{E}\,|Z| + \mathrm{E}\,|\eta^+| \\
&\geq \mathrm{E}\,|Z - \eta^+| \\
&= \mathrm{E}\,|Y_1 - Y_0|
\end{aligned}$$

die Integrierbarkeit von $Y_1 - Y_0$ geschlossen wird. Zudem sind die nichtnegativen Zufallsgrößen η^- und $-\lg(1 - X_0)$ integrierbar, da sie durch $Z = -\lg(1 - X_0) + \eta^-$ majorisiert werden. Damit ist Behauptung 1. gezeigt, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,|\lg C_i| &= \mathrm{E}\,|\lg C_1| \\
&= \mathrm{E}\,(\eta^+ + \eta^-) \\
&= \mathrm{E}\,\eta^+ + E\eta^- \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Da für alle $k \in \mathbb{N}$ nach (2.6) Z_k durch

$$\begin{aligned} 0 \;\leq\; Z_k &= (Y_1 \wedge k) - (Y_0 \wedge k) + \eta^+ \\ &\leq \big|(Y_1 \wedge k) - (Y_0 \wedge k)\big| + \eta^+ \\ &\leq |Y_1 - Y_0| + \eta^+ \end{aligned}$$

abgeschätzt werden kann, also eine integrierbare Majorante besitzt, folgt mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\,\eta^+ &= \lim_{k\to\infty} \mathrm{E}\,\eta^+ \\ &= \lim_{k\to\infty} \mathrm{E}\,Z_k \\ &= \mathrm{E} \lim_{k\to\infty} Z_k \;=\; \mathrm{E}\,Z \\ &= \mathrm{E}\big(-\lg(1-X_0) + \eta^-\big) \\ &= -\mathrm{E}\,\lg(1-X_0) + \mathrm{E}\,\eta^- \\ \Leftrightarrow \quad \mathrm{E}\,\lg C_1 &= \mathrm{E}\,\eta^+ - \mathrm{E}\,\eta^- \\ &= -\mathrm{E}\,\lg(1-X_0) \\ &= -\int_{[0,1]} \lg(1-x)\;\pi(dx) \\ &= -\int_{(0,1)} \lg(1-x)\;\pi(dx) \end{aligned}$$

unter Verwendung von (2.9) bei der zweiten Gleichung. Die letzte Gleichung ist gültig, da $\pi\big(\{0\}\big) = \pi\big(\{1\}\big) = 0$ vorausgesetzt wurde. Auf $(0,1)$ ist $-\lg(1-x)$ positiv, d.h.

$$\mathrm{E}\,\lg C_1 \;=\; -\int_{(0,1)} \lg(1-x)\;\pi(dx) \;>\; 0,$$

was den Beweis der Behauptungen 2. und 3. abschließt. □

2.3 Okkupationsmaße

Die im vorigen Abschnitt bewiesenen Bedingungen sind also notwendig für die Existenz einer invarianten Verteilung. Was aber sind hinreichende Bedingungen, mit deren Hilfe man entsprechende Verteilungen finden kann? Das im nächsten Abschnitt vorgestellte Verfahren setzt die Feller-Eigenschaft, eine Glattheitseigenschaft der Kette, und die Definition der sogenannten Okkupationsmaße voraus. (Die Feller-Eigenschaft geht dabei im Beweis von Lemma 2.6 ein.) Anhand des Konvergenzverhaltens dieser Maße können weitere Aussagen über mögliche invariante Verteilungen getroffen bzw. solche bestimmt werden.

Definition 2.4. Ein Übergangskern $\mathbb{P}(\cdot,\cdot)$ bzw. die zugehörige Markov-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Zustandsraum S besitzt die *Feller-Eigenschaft*, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ mit Grenzwert $x \in S$ und jede beschränkte, stetige Funktion h auf dem Zustandsraum S, der eine Borel-Untermenge eines vollständigen separablen metrischen Raumes sei, gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left(h(X_1) \,|\, X_0 = x_n\right) \;=\; \mathrm{E}\left(h(X_1) \,|\, X_0 = x\right).$$

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[0,1]$, die für $n \to \infty$ gegen $x \in [0,1]$ konvergiere. Des Weiteren sei $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ beschränkt und stetig. Dann erhält man für die durch (2.1) definierte Markov-Kette mit Hilfe majorisierter Konvergenz und der Stetigkeit der Funktion h dieses:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left(h(X_1) \,\middle|\, X_0 = x_n\right) &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left(h\big(C_1 x_n(1-x_n)\big) \,\middle|\, X_0 = x_n\right) \\
&= \mathrm{E} \lim_{n\to\infty} \left(h\big(C_1 x_n(1-x_n)\big) \,\middle|\, X_0 = x_n\right) \\
&= \mathrm{E}\left(h\big(C_1 x(1-x)\big) \,\middle|\, X_0 = x\right) \\
&= \mathrm{E}\left(h(X_1) \,\middle|\, X_0 = x\right)
\end{aligned}$$

Die von uns betrachtete Markov-Kette ist also Fellersch. In anderen Worten: $\mathbb{P}(x_n,\cdot) \xrightarrow{w} \mathbb{P}(x,\cdot)$ für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ mit $x_n \to x \in [0,1]$ für $n \to \infty$, d.h. $\mathbb{P}(y,\cdot)$ ist schwach stetig in y. Nun definieren wir weiter:

Definition 2.5. Für eine Markov-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sind die *Okkupationsmaße* $\big(\mu_n(x,\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ für beliebiges x aus dem Zustandsraum S der Kette gegeben durch

$$\begin{aligned} \mu_n(x,A) &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{P}^j(x,A) \\ &= \frac{1}{n}\,\mathrm{E}_x\left(\sum_{j=0}^{n-1}\mathbf{1}_A(X_j)\right) \end{aligned} \tag{2.10}$$

für alle $A \subset S$.

Dabei übertragen sich die definierenden Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes von den $\mathbb{P}^j,\ j\in\{0,\dots,n-1\}$ auf die $\mu_n(x,\cdot),\ n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mu_n(x,\emptyset) &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{P}^j(x,\emptyset) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}0 = 0, \\ \mu_n(x,S) &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{P}^j(x,S') = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}1 = 1 \\ \mu_n\Bigg(x,\bigcup_{k\geq 1}A_k\Bigg) &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{P}^j\Bigg(x,\bigcup_{k\geq 1}A_k\Bigg) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}^j(x,A_k) \\ &= \sum_{k\geq 1}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{P}^j(x,A_k) \\ &= \sum_{k\geq 1}\mu_n(x,A_k) \end{aligned}$$

für alle Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Teilmengen in S bei Anwendung majorisierter Konvergenz in der vorletzten Gleichung. Die Okkupationsmaße $\mu_n(x,\cdot)$ geben also nach der Definition für jede Menge $A\subset S$ den erwarteten Anteil der ersten n Schritte an, der in die Menge A fällt, wenn man vom Anfangspunkt $X_0 = x$ ausgeht, und entsprechend nehmen sie nur Werte aus dem Einheitsintervall an. Da die durch (2.1) bestimmte Markov-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ (wie oben nachvollzogen) über die Feller-Eigenschaft verfügt, wollen wir für sie die Okkupationsmaße einführen. Im Folgenden bezeichne

$M := \{\mu_n(x,\cdot)|x \in [0,1], n \in \mathbb{N}\}$ die Familie der zu $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gehörigen Okkupationsmaße. Da der Zustandsraum dieser Maße kompakt ist, ist die Familie M sowie jede Teilfamilie $M_x := \{\mu_n(x,\cdot)|n \in \mathbb{N}\}$, $x \in [0,1]$, straff, und auf Grund der Normiertheit die Familien M und M_x, $x \in [0,1]$, auch gleichmäßig beschränkt. Dies ist äquivalent dazu, dass diese Familien schwach relativ folgenkompakt sind, d.h. dass jede Folge in M oder M_x, $x \in [0,1]$, eine schwach konvergente Teilfolge besitzt (vgl. [3], Satz 44.4). Somit existiert zu jedem $x \in [0,1]$ eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass die Maße $\mu_{n_k}(x,\cdot)$ für $k \to \infty$ schwach gegen ein Maß π_x konvergieren, das dann notwendigerweise ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist (s. [3], Bem. 36.2(a)).

2.4 Hinreichende Bedingungen

Lemma 2.6. *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Feller-Kette mit den Okkupationsmaßen $\big(\mu_n(x,\cdot)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ und einer schwach konvergenten Teilfolge $\big(\mu_{n_k}(x,\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzmaß π_x für ein Element x des Zustandsraumes der Kette. Dann ist π_x eine invariante Verteilung der Markov-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.*

Beweis. Es seien $\big(\mu_{n_k}(x,\cdot)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ und π_x wie im Lemma gefordert. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int \mathbb{P}(y,\cdot)\ \mu_{n_k}(x,dy) &= \int \mathbb{P}(y,\cdot)\bigg(\frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} \mathbb{P}^j(x,dy)\bigg) \\
&= \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} \int \mathbb{P}(y,\cdot)\ \mathbb{P}^j(x,dy) \\
&= \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} \mathbb{P}^{j+1}(x,\cdot) \\
&= \frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k} \mathbb{P}^{j}(x,\cdot)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} \mathbb{P}^j(x,\cdot) + \frac{1}{n_k}\big(\mathbb{P}^{n_k}(x,\cdot) - \mathbb{P}^0(x,\cdot)\big) \\
&= \mu_{n_k}(x,\cdot) + \frac{1}{n_k}\big(\mathbb{P}^{n_k}(x,\cdot) - \mathbb{P}^0(x,\cdot)\big) \\
&\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \pi_x(\cdot) + 0
\end{aligned}$$

Weiterhin ist der Übergangskern $\mathbb{P}(y,\cdot)$ schwach stetig in y, da er die Feller-Eigenschaft besitzt, und es gilt wegen der schwachen Konvergenz der $\mu_{n_k}(x,\cdot)$ gegen π_x

$$\int \mathbb{P}(y,\cdot)\ \mu_{n_k}(x,dy) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int \mathbb{P}(y,\cdot)\ \pi_x(dy).$$

Zusammen ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\pi_x(\cdot) &= \lim_{k\to\infty} \int \mathbb{P}(y,\cdot)\ \mu_{n_k}(x,dy) \\
&= \int \mathbb{P}(y,\cdot)\ \pi_x(dy),
\end{aligned}$$

d.h. π_x ist eine invariante Verteilung der Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. □

Korollar 2.7. *Sei* $\mathrm{E}\,\lg C_1 \le 0$*. Dann gilt:*

1. δ_0 *ist das einzige invariante Wahrscheinlichkeitsmaß.*

2. *Für jedes* $x \in [0,1]$ *konvergieren die Okkupationsmaße* $(\mu_{n,x})_{n\in\mathbb{N}}$ *schwach gegen* δ_0*.*

3. *Die empirischen Maße* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, definiert durch*

$$V_n(\omega, A) := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{1}_A\big(X_j(\omega)\big),$$

konvergieren schwach in Wahrscheinlichkeit gegen δ_0 *für jede Startverteilung von* X_0*, d.h. für jede stetige und beschränkte Funktion* f *auf* $\mathbb{R}$ *und jedes* $\varepsilon > 0$ *gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\left|\int f\ dV_n - \int f\ d\delta_0\right| \ \ge\ \varepsilon\right) = 0.$$

Beweis. 1. Wie in Theorem 2.3 gezeigt muss für jede invariante Verteilung π mit $\pi(\{0\}) = 0$ schon $\mathrm{E} \lg C_1 > 0$ gelten. Ist Letzteres nicht erfüllt, ist also $\mathrm{E} \lg C_1 \leq 0$, so trägt jede invariante Verteilung positive Masse in 0. In Lemma 2.1 haben wir bereits gesehen, dass die Dirac-Verteilung in 0 eine invariante Verteilung ist. Nehmen wir an, π sei eine invariante Verteilung mit $\pi(\{0\}) \in (0,1)$. Dann findet man gemäß Lemma 2.2 eine weitere invariante Verteilung $\tilde{\pi}$, die $\tilde{\pi}((0,1)) = 1$ und somit $\tilde{\pi}(\{0\}) = 0$ erfüllt, was im Widerspruch zur Voraussetzung $\mathrm{E} \lg C_1 \leq 0$ steht. Demzufolge ist δ_0 die einzige invariante Verteilung der Kette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, wenn $\mathrm{E} \lg C_1 \leq 0$ gilt.

2. Nach Lemma 2.6 und den zugehörigen Vorbemerkungen wissen wir, dass $\big(\mu_n(x,\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ für jeden Wert $x \in [0,1]$ eine Teilfolge $\big(\mu_{n_k}(x,\cdot)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ enthält, die schwach gegen eine invariante Verteilung π_x konvergiert. Dies bedeutet aber, dass jede Teilfolge $\big(\mu_{n_l}(x,\cdot)\big)_{l\in\mathbb{N}}$ von $\big(\mu_n(x,\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ bei beliebigem $x \in [0,1]$ eine Teilfolge $\big(\mu_{n_{l_k}}(x,\cdot)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ umfasst, die schwach gegen ein invariantes π_x konvergiert. Gemäß 1. gilt aber immer $\pi_x = \delta_0$, d.h. alle konvergenten Teilfolgen haben denselben Grenzwert. Daher folgt auch $\mu_n(x,\cdot) \xrightarrow{w} \delta_0$ für $n \to \infty$ (s. [3], Kor. 44.5).

3. Es sei f stetig und beschränkt und $\varepsilon > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(\left|\int f\, dV_n - \int f\, d\delta_0\right| \geq \varepsilon\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\left|\int f(x)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \delta_{X_j}(dx)\right) - \frac{1}{\varepsilon} f(0)\right| \geq \varepsilon\right) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{E}\left(\int f(x)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \delta_{X_j}(dx)\right)\right) - \frac{1}{\varepsilon} f(0) \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\int f(x)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{P}(X_j \in dx)\right) - \frac{1}{\varepsilon} f(0) \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\int f(x)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}^j(X_0, dx)\right) - \frac{1}{\varepsilon} f(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\varepsilon} \int f(x)\ \mu_n(X_0, dx) - \frac{1}{\varepsilon} f(0) \\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\varepsilon} \int f(x)\ \delta_0(dx) - \frac{1}{\varepsilon} f(0) \ = \ 0, \end{aligned}$$

wobei für die dritte Zeile folgende Überlegung verwendet wurde:

Es sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Funktionen f, für die

$$\mathrm{E}\bigg(\int f(x) \bigg(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{X_j}(dx) \bigg) \bigg) \ = \ \int f(x) \bigg(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{P}(X_j \in dx) \bigg)$$

gilt. Für jede messbare Menge A gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\bigg(\int \mathbf{1}_A(x) \bigg(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{X_j}(dx) \bigg) \bigg) \ &= \ \mathrm{E}\bigg(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{1}_A(X_j) \bigg) \\ &= \ \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{P}(X_j \in A) \\ &= \ \int \mathbf{1}_A(x) \bigg(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{P}(X_j \in dx) \bigg), \end{aligned}$$

d.h. die elementaren Funktionen liegen in $\mathcal{M}$. Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz erhält man für jede aufsteigende Folge nichtnegativer messbarer Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\bigg(\int \sup_{n\geq 1} f_n(x) \bigg(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{X_j}(dx) \bigg) \bigg) \\ &= \sup_{n\geq 1} \mathrm{E}\bigg(\int f_n(x) \bigg(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{X_j}(dx) \bigg) \bigg) \\ &= \sup_{n\geq 1} \int f_n(x) \bigg(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{P}(X_j \in dx) \bigg) \\ &= \int \sup_{n\geq 1} f_n(x) \bigg(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{P}(X_j \in dx) \bigg), \end{aligned}$$

wobei in der ersten und in der letzten Gleichung ausgenutzt wurde, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aufsteigend ist. Jede solche Folge ist demnach in $\mathcal{M}$ enthalten. Wegen der Linearität der Integration und des Erwartungswertes liegt für beliebige $f, g \in \mathcal{M}$ auch deren Differenz $f - g$

in $\mathcal{M}$. Dies bedeutet, dass $\mathcal{M}$ alle messbaren numerischen Funktionen, insbesondere also alle stetigen und beschränkten Funktionen auf $\mathbb{R}$ umfasst. $\square$

In Theorem 2.3 haben wir notwendige Bedingungen für die Existenz einer invarianten Verteilung gefunden und hätten natürlich gerne, dass diese schon hinreichende sind. Doch für diese Umkehrung des Theorems brauchen wir (auch unter Zuhilfenahme der Okkupationsmaße) eine zusätzliche Voraussetzung, worauf das folgende Theorem näher eingeht:

Theorem 2.8. *Seien* $\mathrm{E} \lg C_1 > 0$ *und* $\mathrm{E}\left|\lg(4 - C_1)\right| < \infty$. *Dann existiert eine invariante Verteilung* π *mit* $\pi\big(\{0\}\big) = 0$ *für die durch Gleichung (2.1) definierte Markov-Kette* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Beweis. Da jede Grenzverteilung einer schwach konvergenten Teilfolge von $\big(\mu_n(x,\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ mit beliebigem $x \in [0,1]$ nach Lemma 2.6 invariant ist, genügt es zu zeigen, dass mindestens eine der Grenzverteilungen von δ_0 verschieden ist. Denn laut Lemma 2.2 gibt es zu jeder invarianten Verteilung π mit $\pi\big(\{0\}\big) \in (0,1)$ eine solche Verteilung $\tilde{\pi}$ mit $\tilde{\pi}\big(\{0\}\big) = 0$.

Angenommen, jede (schwach) konvergente Teilfolge von $\big(\mu_n(x,\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen δ_0. Dann ist (wie im Beweis von Korollar 2.7,2.) auch $\big(\mu_n(x,\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach konvergent mit Grenzverteilung δ_0. Wir werden zeigen, dass dies $\mathrm{E} \lg C_1 \le 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung impliziert.

Durch Anwendung des natürlichen Logarithmus auf die Gleichung (2.1) erhält man

$$\begin{aligned} \lg X_{n+1} &= \lg C_{n+1} + \lg X_n + \lg(1 - X_n) \quad \text{f.a. } n \ge 0 \\ \Rightarrow \quad \lg X_{n+1} - \lg X_n &= \lg C_{n+1} + \lg(1 - X_n) \quad \mathrm{P-f.s.} \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n+1}(\lg X_j - \lg X_{j-1}) &= \sum_{j=1}^{n+1}\big(\lg C_j + \lg(1-X_{j-1})\big) \\ &= \sum_{j=1}^{n+1}\lg C_j + \sum_{j=0}^{n}\lg(1-X_j) \quad \mathrm{P-f.s.}\end{aligned} \tag{2.11}$$

Für jedes $j \geq 1$ gilt die Abschätzung $X_j = C_j X_{j-1}(1-X_{j-1}) \leq \frac{C_j}{4}$, woraus sich vermöge der Stetigkeit des Logarithmus' Folgendes schließen lässt:

$$\begin{aligned} [0,1] \ni \left(1-\frac{C_j}{4}\right) &\leq (1-X_j) \in [0,1] \\ \Rightarrow \quad \lg\left(1-\frac{C_j}{4}\right) &\leq \lg(1-X_j) \leq 0 \\ \Rightarrow \quad \left|\lg\left(1-\frac{C_j}{4}\right)\right| &\geq \big|\lg(1-X_j)\big|. \end{aligned}$$

Laut Voraussetzung ist

$$\begin{aligned} \infty &> \mathrm{E}\big|\lg(4-C_j)\big| \\ &= \mathrm{E}\left|\lg 4 + \lg\left(1-\frac{C_j}{4}\right)\right| \\ &\geq -\lg 4 + \mathrm{E}\left|\lg\left(1-\frac{C_j}{4}\right)\right| \\ &\geq -\lg 4 + \mathrm{E}\big|\lg(1-X_j)\big|, \end{aligned}$$

d.h. für alle $j \geq 1$ existiert der Erwartungswert von $\lg(1-X_j)$. Vermöge der Bildung des Erwartungswertes in Gleichung (2.11) unter der Bedingung $X_0 = x$ bekommen wir

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_x\big(\lg X_{n+1} - \lg X_0\big) &= \mathrm{E}_x\left(\sum_{j=1}^{n+1}\big(\lg X_j - \lg X_{j-1}\big)\right) \\ &= \mathrm{E}_x\left(\sum_{j=1}^{n+1}\lg C_j + \sum_{j=0}^{n}\lg(1-X_j)\right) \\ &= (n+1)\,\mathrm{E}_x \lg C_1 + \sum_{j=0}^{n}\mathrm{E}_x \lg(1-X_j), \end{aligned}$$

und daraus folgt

$$\frac{1}{n+1}\,\mathrm{E}_x\big(\lg X_{n+1} - \lg X_0\big) = \mathrm{E}\,\lg C_1 + \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\int \lg(1-y)\ \mathbb{P}^j(x,dy),$$

was wiederum Folgendes impliziert:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1}\,\mathrm{E}_x\big(\lg X_{n+1}-\lg X_0\big) &= \mathrm{E}\,\lg C_1+\int \lg(1-y)\Big(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}^j(x,dy)\Big)\\ &= \mathrm{E}\,\lg C_1+\int \lg(1-y)\;\mu_{n+1}(x,dy).\end{aligned} \tag{2.12}$$

Nun gilt für $I_n := \Big\{\frac{1}{n+1}\ \sum_{j=1}^{n+1}\ \big|\lg\big(1-\frac{C_j}{4}\big)\big| > a\Big\}$:

$$\begin{aligned}&\lim_{a\to\infty}\ \sup_{n\in\mathbb{N}_0}\int_{I_n}\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\Big|\lg\Big(1-\frac{C_j}{4}\Big)\Big|\,d\mathrm{P}\\ =\ &\lim_{a\to\infty}\ \sup_{n\in\mathbb{N}_0}\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\int_{I_n}\Big|\lg\Big(1-\frac{C_j}{4}\Big)\Big|\,d\mathrm{P}\\ =\ &\lim_{a\to\infty}\ \sup_{n\in\mathbb{N}_0}\int_{I_n}\Big|\lg\Big(1-\frac{C_j}{4}\Big)\Big|\,d\mathrm{P}\ =\ 0\end{aligned}$$

wegen

$$\mathrm{E}\Big|\lg\Big(1-\frac{C_j}{4}\Big)\Big|\ \le\ \mathrm{E}\,\big|\lg(4-C_j)\big|\ <\ \infty,$$

d.h. die Familie $\Big(\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\big|\lg\big(1-\frac{C_j}{4}\big)\big|\Big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist gleichgradig integrierbar. Mit Hilfe der Beziehung $\lg(1-X_j)\ \le\ \big|\lg(1-\frac{C_j}{4})\big|$ für alle $j\ \ge\ 1$ folgt die gleichgradige Integrierbarkeit der Familie $\big(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\lg(1-X_j)\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Konvergieren nun die Okkupationsmaße $\big(\mu_n(x,\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen δ_0, gilt (nach [3], Satz 50.5)

$$\lim_{n\to\infty}\int \lg(1-y)\;\mu_{n+1}(x,dy)\ =\ \int \lg(1-y)\;\delta_0(dy)\ =\ 0.$$

Die rechte Seite der Gleichung (2.12) strebt demnach für $n\ \to\ \infty$ gegen $\mathrm{E}\lg C_1$, während für die linke Seite Folgendes zutrifft:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1}\,\mathrm{E}_x\big(\lg X_{n+1}-\lg X_0\big) &= \frac{1}{n+1}\,\mathrm{E}_x\lg X_{n+1}-\frac{1}{n+1}\,\lg x\\ &\le -\frac{1}{n+1}\,\lg x\\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\ 0\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,\lg C_1 &= \lim_{n\to\infty}\left(\mathrm{E}\,\lg C_1 + \int \lg(1-y)\ \mu_{n+1}(x,dy)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\ \mathrm{E}_x\left(\lg X_{n+1} - \lg X_0\right)\right)\\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Da dies der Voraussetzung $\mathrm{E}\lg C_1 > 0$ widerspricht, muss es, wie zu Beginn des Beweises aufgezeigt, eine invariante Verteilung π der Markov-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ geben, für die $\pi\big(\{0\}\big) = 0$ gilt. $\square$

Kapitel 3

Konvergenzverhalten der Markov-Kette

In diesem Kapitel soll das Konvergenzverhalten von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für $n \to \infty$ untersucht werden. Wie die vorhergehenden Betrachtungen in Kapitel 2 zeigen, ist es von hoher Bedeutung für das Verhalten der Kette, welchen Wert $\mathrm{E}\lg C_1$ annimmt. Dabei sind die drei Fälle

1. $\mathrm{E}\lg C_1 < 0$,

2. $\mathrm{E}\lg C_1 = 0$,

3. $\mathrm{E}\lg C_1 > 0$

von Interesse, die als *subkritisch* (1. Fall), *kritisch* (2. Fall) und *superkritisch* (3. Fall) bezeichnet werden. Gemäß dieser Fallunterscheidung gliedert sich das Kapitel in drei Abschnitte, deren erster sich mit dem subkritischen Fall befasst. Dort wird gezeigt, dass die X_n, $n \in \mathbb{N}_0$, fast sicher gegen 0 konvergieren, während $\frac{\lg X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ in Verteilung gegen die Standard-Normalverteilung strebt. Im kritischen Fall lässt sich festhalten, dass statt der starken fast sicheren Konvergenz (im subkritischen Fall) die schwächere Konvergenz in Wahrscheinlichkeit vorliegt. Im superkritischen Fall gibt es eine von δ_0 verschiedene invariante Verteilung, falls zusätzlich $\mathrm{E}\left|\lg(4-C_j)\right| < \infty$ erfüllt ist.

3.1 Der subkritische Fall

Theorem 3.1. *Ist* $\mathrm{E}\lg C_1 < 0$, *so ist* $X_n = \mathcal{O}(\lambda^n)$ *fast sicher für* $n \to \infty$ *und für jedes* $\lambda < 1$ *mit* $\lg\lambda > \mathrm{E}\lg C_1$, *insbesondere* $X_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \mathrm{P}-\text{f.s.}$

Beweis. Da für jedes $n \geq 0$ die Zufallsgrößen X_n und $1 - X_n$ $[0,1]$-wertig sind, gilt

$$0 \;\leq\; X_n \;=\; C_n X_{n-1}(1 - X_{n-1}) \;\leq\; C_n X_{n-1}$$

für alle $n \geq 1$. Durch Iteration erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 \;\leq\; X_n \;&\leq\; C_n X_{n-1} \\ &\leq\; C_n C_{n-1} X_{n-2} \\ &\;\;\vdots \\ &\leq\; C_n \cdots C_1 X_0 \\ &\leq\; \prod_{j=1}^{n} C_j. \end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\left(\prod_{j=1}^{n} C_j\right)^{\frac{1}{n}} \;=\; \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \lg C_j\right).$$

Nun sind die C_n, $n \in \mathbb{N}$, und damit auch die $\lg C_n$, unabhängig und identisch verteilt, so dass der Satz von Etemadi anwendbar ist und

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \lg C_j \;\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}\; \mathrm{E}\,\lg C_1 \quad \mathrm{P}-\text{f.s.}$$

liefert, d.h.

$$\left(\prod_{j=1}^{n} C_j\right)^{\frac{1}{n}} \;\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}\; \exp\big(\mathrm{E}\lg C_1\big) \;\in\; (0,1) \quad \mathrm{P}-\text{f.s.}$$

Für jedes $\lambda \in (0,1)$ mit $\lg\lambda > \mathrm{E}\lg C_1$ gilt

$$\lambda \;=\; \exp(\lg\lambda) \;>\; \exp\big(\mathrm{E}\lg C_1\big)$$

und daher:

$$\begin{aligned}\left|\frac{X_n}{\lambda^n}\right| \;&\leq\; \left|\frac{\prod_{j=1}^n C_j}{\lambda^n}\right| \\ &<\; \left|\frac{\prod_{j=1}^n C_j}{\big(\exp(E\lg C_1)\big)^n}\right| \\ &\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}\; 1.\end{aligned}$$

Damit haben wir aber die Behauptung bewiesen:

$$0 \;\leq\; X_n \;\leq\; \prod_{j=1}^n C_j \;\leq\; \mathcal{O}(\lambda^n) \;\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}\; 0 \quad \mathrm{P-f.s.} \qquad \square$$

Dieses Konvergenzverhalten lässt sich genauer fassen:

Theorem 3.2. *Sind* $\mathrm{E}\lg C_1 < 0$ *und* $\mathrm{E}(\lg C_1)^2 < \infty$*, so gilt für jeden Anfangspunkt* $X_0 = x > 0$*:*

$$\frac{\lg X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \;\stackrel{d}{\longrightarrow}\; \mathcal{N}(0,1),$$

wobei μ *für* $\mathrm{E}\lg C_1$ *und* σ^2 *für* $\mathrm{Var}(\lg C_1)$ *steht.*

Beweis. Im Beweis des Theorems 2.8 $\big($Gleichung (2.11)$\big)$ wurde bereits gezeigt, dass

$$\begin{aligned}\lg X_n - \lg X_0 \;&=\; \sum_{j=0}^{n-1}\big(\lg X_{j+1} - \lg X_j\big) \\ &=\; \sum_{j=1}^{n}\lg C_j + \sum_{j=0}^{n-1}\lg(1-X_j) \quad \mathrm{P-f.s.}\end{aligned}$$

gilt, woraus leicht

$$\begin{aligned}&\big(n\sigma^2\big)^{-\frac12}(\lg X_n - n\mu) \\ =\; &\big(n\sigma^2\big)^{-\frac12}\left(\sum_{j=1}^{n}\lg C_j - n\mu + \sum_{j=0}^{n-1}\lg(1-X_j) + \lg X_0\right) \quad \mathrm{P-f.s.}\end{aligned}$$

folgt. Da $(\lg C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen ist, genügt sie dem zentralen Grenzwertsatz, d.h.

$$\left(n\sigma^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{n}\lg C_j - n\mu\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

Weiter konvergiert $\left(n\sigma^2\right)^{-\frac{1}{2}} \lg X_0 = \left(n\sigma^2\right)^{-\frac{1}{2}} \lg x$ für jeden Anfangspunkt $X_0 = x > 0$ gegen 0, falls $n \to \infty$.

Wie im vorangehenden Theorem 3.1 gesehen, ist $X_n = \mathcal{O}(\lambda^n)$ fast sicher für jedes $\lambda < 1$ mit $\lg\lambda > \mathrm{E}\lg C_1$. Zudem gilt für $x \in (-1,1)$ beliebig

$$\lg(1-x) = -\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\, x^j. \tag{3.1}$$

Geht $x \to 0$, ist dementsprechend wegen

$$\begin{aligned}\left|\frac{\lg(1-x)}{x}\right| &= \left|\frac{-\sum_{j\geq 1}\frac{1}{j}\,x^j}{x}\right| \\ &= \sum_{j\geq 1}\frac{1}{j}\,x^{j-1} \\ &\xrightarrow{x\to 0} 1\end{aligned}$$

$\lg(1-x) = \mathcal{O}(x)$, d.h. $\lg(1-X_j) = \mathcal{O}(\lambda^j)$ fast sicher für $j \to \infty$ und jedes gemäß Theorem 3.1 gewählte λ. Damit erhalten wir, dass die Folge $\left(\frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}}\sum_{j=0}^{n-1}\lg(1-X_j)\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ fast sicher punktweise gegen 0 konvergiert, insbesondere gilt also:

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\int\frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}}\left|\sum_{j=0}^{n-1}\lg(1-X_j)\right| d\mathrm{P} \\ &= \lim_{n\to\infty} -\int\frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}}\sum_{j=0}^{n-1}\lg(1-X_j)\, d\mathrm{P} = 0 \\ \Rightarrow\quad & \frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}}\sum_{j=0}^{n-1}\lg(1-X_j) \xrightarrow{\mathcal{L}_1} 0 \\ \Rightarrow\quad & \frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}}\sum_{j=0}^{n-1}\lg(1-X_j) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0,\end{aligned}$$

wobei die erste Folgerung nach dem Satz von Riesz und die zweite nach Satz 50.8 aus [3] gilt. Mit dem Satz von Slutsky folgt dann die Behauptung:

$$\frac{\lg X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1). \qquad \square$$

Die Argumentation des obigen Beweises kann ohne viel Mühe an den Fall angepasst werden, dass die Verteilung von $\lg C_1$ im Anziehungsbereich einer stabilen Verteilung liegt. Dabei heißt eine Verteilung G *stabile Verteilung* oder einfach *stabil*, wenn für jede Folge unabhängiger, identisch G-verteilter Zufallsgrößen $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und für jedes $n \geq 1$ Konstanten $a_n > 0$ und b_n existieren, so dass

$$Z_1 + \ldots + Z_n \stackrel{d}{=} a_n Z_0 + b_n.$$

Weiter sagt man, dass eine Verteilung Q im *Anziehungsbereich* der stabilen Verteilung G liegt, wenn es Konstanten $\sigma_n > 0$ und μ_n gibt, so dass bei einer Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängiger gemäß Q verteilter Zufallsgrößen die normalisierten Partialsummen

$$S_n = \frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu_n$$

in Verteilung gegen G konvergieren (s. z.B. [3], Abschnitt 49).

Theorem 3.3. *Liegt die Verteilung von* $\lg C_1$ *im Anziehungsbereich einer stabilen Verteilung* G*, so gilt bei beliebigem Anfangswert* $X_0 = x \in (0,1)$ *für geeignete reelle Folgen* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$*:*

$$\frac{\lg X_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} G.$$

Beweis. Wie im Beweis des vorigen Theorems 3.2 gesehen, gelten

$$\begin{aligned} \lg X_n - \lg X_0 &= \sum_{j=1}^{n} \lg C_j + \sum_{j=0}^{n-1} \lg(1 - X_j), \quad n \geq 1, \\ \lg(1 - X_j) &= \mathcal{O}(\lambda^j) \quad \mathrm{P-f.s.}, \text{ falls } j \to \infty, \end{aligned} \tag{3.2}$$

für jedes $\lambda < 1$ mit $\lg \lambda > \mathrm{E} \lg C_1$. Liegt nun $\lg C_1$ im Anziehungsbereich einer stabilen Verteilung G, gibt es Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\frac{1}{b_n}\left(\sum_{j=1}^{n} \lg C_j - a_n\right) \xrightarrow{d} G.$$

Wegen (3.2) überträgt sich dieses Grenzwertverhalten des Random Walks $\big(\sum_{j=1}^{n} \lg C_j\big)_{n\in\mathbb{N}}$ auf die Folge $\big(\lg X_n - \lg X_0\big)_{n\in\mathbb{N}}$, d.h.

$$\frac{\lg X_n - (\lg X_0 + a_n)}{b_n} \xrightarrow{d} G,$$

womit das Theorem bewiesen ist. $\square$

3.2 Der kritische Fall

Theorem 3.4. *Im kritischen Fall* $\mathrm{E} \lg C_1 = 0$ *konvergiert die Folge* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *in Wahrscheinlichkeit gegen 0.*

Zum Beweis des Theorems wird eine zweite, gestutzte Markov-Kette $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konstruiert, zu deren (Konvergenz-)Verhalten drei Lemmata aufgestellt werden, vermöge derer das Theorem bewiesen wird.

Zunächst seien die Funktionen f_C und g_C für jedes $C \in [0,4]$ und $x \in [0,1]$ durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} f_C(x) &= Cx(1-x), \\ g_C(x) &= \min\left\{\frac{1}{2}, Cx(1-x)\right\} \end{aligned}$$

definiert, weshalb offensichtlich $0 \le g_C(x) \le f_C(x) \le 1$ für alle x, C gilt. Da die Funktion $x(1-x)$ auf dem Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ monoton wachsend mit Werten in $[0, \frac{1}{2}]$ ist, ist auch g_C mit beliebigem $C \in [0,4]$ monoton wachsend auf diesem Intervall mit Werten darin. Nun sei $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie in der Definition der Markov-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen mit Werten in $[0,4]$. Dann lässt sich eben diese Markov-Kette durch

$$X_{n+1} = f_{C_{n+1}}(X_n) \quad \text{f.a. } n \ge 0$$

darstellen. Analog dazu sei eine zweite Markov-Kette $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch

$$Y_{n+1} \;=\; g_{C_{n+1}}(Y_n)$$

definiert.

Bevor wir uns den angekündigten Lemmata zuwenden, sei noch auf eine abkürzende Schreibweise hingewiesen: Im Folgenden steht $X_{n,x}$ für X_n mit Anfangswert $X_0 = x$ und entsprechend $Y_{n,x}$ für Y_n mit $Y_0 = x$. Nun zu den Behauptungen:

Lemma 3.5. *Sind* $X_0 = Y_0 = x \le \frac{1}{2}$ *und* $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, *so gilt für alle* $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{P}(X_{n,x} \ge \varepsilon) \;\le\; \mathrm{P}(Y_{n,x} \ge \varepsilon).$$

Lemma 3.6. $Y_{n,x}$ *ist für jede Realisierung von* $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *und jedes* $n \in \mathbb{N}$ *monoton wachsend in* x *auf dem Intervall* $[0, \frac{1}{2}]$.

Lemma 3.7. $Y_{n,\frac{1}{2}}$ *konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen* 0.

Die Beweise dieser drei Lemmata erfolgen im Anschluss an den des Theorems. Wir wollen zunächst von der Richtigkeit dieser Behauptungen ausgehen und sie für den Beweis der Aussage des Theorems, also der Konvergenz der X_n gegen 0 in Wahrscheinlichkeit, benutzen.

Beweis des Theorems. Da die Zufallsgrößen $\lg C_i$, $i \in \mathbb{N}$, identisch verteilt sind, erhalten wir aus der Voraussetzung an C_1

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{E}\,\lg C_1 \\ &= \mathrm{E}\,\lg C_i \\ &= \mathrm{E}\,\lg C_i \mathbf{1}_{[0,1)}(C_i) + \mathrm{E}\,\lg C_i \mathbf{1}_{[1,4]}(C_i) \quad \text{f.a. } i \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

d.h. für jedes $i \in \mathbb{N}$ verschwindet $\lg C_i$ entweder fast sicher oder $\lg C_i$ nimmt sowohl positive als auch negative Werte mit positiver Wahrscheinlichkeit an.

Dies liefert

$$\begin{aligned}
\delta &:= \mathrm{P}(C_i \le 2) \\
&\ge \mathrm{P}(C_i \le 1) \\
&= \mathrm{P}(\lg C_i \le 0) > 0 \quad i \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Beziehung

$$X_i \;=\; C_i X_{i-1}(1 - X_{i-1}) \;\le\; \frac{C_i}{4} \quad \text{f.a. } i \in \mathbb{N} \tag{3.3}$$

ergibt sich für jeden Startpunkt $X_0 = x \in [0,1]$ folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\Big(\exists\, n \ge 1 : X_{n,x} \le \frac{1}{2}\Big) \;&\ge\; \mathrm{P}_x\big(\exists\, n \ge 1 : C_n \le 2\big) \\
&=\; 1 - \mathrm{P}_x\big(\forall\, n \ge 1 : C_n > 2\big) \\
&=\; 1 - \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{P}_x(C_n > 2) \\
&=\; 1 - \prod_{n \in \mathbb{N}} (1 - \delta) \\
&=\; 1
\end{aligned}$$

Aus diesem Grund genügt es zu zeigen, dass $\mathrm{P}(X_{n,x} \ge \varepsilon) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ für jedes $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ und jedes $x \in [0, \frac{1}{2}]$ gilt. Denn ist $x \in (\frac{1}{2}, 1]$, so tritt die Kette fast sicher irgendwann in das Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ ein, und wir wählen den Ersteintrittspunkt x' als neuen Startpunkt der Kette $(X'_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (X_{n+t})_{n\in\mathbb{N}_0}$, wobei t den Zeitpunkt des Ersteintritts bezeichne. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(X_{n,x} \ge \varepsilon) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(X'_{n,x'} \ge \varepsilon),$$

falls einer der Grenzwerte existiert. Seien also $x \in [0, \frac{1}{2}],\ \varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$ gewählt. Sodann erhält man mit Hilfe der Lemmata 3.5 - 3.7:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_{n,x} \ge \varepsilon) \;&\le\; \mathrm{P}(Y_{n,x} \ge \varepsilon) \\
&\le\; \mathrm{P}(Y_{n,\frac{1}{2}} \ge \varepsilon) \\
&\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}\; 0,
\end{aligned}$$

wobei die erste Ungleichung nach Lemma 3.5, die zweite nach Lemma 3.6 und die Konvergenz nach Lemma 3.7 gilt. Damit ist $X_{n,x} \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$ für beliebiges $x \in [0,1]$ bewiesen. □

Es bleiben noch die Beweise der drei Lemmata zu erbringen.

Beweis von Lemma 3.5. Wir zeigen induktiv, dass für $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ die Implikationen

$$\begin{aligned} X_{n,x} &\leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \geq Y_{n,x} \geq X_{n,x}, \\ X_{n,x} &> \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad Y_{n,x} = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{3.4}$$

gelten.

Für die Anfangspunkte $X_0 = Y_0 = x$ erhalten wir

$$X_{1,x} = f_{C_1}(x) \geq g_{C_1}(x) = Y_{1,x}$$

und daher

$$\begin{aligned} X_{1,x} \leq \frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \quad f_{C_1}(x) \leq \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \quad g_{C_1}(x) = f_{C_1}(x) \\ &\Rightarrow \quad Y_{1,x} = X_{1,x} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} X_{1,x} > \frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \quad f_{C_1}(x) > \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \quad g_{C_1}(x) = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \quad Y_{1,x} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

der Induktionsanfang für $n = 1$ ist somit erfüllt. Seien die Folgerungen (3.4) für jedes $n \leq k$ mit einem $k \in \mathbb{N}$ als Induktionsvoraussetzung gegeben. Insbesondere gilt demnach für $X_{k,x} \leq \frac{1}{2}$ die Ungleichung $\frac{1}{2} \geq Y_{k,x} \geq X_{k,x}$, woraus

$$C_{k+1} Y_{k,x}(1 - Y_{k,x}) \geq C_{k+1} X_{k,x}(1 - X_{k,x}) = X_{k+1,x}$$

wegen der Monotonie von $f_C(x)$ auf $[0, \frac{1}{2}]$ für jedes $C \in [0,4]$ folgt. Mit $Y_{l,x} \leq \frac{1}{2}$ für alle $l \in \mathbb{N}$ bekommen wir nun

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &\geq Y_{k+1,x} \\
&= g_{C_{k+1}}(Y_{k,x}) \\
&= \min\left\{\frac{1}{2}, C_{k+1}Y_{k,x}(1-Y_{k,x})\right\} \\
&\geq \min\left\{\frac{1}{2}, X_{k+1,x}\right\}
\end{aligned}$$

Es gilt also $Y_{k+1,x} \geq X_{k+1,x}$, falls $X_{k+1,x} \leq \frac{1}{2}$ ist, bzw. $Y_{k+1,x} = \frac{1}{2}$, falls $X_{k+1,x} \geq \frac{1}{2}$. Es sei $X_{k,x} > \frac{1}{2}$. Dann ist nach Induktonsvoraussetzung $Y_{k,x} = \frac{1}{2}$. Somit gilt mit (3.3):

$$\begin{aligned}
Y_{k+1,x} &= \min\left\{\frac{1}{2}, C_{k+1}Y_{k,x}(1-Y_{k,x})\right\} \\
&= \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{C_{k+1}}{4}\right\} \\
&\geq \min\left\{\frac{1}{2}, X_{k+1,x}\right\}.
\end{aligned}$$

Es gilt also wieder $Y_{k+1,x} \geq X_{k+1,x}$, falls $X_{k+1,x} \leq \frac{1}{2}$ ist, bzw. $Y_{k+1,x} = \frac{1}{2}$, falls $X_{k+1,x} \geq \frac{1}{2}$. Damit ist der Induktionsschritt von k nach $k+1$ nachgewiesen. Somit gilt für beliebige $x, \varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$ und jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcccl}
& \varepsilon \leq X_{n,x} \leq \frac{1}{2} & \Rightarrow & \varepsilon \leq X_{n,x} \leq Y_{n,x} \leq \frac{1}{2}, \\
& \varepsilon \leq \frac{1}{2} < X_{n,x} & \Rightarrow & X_{n,x} > Y_{n,x} = \frac{1}{2} \geq \varepsilon, \\
\text{also auch} & X_{n,x} \geq \varepsilon & \Rightarrow & Y_{n,x} \geq \varepsilon, \\
\text{und folglich} & \mathrm{P}(X_{n,x} \geq \varepsilon) & \leq & \mathrm{P}(Y_{n,x} \geq \varepsilon).
\end{array}$$

Im Fall $X_0 = Y_0 = 0$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{P}(X_{n,0} \geq \varepsilon) = 0 \leq \mathrm{P}(Y_{n,0} \geq \varepsilon),$$

was den Beweis des Lemmas abschließt. □

Beweis von Lemma 3.6. Da g_C für alle $C \in [0,4]$ auf $[0,\frac{1}{2}]$ eine monoton wachsende Funktion ist und $Y_n \le \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist, gilt:

$$0 \;<\; x \;<\; x' \;\le\; \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad Y_{1,x} \;=\; g_{C_1}(x) \;\le\; g_{C_1}(x') \;=\; Y_{1,x'}.$$

Seien $Y_{n,x} \le Y_{n,x'}$ für alle $n \le k$ mit einem beliebigen $k \in \mathbb{N}$. Dann ergibt sich

$$Y_{k+1,x} \;=\; g_{C_{k+1}}(Y_{k,x}) \;\le\; g_{C_{k+1}}(Y_{k,x'}) \;=\; Y_{k+1,x'}.$$

Diese Induktion zeigt, dass $Y_{n,x} \le Y_{n,x'}$ für jede natürliche Zahl n zutrifft. Das bedeutet aber, dass $Y_{n,x}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede Realisierung der $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine auf dem Intervall $[0,\frac{1}{2}]$ in x monoton wachsende Funktion ist. □

Beweis von Lemma 3.7. Es kann o.B.d.A. $Y_0 = x \in [0,\frac{1}{2}]$ angenommen werden, denn ist $Y_0 = x \in (\frac{1}{2},1]$, ergibt sich $Y_{n,x} = Y_{n,(1-x)}$ für alle $n \ge 1$, wobei jedoch $1-x \in [0,\frac{1}{2}]$ gilt. Für die durch

$$Y_{n+1} \;=\; g_{C_{n+1}}(Y_n) \;=\; \min\Big\{\frac{1}{2}, C_{n+1}Y_n(1-Y_n)\Big\},\;\; n \ge 0,$$

definierte Markov-Kette $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gilt für jede beliebige Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ im Zustandsraum $[0,1]$ mit $y_n \to y_0$ für $n \to \infty$ und jede stetige, beschränkte Funktion h auf $[0,\frac{1}{2}]$:

$$\min\Big\{\frac{1}{2}, C_1 y_n(1-y_n)\Big\} \;\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\; \min\Big\{\frac{1}{2}, C_1 y_0(1-y_0)\Big\}$$

und daher

$$h\Big(\min\Big\{\frac{1}{2}, C_1 y_n(1-y_n)\Big\}\Big) \;\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\; h\Big(\min\Big\{\frac{1}{2}, C_1 y_0(1-y_0)\Big\}\Big),$$

womit wir Folgendes erhalten:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\big(h(Y_1)\,\big|\,Y_0=y_n\big) &= \mathrm{E}\Big(h\Big(\min\Big\{\frac{1}{2}, C_1Y_0(1-Y_0)\Big\}\Big)\Big|\,Y_0=y_n\Big)\\
&= \mathrm{E}\Big(h\Big(\min\Big\{\frac{1}{2}, C_1y_n(1-y_n)\Big\}\Big)\Big|\,Y_0=y_n\Big)\\
&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{E}\Big(h\Big(\min\Big\{\frac{1}{2}, C_1y_0(1-y_0)\Big\}\Big)\Big|\,Y_0=y_0\Big)\\
&= \mathrm{E}\big(h(Y_1)\,\big|\,Y_0=y_0\big).
\end{aligned}$$

Also ist auch die Kette $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Fellersch mit kompaktem Zustandsraum $[0,\frac{1}{2}]$ und wir erhalten die Okkupationsmaße dieser Kette durch

$$\begin{aligned}\mu_n^Y(x,\cdot) \;&:=\; \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{P}(Y_{j,x}\in\cdot)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{P}(Y_j\in\cdot\,|\,Y_0=x).\end{aligned}$$

Wie schon bei der Markov-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist auch hier wegen

$$\sup_{n\geq 1}\;\mu_n^Y\Big(x,\Big[0,\frac{1}{2}\Big]^c\Big) \;=\; 0 \;<\; \varepsilon, \quad \text{f.a. } \varepsilon>0,\; x\in[0,1]$$

die Familie $\big(\mu_n^Y(x,\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ straff und auf Grund der Normiertheit gleichmäßig beschränkt. Nach dem schon zuvor erwähnten Satz 44.4 aus [3] ist sie schwach folgenkompakt. Zu jedem Startpunkt $x\in[0,1]$ existiert also eine schwach gegen ein W-Maß π_x konvergente Teilfolge $\big(\mu_{n_k}^Y(x,\cdot)\big)_{k\in\mathbb{N}}$, wobei π_x dann, wie in Lemma 2.6 gezeigt, invariant ist.

Für jede invariante Verteilung π der Kette $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gilt:

$$\begin{aligned}\pi\big(\{0\}\big) \;&=\; \mathrm{P}(Y_1=0)\\ &=\; \mathrm{P}\Big(\min\Big\{\frac{1}{2}, C_1Y_0(1-Y_0)\Big\}=0\Big)\\ &=\; \mathrm{P}\big(C_1Y_0(1-Y_0)=0\big)\\ &=\; \mathrm{P}(Y_0=0)+\mathrm{P}(Y_0=1)+\mathrm{P}\big(Y_0\in(0,1)\big)\;\mathrm{P}(C_1=0)\\ &=\; \pi\big(\{0\}\big)+\pi\big(\{1\}\big)+\pi\big((0,1)\big)\;\mathrm{P}(C_1=0)\end{aligned}$$

Es muss also immer $\pi\big(\{1\}\big)=0$ gelten sowie $\pi\big((0,1)\big)=0$ in dem Fall, dass $\mathrm{P}(C_1=0)>0$ ist. In diesem Fall ist folglich δ_0 die einzige invariante Verteilung von $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Dass δ_0 tatsächlich invariant ist, zeigt folgende Überlegung: Sei $\mathrm{P}^{Y_0}=\delta_0$. Es muss auch P^{Y_1} die Dirac-Verteilung in 0 sein, da gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y_1 = 0) &= \mathrm{P}\Big(\min\Big\{\frac{1}{2}, C_1 Y_0(1-Y_0)\Big\} = 0\Big) \\
&= \mathrm{P}\big(C_1 Y_0(1-Y_0) = 0\big) \\
&= \mathrm{P}(Y_0) + \mathrm{P}(Y_0 = 1) + \mathrm{P}\big(Y_0 \in (0,1)\big)\ \mathrm{P}(C_1 = 0) \\
&= \delta_0\big(\{0\}\big) + \delta_0\big(\{1\}\big) + \delta_0\big((0,1)\big)\ \mathrm{P}(C_1 = 0) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Wir behaupten nun, dass die Okkupationsmaße $\mu_n^Y(x,\cdot),\ n \in \mathbb{N},\ x \in [0, \frac{1}{2}]$, schwach gegen δ_0 konvergieren, was wir durch einen Widerspruchsbeweis belegen wollen.

Nehmen wir also an, die $\big(\mu_n^Y(x,\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren nicht gegen δ_0. Dann gibt es eine invariante Verteilung π mit $\pi\big(\{0\}\big) \neq 1$. Gemäß Lemma 2.2 gibt es dann auch eine invariante Verteilung, die im Punkt 0 keine Masse trägt. Wir können also o.B.d.A. $\pi\big(\{0\}\big) = 0$ annehmen. Y sei nun wie π verteilt. Aus der Definition der Kette $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ leitet sich

$$Y_1 \le C_1 Y_0(1-Y_0) \tag{3.5}$$

$$\text{und daher} \quad \lg Y_1 \le \lg C_1 + \lg Y_0 + \lg(1-Y_0), \tag{3.6}$$

$$\text{also} \quad (\lg C_1)^- + \big(-\lg(1-Y_0)\big) \le (\lg C_1)^+ + \lg Y_0 - \lg Y_1 \quad \mathrm{P}-\text{f.s.} \tag{3.7}$$

her. Ähnlich wie bei Theorem 2.3 verwenden wir jetzt Stutzungen dieser Zufallsvariablen, um zu $\mathrm{E}\lg C_1 > 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung zu gelangen. Dazu definieren wir

$$\begin{aligned}
\hat{\eta} &:= \lg C_1 \\
\hat{Y}_1 &:= -\lg Y_1 \\
\hat{Y}_0 &:= -\lg Y_0 \\
\hat{Z} &:= -\lg(1-Y_0) + \hat{\eta}^- \\
\hat{Z}_k &:= (\hat{Y}_1 \wedge k) - (\hat{Y}_0 \wedge k) + \hat{\eta}^+, \quad k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Da Y_0 und Y_1 im Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ liegen, sind die Zufallsgrößen $\hat{Y}_0$ und $\hat{Y}_1$ positiv. Aus dem gleichen Grund ist $-\lg(1 - Y_0)$ nicht-negativ, weshalb Gleiches für die Zufallsgröße $\hat{Z}$ gilt. Ungleichung (3.7) lässt sich dadurch umformulieren zu

$$0 \;\le\; \hat{Z} \;\le\; \hat{\eta}^+ - \hat{Y}_0 + \hat{Y}_1. \tag{3.8}$$

Auf Grund der identischen Verteilung von Y_0 und Y_1 sind auch $\hat{Y}_0$ und $\hat{Y}_1$ identisch verteilte Zufallsgrößen mit positiven Werten, deren Stutzungen $\hat{Y}_0 \wedge k$ und $\hat{Y}_1 \wedge k$ für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ beschränkt sind. Des Weiteren ist $C_1 \le 4$, was wegen

$$0 \;\le\; (\lg C_1)^+ \;=\; \mathbf{1}_{[1,4]} \lg C_1 \;\le\; \lg 4$$

Beschränktheit von $\hat{\eta}^+ = (\lg C_1)^+$ bedeutet. Aus diesen Gründen existieren die folgenden Erwartungswerte:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\,(\lg C_1)^+ \;&=\; \mathrm{E}\,\hat{\eta}^+ \;<\; \infty \\ \mathrm{E}\,(\hat{Y}_0 \wedge k) \;&=\; \mathrm{E}\,(\hat{Y}_1 \wedge k) \;<\; \infty. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \infty \;&>\; \mathrm{E}\,\hat{\eta}^+ \\ &=\; \mathrm{E}\,(\hat{Y}_1 \wedge k) - \mathrm{E}\,(\hat{Y}_0 \wedge k) + \mathrm{E}\,\hat{\eta}^+ \\ &=\; \mathrm{E}\,\big((\hat{Y}_1 \wedge k) - (\hat{Y}_0 \wedge k) + \hat{\eta}^+\big) \\ &=\; \mathrm{E}\,\hat{Z}_k, \end{aligned} \tag{3.9}$$

wobei die Existenz des Erwartungswert von $\hat{Z}_k$ wegen folgender Abschätzung gegeben ist:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\,\big|\hat{Z}_k\big| \;&=\; \mathrm{E}\,\big|(\hat{Y}_1 \wedge k) - (\hat{Y}_0 \wedge k) + \hat{\eta}^+\big| \\ &\le\; \mathrm{E}\,\big|\hat{Y}_1 \wedge k\big| + \mathrm{E}\,\big|\hat{Y}_0 \wedge k\big| + \mathrm{E}\,\hat{\eta}^+ \\ &<\; \infty. \end{aligned}$$

Weiter können wir bezüglich $\hat{Z}_k$ Folgendes festhalten:

1. Auf $\{\hat{Y}_1 \geq k, \hat{Y}_0 \geq k\}$ ist

$$\hat{Z}_k \;=\; k - k + \hat{\eta}^+ \;\geq\; 0,$$

2. auf $\{\hat{Y}_1 \geq k, \hat{Y}_0 < k\}$ gilt:

$$\hat{Z}_k \;=\; k - \hat{Y}_0 + \hat{\eta}^+ \;\geq\; 0,$$

3. auf $\{\hat{Y}_1 < k, \hat{Y}_0 \geq k\}$ ergibt sich nach (3.8):

$$\hat{Z}_k \;=\; \hat{Y}_1 - k + \hat{\eta}^+ \;\geq\; \hat{Z} \;\geq\; 0$$

4. und auf $\{\hat{Y}_1 < k, \hat{Y}_0 < k\}$ ebenfalls mit (3.8):

$$\hat{Z}_k \;=\; \hat{Y}_1 - \hat{Y}_0 + \hat{\eta}^+ \;\geq\; \hat{Z} \;\geq\; 0.$$

Da dies für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt, zeigen 1.-4., dass jedes $\hat{Z}_k$ eine nicht-negative Zufallsgröße ist. Nach deren Konstruktion konvergiert $\hat{Z}_k$ für $k \to \infty$ fast sicher gegen $\hat{Y}_1 - \hat{Y}_0 + \hat{\eta}^+$, womit man

$$\begin{aligned}
\infty \;>\; 2\,\mathrm{E}\,\hat{\eta}^+ \;&=\; \mathrm{E}\,\hat{Z}_k + \mathrm{E}\,\hat{\eta}^+ \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \text{also auch} \\
&=\; \liminf_{k\to\infty}\ \mathrm{E}\,\hat{Z}_k + \mathrm{E}\,\hat{\eta}^+ \\
&\geq\; \mathrm{E}\big(\liminf_{k\to\infty} \hat{Z}_k\big) + \mathrm{E}\,\hat{\eta}^+ \\
&=\; \mathrm{E}\big|\hat{Y}_1 - \hat{Y}_0 + \hat{\eta}^+\big| + \mathrm{E}\,\hat{\eta}^+ \\
&\geq\; \mathrm{E}\big|\hat{Y}_1 - \hat{Y}_0 + \hat{\eta}^+ - \hat{\eta}^+\big| \\
&=\; \mathrm{E}\big|\hat{Y}_1 - \hat{Y}_0\big| \\
\text{sowie} \qquad \infty \;&>\; \mathrm{E}\big(\hat{Y}_1 - \hat{Y}_0 + \hat{\eta}^+\big) \\
&\geq\; \mathrm{E}\,\hat{Z}
\end{aligned}$$

bei Verwendung von (3.9) in der ersten Gleichung, des Lemmas von Fatou in der ersten Ungleichung und von (3.8) in der letzten Ungleichung erhält. Da nach Definition die Zufallsgrößen $\hat{Z} = -\lg(1 - Y_0) + \hat{\eta}^-$, $-\lg(1 - Y_0)$

und $\hat{\eta}^-$ nicht-negativ sind, folgt aus der Existenz des Erwartungswertes $\mathrm{E}\,\hat{Z}$ schon

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\big(-\lg(1-Y_0)\big) &= \mathrm{E}\,|-\lg(1-Y_0)| \;<\; \infty,\\
\mathrm{E}\,\hat{\eta}^- &= \mathrm{E}\,|\hat{\eta}^-| \;<\; \infty,\\
\mathrm{E}\,|\hat{\eta}| &= \mathrm{E}\,\hat{\eta}^+ + \mathrm{E}\,\hat{\eta}^- \;<\; \infty,\\
\mathrm{E}\,\hat{\eta} &= \mathrm{E}\,\hat{\eta}^+ - \mathrm{E}\,\hat{\eta}^-.
\end{aligned}$$

Unter Ausnutzung der Integrierbarkeit von $|\hat{Y}_1 - \hat{Y}_0| + \hat{\eta}^+$ folgt mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz und (3.8):

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,\hat{\eta}^+ &= \lim_{k\to\infty} \mathrm{E}\,\hat{Z}_k\\
&= \mathrm{E}\lim_{k\to\infty} \hat{Z}_k\\
&= \mathrm{E}\big(\hat{Y}_1 - \hat{Y}_0 + \hat{\eta}^+\big)\\
&\geq \mathrm{E}\,\hat{Z}\\
&= \mathrm{E}\big(-\lg(1-Y_0) + \hat{\eta}^-\big)\\
&= \mathrm{E}\big(-\lg(1-Y_0)\big) + \mathrm{E}\,\hat{\eta}^-\\
\Leftrightarrow \quad \mathrm{E}\big(-\lg(1-Y_0)\big) &\leq \mathrm{E}\,\hat{\eta}^+ - \mathrm{E}\,\hat{\eta}^-\\
&= \mathrm{E}\,\hat{\eta}\\
&= \mathrm{E}\lg C_1.
\end{aligned}$$

Nun soll laut Annahme $\pi\big(\{0\}\big) = \mathrm{P}(Y_0 = 0) = 0$ gelten, was jedoch

$$\mathrm{P}(Y_0 > 0) \;=\; \mathrm{P}\big(-\lg(1-Y_0) > 0\big) \;>\; 0$$

zur Folge hat. Entsprechend ist

$$\mathrm{E}\,\lg C_1 \;\geq\; \mathrm{E}\big(-\lg(1-Y_0)\big) \;>\; 0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $\mathrm{E}\lg C_1 = 0$. Die Annahme muss demnach falsch gewesen sein, d.h. alle schwach konvergenten Teilfolgen von

$\big\{\mu_n^Y(x,\cdot)|n\in\mathbb{N}, x\in[0,\frac{1}{2}]\big\}$ haben δ_0 als Grenzmaß. Wir können also schließen, dass die Okkupationsmaße schwach gegen δ_0 konvergieren. Für jedes $\varepsilon>0$ bedeutet dies aber

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{P}\big(Y_{j,\frac{1}{2}}\geq\varepsilon\big) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Zu jedem $\delta>0$ und $\varepsilon>0$ findet man also ein $n_0=n(\varepsilon,\delta)$, so dass

$$\mathrm{P}\big(Y_{n_0,\frac{1}{2}}\geq\varepsilon\big) \;<\; \delta.$$

Durch die Markov-Eigenschaft gilt für jedes $j\geq 1$ unter Verwendung von Lemma 3.6:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\big(Y_{n_0+j,x}\geq\varepsilon\big) \;&=\; \mathrm{P}\big(Y_{n_0,Y_{j,x}}\geq\varepsilon\big)\\ &\leq\; \mathrm{P}\big(Y_{n_0,\frac{1}{2}}\geq\varepsilon\big) \;<\; \delta.\end{aligned}$$

Wir haben also Lemma 3.7 bewiesen. □

Nun stellt sich die Frage, ob nicht wie im subkritischen Fall fast sichere Konvergenz der Kette gegen 0 vorliegt. Dass dies im Allgemeinen nicht zutrifft, wird Theorem 3.9 zeigen. Bevor wir jedoch darauf eingehen, betrachten wir die Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, definiert durch

$$U_n \;:=\; -\lg X_n$$

für alle $n\geq 0$, die wir später zum Beweis von Theorem 3.9 benötigen. Das folgende Theorem beschäftigt sich mit der Existenz einer Menge, auf der die U_n, $n\in\mathbb{N}_0$ fast sicher endlich sind:

Theorem 3.8. *Es sei*

$$A \;:=\; \big\{x\in(0,1):\; \mathrm{P}_x\big(\exists\; n\geq 1: X_n=0\big)=0\big\}.$$

Dann gilt:

1. $A=\emptyset$, *falls* $\mathrm{P}(C_1=0)>0$.

2. $A = (0,1)$, *falls* $\mathrm{P}\big(C_1 \in (0,4)\big) = 1$.

3. $\Delta := (0,1) - A$ *ist höchstens abzählbar, falls* $\mathrm{P}(C_1 = 4) > 0$.

4. *Für jedes* $x \in A$ *gilt*

$$\mathrm{P}_x\big(\exists\, n \geq 1 : X_n \in A\big) \;=\; 1,$$

d.h. A *ist eine absorbierende Menge der Markov-Kette* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Beweis. Da im Fall $\mathrm{P}(C_1 = 0) > 0$ für jedes $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_x\big(\exists\, n \geq 1 : \; X_n = 0\big) \;&\geq\; \mathrm{P}_x(X_1 = 0) \\ &=\; \mathrm{P}(C_1 = 0) \;>\; 0 \end{aligned}$$

gilt, muss A die leere Menge sein. Damit ist 1. nachgewiesen. Für die weiteren Betrachtungen sei nun $\mathrm{P}(C_1 = 0) = 0$ vorausgesetzt. Wir setzen wieder $f_C(x) = Cx(1-x)$ für $x \in [0,1]$, $C \in [0,4]$. Die Gleichung $f_C(x) = 1$ hat keine Lösung im Intervall $[0,1]$, falls $C < 4$ ist, bzw. die eindeutige Lösung $x = \frac{1}{2}$ für $C = 4$. Daher sind für jedes $n \geq 2$ die Ereignisse

$$\begin{aligned} A_n \;&:=\; \big\{X_n = 0,\; X_{n-1} \neq 0\big\}, \\ A'_n \;&:=\; \big\{X_{n-1} = 1\big\}, \\ A''_n \;&:=\; \Big\{X_{n-2} = \frac{1}{2},\; C_{n-1} = 4\Big\} \end{aligned}$$

fast sicher gleich unter jedem P_x. Wegen der Unabhängigkeit von C_{n-1} und X_{n-2} folgt daraus für alle $n \geq 2$, $x \in (0,1)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_x\big(A_n\big) \;&=\; \mathrm{P}_x\big(A''_n\big) \\ &=\; \mathrm{P}_x\Big(X_{n-2} = \frac{1}{2}\Big)\; \mathrm{P}\big(C_{n-1} = 4\big). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Definieren wir $A_1 := \{X_1 = 0,\; X_0 \neq 0\}$, erhalten wir außerdem für jeden Anfangswert $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_x(A_1) \;&=\; \mathrm{P}_x(X_1 = 0,\; X_0 \neq 0) \\ &=\; \mathrm{P}(C_1 = 0) \;=\; 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Ist nun $\mathrm{P}(C_1 = 4) = 0$, so gilt für alle $x \in (0,1)$

$$\mathrm{P}_x\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) \;=\; \mathrm{P}_x\big(\exists\, n \geq 1 :\; X_n = 0\big) \;=\; 0.$$

Folglich gilt $A = (0,1)$, womit 2. gezeigt ist.

Nun sei $\mathrm{P}(C_1 = 4) > 0$. Dann liegt 4 in der Menge

$$B \;:=\; \big\{x \in (0,1) :\; \mathrm{P}(C_1 = x) > 0\big\},$$

die höchstens abzählbar sein kann, da C_1 eine Zufallsgröße ist, d.h. sie ist von der Gestalt

$$B \;=\; \{a_1,\; a_2,\; \ldots\}.$$

Für $n \geq 1$ definieren wir nun mit Hilfe der Elemente $a_1,\; a_2,\; \ldots$ von B die Menge

$$\Delta_n \;:=\; \Big\{x \in (0,1) :\; \exists\, i_1, ..., i_n \geq 1 :\; f_{a_{i_n}} \circ \ldots \circ f_{a_{i_1}}(x) = \frac{1}{2}\Big\}.$$

Es ist $f_{a_i}(x) = a_i x(1-x)$ für jedes $a_i \in B$ ein Polynom vom Grad 2, und allgemeiner ist $f_{a_{i_n}} \circ \ldots \circ f_{a_{i_1}}(x)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $i_1, ..., i_n \in B$ ein Polynom vom Grad 2^n, denn es gilt unter der Induktionsvoraussetzung

$$\operatorname{grad}\Big(f_{a_{i_{n-1}}} \circ \ldots \circ f_{a_{i_1}}(x)\Big) \;=\; 2^{n-1}$$

Folgendes

$$\begin{aligned}
&\operatorname{grad}\Big(f_{a_{i_n}} \circ \ldots \circ f_{a_{i_1}}(x)\Big)\\
=\; &\operatorname{grad}\Big(a_{i_n} f_{a_{i_{n-1}}} \circ \ldots \circ f_{a_{i_1}}(x)\big(1 - f_{a_{i_{n-1}}} \circ \ldots \circ f_{a_{i_1}}(x)\big)\Big)\\
=\; &2 \operatorname{grad}\Big(f_{a_{i_{n-1}}} \circ \ldots \circ f_{a_{i_1}}(x)\Big)\\
=\; &2^n,
\end{aligned}$$

da die reellen Zahlen einen Integritätsring bilden. Folglich kann jede Gleichung der Form

$$f_{a_{i_n}} \circ \ldots \circ f_{a_{i_1}}(x) \;=\; \frac{1}{2}$$

höchstens 2^n Lösungen besitzen, was zusammen mit der Abzählbarkeit von B die Abzählbarkeit der Δ_n, $n \in \mathbb{N}$, wie auch von

$$\Delta \;:=\; \bigcup_{n\geq 1} \Delta_n \;\cup\; \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

impliziert. Unter erneuter Verwendung von (3.10) sehen wir, dass für die Gültigkeit von

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_x\big(A_2\big) \; &= \mathrm{P}_x\big(A_2''\big) \\ &= \mathrm{P}_x\Big(X_0 = \frac{1}{2}\Big)\; \mathrm{P}\big(C_1 = 4\big) \\ &> 0 \end{aligned}$$

schon $x = \frac{1}{2}$ erfüllt sein muss. Ebenso ist auf Grund der Unabhängigkeit der C_n, $n \in \mathbb{N}$, die Existenz geeigneter Indizes $i_1, ...i_{n-2} \in \mathbb{N}$ mit

$$f_{a_{i_{n-2}}} \circ \ldots \circ f_{a_{i_1}}(x) \;=\; \frac{1}{2}$$

eine notwendige Voraussetzung für $\mathrm{P}_x(A_n'') > 0$ bei beliebigem $n \geq 3$. Anders formuliert besagt die notwendige Bedingung, dass x ein Element von Δ_{n-2} sein muss. Bei Beachtung von (3.11) gilt für alle $x \in (0,1)$ diese Implikation:

$$\mathrm{P}_x\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) \;>\; 0 \quad\Rightarrow\quad x \;\in\; \Delta.$$

Liegt andererseits x in Δ, gilt $x = \frac{1}{2}$, oder es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und geeignete $i_1, ..., i_n \in \mathbb{N}$, so dass

$$f_{a_{i_n}} \circ \ldots \circ f_{a_{i_1}}(x) \;=\; \frac{1}{2}$$

gilt. In letzterem Fall erhält man mit Hilfe der Beziehung (3.10) und der Definition der Menge $B = \{a_1,\ a_2,\ \ldots\}$, dass ein $m \geq 2$ existiert mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}_x\big(A_m\big) \;>\; 0, \\ \text{und somit}\quad &\mathrm{P}_x\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) \;>\; 0. \end{aligned}$$

Wir haben demnach die Äquivalenz

$$x \in \Delta \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{P}_x\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) > 0$$

gezeigt, was wiederum äquivalent zu $x \notin A$ ist, denn

$$\begin{aligned} & \mathrm{P}_x\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \mathrm{P}_x\big(\exists\, n \geq 1 : \ X_n = 0\big) > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x \notin A. \end{aligned}$$

Folglich ist $\Delta = (0,1) - A$ und damit die dritte Behauptung bewiesen. Behauptung 4. folgt direkt aus der Definition der Menge A und der Markov-Eigenschaft der Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. □

Mit diesem Rüstzeug können wir uns nun an das bereits angekündigte Theorem wagen:

Theorem 3.9. *Es sei A wie in Theorem 3.8. Unter den Voraussetzungen* $\mathrm{E}\lg C_1 = 0$ *und* $\mathrm{P}(C_1 = 1) < 1$ *gibt es ein Niveau* $\beta \in (0,1)$, *so dass für alle* $x \in A$

$$\mathrm{P}_x\big(X_n \geq \beta \text{ unendlich oft}\big) = 1$$

gilt.

Beweis. Die Voraussetzungen $\mathrm{P}(C_1 = 1) < 1$ und $\mathrm{E}\lg C_1 = 0$ implizieren

$$\begin{aligned} \mathrm{P}^{C_1} &\neq \delta_1, \\ \mathrm{P}\big(C_1 \in (0,1)\big) &= \mathrm{P}(\lg C_1 < 0) > 0, \\ \mathrm{P}\big(C_1 \in (1,4]\big) &= \mathrm{P}(\lg C_1 > 0) > 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Weiter kann die Verteilung von C_1 keine Dirac-Verteilung in einem Punkt $a \neq 1$ sein, denn sonst wäre

$$\mathrm{E}\lg C_1 = \lg a \neq 0. \tag{3.13}$$

Wie in Theorem 3.8, 4. gesehen, ist die Menge A absorbierend. Deshalb genügt es, die Existenz eines $\beta \in (0,1)$ mit der Eigenschaft

$$\mathrm{P}\big(\exists\, n \geq 1 : X_n \geq \beta\big) \;=\; 1 \tag{3.14}$$

für alle $x \in A$ zu zeigen. Aus (3.12) folgt, dass es ein $\rho < 1$ gibt mit

$$\alpha \;:=\; \mathrm{P}(C_1 < \rho) \;>\; 0.$$

Ist nun $\rho^k < \varepsilon$ für ein $k \geq 1$ und ein $\varepsilon > 0$, erhalten wir mit der im Beweis zu Theorem 3.1 hergeleiteten Ungleichung

$$X_n \;\leq\; \prod_{i=1}^{n} C_i$$

für alle $n \geq 1$, der Markov-Eigenschaft und der Unabhängigkeit der $C_n,\ n \in \mathbb{N}$, die Abschätzung

$$\inf_{x \in (0,1)} \mathrm{P}(X_k \leq \varepsilon) \;\geq\; \mathrm{P}\bigg(\prod_{i=1}^{n} C_i \leq \varepsilon\bigg) \;\geq\; \alpha^k.$$

Daher ist aber

$$\mathrm{P}_x\big(\exists\, n \geq 1 : X_n \in [0,\varepsilon]\big) \;=\; 1,$$

weshalb (3.14) nur für alle $x \in A \cap (0,\varepsilon)$ mit einem kleinen $\varepsilon > 0$ nachgewiesen werden muss. Umformuliert für die Zufallsgrößen

$$U_n \;=\; -\lg X_n$$

heißt dies, dass wir die Existenz einer Konstante $K \in (0,\infty)$ zeigen, für die

$$\mathrm{P}_x\big(\exists\, n \geq 1 : U_n \leq K\big) \;=\; 1 \tag{3.15}$$

bei beliebigem $x \in A \cap (0,\varepsilon)$ mit hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$ gilt. Dabei sind nach der Definition von A die U_n, $n \in \mathbb{N}$, wohldefiniert unter P_x für jedes $x \in A$. Durch Anwendung des natürlichen Logarithmus auf die Gleichung (2.1) und Ausnutzung der Definition von U_n sowie der Definition

$$D_n \;:=\; -\lg C_n \qquad \text{f.a. } n \geq 1$$

ergibt sich für alle $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} \lg X_{n+1} &= \lg C_{n+1} + \lg X_n + \lg(1 - X_n) \\ \Leftrightarrow \qquad U_{n+1} &= D_{n+1} + U_n + \lg\big(1 - \exp(-U_n)\big). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Weiter gelte

$$\begin{aligned} K &> 1 + \lg 4, \\ T &:= \inf\{n \geq 1 : U_n < K\}, \\ Z_n &:= \lg U_{n \wedge T} \quad \text{f.a. } n \geq 0, \end{aligned}$$

wobei wir $\inf \emptyset = \infty$ setzen. Da C_1 eine $[0,4]$-wertige Zufallsgröße ist, gilt $\lg C_1 \leq \lg 4$ fast sicher. Mit Hilfe der Stoppzeit T und der Beziehung (3.16) können wir die Zufallsgrößen $(U_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und damit auch $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ abschätzen:

$$\begin{aligned} U_n &\geq K, \quad \text{falls } n < T, \\ U_T &= U_{T-1} - \lg C_T - \lg\big(1 - \exp(-U_{T-1})\big) \\ &\geq K - \lg C_T - \lg\big(1 - \exp(-U_{T-1})\big) \\ &\geq K - \lg C_T \\ &\geq K - \lg 4 > 1 \\ \Rightarrow \qquad Z_n &\geq \lg(K - \lg 4) > \lg 1 = 0. \end{aligned}$$

im Folgenden werden wir zeigen, dass ein hinreichend großes $K \in (0, \infty)$ existiert, so dass $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Supermartingal bildet. Daraus erhält man die fast sichere Endlichkeit der Zufallszeit T, woraus Gleichung (3.15) und damit auch die Behauptung folgen. Den Existenzbeweis eines solchen K heben wir uns für den Schluss auf und nehmen zunächst an, dass $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ für ein geeignetes K ein Supermartingal ist. Wie oben gezeigt ist dieses dann ein nicht-negatives Supermartingal, das nach dem Martingalkonvergenzsatz P_x-fast sicher für jedes $x \in A$ gegen ein

$$\begin{aligned} Z_\infty &:= \lim_{n \to \infty} Z_n \\ \infty > Z_\infty &\geq \lg(K - \lg 4) \end{aligned}$$

konvergiert. Wir definieren nun die Ereignisse

$$\begin{aligned} B_1 &:= \left\{\lim_{n\to\infty} Z_n = Z_\infty \text{ existiert}\right\}, \\ B_2 &:= \left\{T = \infty\right\}, \\ B_3 &:= \left\{\lim_{n\to\infty} D_n = -\lim_{n\to\infty} \lg C_n \text{ existiert}\right\}. \end{aligned}$$

Für jedes $x \in A$ gilt demnach $\mathrm{P}_x(B_1) = 1$, und auf dem Ereignis $B_1 \cap B_2$ ist $Z_n = U_n$ für alle $n \geq 0$, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} U_n \ =: \ U_\infty \ \in \ [K - \lg 4, \infty).$$

Dann muss nach (3.16) auch

$$\lim_{n\to\infty} D_n \ = \ -\lim_{n\to\infty} \lg C_n$$

existieren, d.h.

$$B_1 \cap B_2 \ \subset \ B_3.$$

Da aber die C_n, $n \in \mathbb{N}$, wie in (3.13) gesehen, nicht-degenerierte Zufallsgrößen sind, ist die Menge, auf der sie bzw. ihr Logarithmus einen Limes besitzen, eine Nullmenge. es gilt also

$$\mathrm{P}_x(B_3) \ = \ 0$$

bei beliebigem Startwert x. Zusammen ergibt sich

$$\mathrm{P}_x(B_2) \ = \ \mathrm{P}_x(B_1 \cap B_2) \ \leq \ \mathrm{P}_x(B_3) \ = \ 0$$

für alle $x \in A$. Für alle $x \in A$ muss folglich $T = \inf\{n \geq 1 : U_n < K\}$ P_x-fast sicher endlich sein, woraus (3.15) folgt. Damit bleibt nur noch der Nachweis der Existenz eines solchen $K \in (0, \infty)$, für das $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Supermartingal bildet, zu erbringen.

Da $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette ist, gilt Gleiches auch für

$$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \ = \ \big(\lg(-\lg X_{n\wedge T})\big)_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

Daher reicht es, zu zeigen, dass für ein hinreichend großes $K \in (0, \infty)$ und jedes $u \geq K - \lg 4$ mit $\exp(-u) \in A$

$$\mathrm{E}\left(Z_{n+1} \,\middle|\, Z_n = \lg u\right) \;\leq\; \lg u \tag{3.17}$$

erfüllt ist. Die Bedingung $\exp(-u) \in A$ ergibt sich daraus, dass wir u als Realisierung von $U_{n \wedge T} = -\lg X_{n \wedge T}$ auffassen, und dieses nur auf der Menge A wohldefiniert ist. Betrachten wir den Fall $u \in [K - \lg 4, K)$. Gemäß der Definition von T muss dann $T \leq n$ sein, woraus die Implikation

$$Z_n \;=\; \lg U_{n \wedge T} \;=\; \lg u \quad \Rightarrow \quad Z_{n+1} \;=\; \lg u$$

hervorgeht. Im Fall $u \geq K$ gelangen wir mit (3.16) zu

$$\begin{aligned} h(u) \;&:=\; \mathrm{E}\left(Z_{n+1} \,\middle|\, Z_n = \lg u\right) - \lg u \\ &=\; \mathrm{E}\Big(\lg\big(u + D - \lg\big(1 - \exp(-u)\big) - \lg u\big) - \lg u\Big) \\ &=\; \mathrm{E}\left(\lg\left(1 + \frac{D + a(u)}{u}\right)\right), \end{aligned}$$

mit einer wie $D_1 = -\lg C_1$ verteilten Zufallsgröße D und

$$a(u) \;:=\; -\lg\big(1 - \exp(-u)\big).$$

Für den Erwartungswert der Zufallsgröße D gilt nach Definition und Voraussetzung

$$\mathrm{E}\, D \;=\; -\mathrm{E} \lg C_1 \;=\; 0,$$

wodurch wir

$$h(u) \;=\; \mathrm{E}\left(\lg\left(1 + \frac{D + a(u)}{u}\right) - \frac{D}{u}\right)$$

erhalten. Nun haben wir $h(u)$ gerade so definiert, dass die Ungleichung (3.17) genau dann erfüllt ist, wenn für große u

$$h(u) \;\leq\; 0 \tag{3.18}$$

gilt. Nach (3.12) können wir ein $L > 0$ so wählen, dass

$$\mathrm{P}(D \leq L) \;>\; 0.$$

Für große u ist $\exp(-u) \in (0,1)$, und wir können $a(u)$ gemäß Gleichung (3.1) in eine Potenzreihe entwickeln:

$$a(u) \;=\; -\lg\big(1-\exp(-u)\big) \;=\; \sum_{j\geq 1} \frac{1}{j}\,\exp(-ju).$$

Weiter gilt für jedes $k \geq 1$

$$\begin{aligned} u^k\, a(u) \;&=\; \sum_{j\geq 1} \frac{1}{j}\, u^k\, \exp(-u) \;\overset{u\to\infty}{\longrightarrow}\; 0, \\ \text{d.h.} \qquad a(u) \;&=\; o\Big(\frac{1}{u^k}\Big), \qquad \text{falls } u \to \infty. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Auf ähnliche Weise erhält man

$$\begin{aligned} \lg(1+\varepsilon) \;&=\; -\sum_{j\geq 1} \frac{1}{j}\,(-\varepsilon)^j \\ &=\; \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} + o(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{3.20}$$

für $\varepsilon \to 0$. Damit können wir folgende Abschätzungen vornehmen:

$$\begin{aligned} h_1(u) \;:=\; & \mathrm{E}\left(\left(\lg\left(1+\frac{D+a(u)}{u}\right) - \frac{D}{u}\right)\mathbf{1}_{\{D>L\}}\right) \\ =\; & \mathrm{E}\left(\left(\lg\left(1+\frac{D+a(u)}{u}\right) + \lg\exp\left(-\frac{D}{u}\right)\right)\mathbf{1}_{\{D>L\}}\right) \\ =\; & \mathrm{E}\left(\lg\left(\left(1-\frac{D}{u}\right)\,\exp\left(-\frac{D}{u}\right) + \frac{a(u)}{u}\,\exp\left(-\frac{D}{u}\right)\right)\,\mathbf{1}_{\{D>L\}}\right) \\ \leq\; & \mathrm{E}\left(\lg\left(1+\frac{a(u)}{u}\,\exp\left(-\frac{D}{u}\right)\right)\,\mathbf{1}_{\{D>L\}}\right) \\ \leq\; & \mathrm{E}\left(\lg\left(1+\frac{a(u)}{u}\right)\,\mathbf{1}_{\{D>L\}}\right) \\ \leq\; & \lg\left(1+\frac{a(u)}{u}\right) \\ =\; & o\Big(\frac{1}{u^2}\Big) \end{aligned}$$

für $u \to \infty$ mit (3.19) und (3.20). Dabei geht die erste Ungleichung auf die Beziehung

$$1+y \;\leq\; \exp(y) \qquad \text{f.a. } y>0$$

zurück, während sich die zweite aus $\exp(\frac{D}{u}) \leq 1$ ergibt. Im Fall $D \leq L$

berechnen wir

$$\begin{aligned}
h_2(u) \; &:= \; \mathrm{E}\left(\left(\lg\left(1+\frac{D+a(u)}{u}\right)-\frac{D}{u}\right)\mathbf{1}_{\{D\le L\}}\right) \\
&= \; \mathrm{E}\left(\left(\frac{D+a(u)}{u}-\frac{1}{2}\left(\frac{D+a(u)}{u}\right)^2+o\Big(\frac{1}{u^2}\Big)-\frac{D}{u}\right)\mathbf{1}_{\{D\le L\}}\right) \\
&= \; \mathrm{E}\left(\left(\frac{a(u)}{u}-\frac{1}{2}\,\frac{d^2+D\,a(u)+a(u)^2}{u^2}+o\Big(\frac{1}{u^2}\Big)\right)\mathbf{1}_{\{D\le L\}}\right) \\
&= \; \mathrm{E}\left(\left(-\frac{D^2}{2u^2}+o\Big(\frac{1}{u^2}\Big)\right)\mathbf{1}_{\{D\le L\}}\right) \\
&= \; -\frac{1}{2u^2}\;\mathrm{E}\left(D^2\,\mathbf{1}_{\{D\le L\}}\right)+o\Big(\frac{1}{u^2}\Big)
\end{aligned}$$

für $u \to \infty$, wobei die vorletzte Gleichung gemäß (3.19) gilt. Da $\mathrm{P}(D \le L)$ nach Wahl von L positiv ist und

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(D=0) \; &= \; \mathrm{P}(\lg C_1 = 0) \\
&= \; \mathrm{P}(C_1 = 1) \; < \; 1
\end{aligned}$$

nach Voraussetzung gilt, ist der Erwartungswert $\mathrm{E}\left(D^2\,\mathbf{1}_{\{D\le L\}}\right)$ positiv. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}\; u^2\,h(u) \; &= \; \limsup_{n\to\infty}\; u^2\left(h_1(u)+h_2(u)\right) \\
&\le \; -\frac{1}{2}\;\mathrm{E}\left(D^2\,\mathbf{1}_{\{D\le L\}}\right) \; < \; 0.
\end{aligned}$$

Dies impliziert, dass es ein hinreichend großes u_0 gibt, so dass $h(u) < 0$ für alle $u \ge u_0$ gilt. D.h. (3.18) ist erfüllt. Wählen wir

$$K \; > \; u_0 + 1 + \lg 4,$$

so ist auch (3.17) erfüllt und der Beweis damit abgeschlossen. □

Die beiden Theoreme 3.8 und 3.9 legen also nahe, dass im kritischen Fall die Markov-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zwar in Wahrscheinlichkeit, aber im Allgemeinen nicht fast sicher gegen 0 konvergiert, da es eine Ausnahmemenge A gibt, die nicht unbedingt eine Nullmenge ist und auf der ein positives Niveau fast sicher unendlich oft überschritten wird.

Bemerkung 3.10. K.B. Athreya und H.-J. Schuh haben weiter Folgendes gezeigt: Setzt man $\gamma := \sup\{x \in [0,4] : \mathrm{P}(C_1 < x) < 1\}$ für das Supremum des Trägers der Verteilung von C_1, kann man zeigen, dass unter den Voraussetzungen $\mathrm{E}\lg C_1 = 0$ und $\mathrm{P}(C_1 = 1) < 1$ für alle $x \in A$ gilt:

1. Im Fall $1 < \gamma \leq 2$ ist

$$\mathrm{P}_x\Big(\limsup_{n\to\infty} X_n = 1 - \frac{1}{\gamma}\Big) = 1.$$

2. Für $2 < \gamma \leq 4$ gilt

$$\mathrm{P}_x\Big(\limsup_{n\to\infty} X_n \geq 1 - \frac{1}{\gamma}\Big) = 1.$$

   Gibt es ein $d > 1$, so dass für jedes $\varepsilon > 0$

$$\inf\left\{\mathrm{P}\left(a - \varepsilon < C_1 < a + \varepsilon\right) \,\Big|\, \frac{1}{\gamma} \leq a \leq d\right\} > 0$$

   gilt, oder gilt für jedes $\varepsilon > 0$

$$\inf\left\{\mathrm{P}\left(a - \varepsilon < C_1 < a + \varepsilon\right) \,\big|\, 1 \leq a \leq \gamma\right\} > 0,$$

   so ist für alle $x \in A$

$$\mathrm{P}_x\Big(\limsup_{n\to\infty} X_n = \frac{\gamma}{4}\Big) = 1.$$

3. Hat das dynamische System $(f_\gamma^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für $\gamma > 3$ einen periodischen Orbit mit größtem Wert L, gilt

$$\mathrm{P}_x\Big(\limsup_{n\to\infty} X_n \geq L\Big) = 1.$$

Bemerkung 3.11. Mit Hilfe von Theorem 3.9 kann man zeigen, dass im kritischen Fall die empirischen Maße V_n fast sicher schwach gegen δ_0 für jede Anfangsverteilung von X_0 konvergieren.

3.3 Der superkritische Fall

In Kapitel 2 haben wir bereits gesehen, dass im superkritischen Fall eine invariante Verteilung der Markov-Kette existiert, die im Punkt 0 verschwindet, wenn $\mathrm{E}\,|\lg(4 - C_j)| < \infty$ gilt. Dies ist allerdings unter vielfältigsten Voraussetzungen an die Verteilung der C_n, $n \in \mathbb{N}$ erfüllt, so dass hier keine weiteren allgemeinen Aussagen über das Konvergenzverhalten der Kette getroffen werden können. Das folgende Kapitel geht auf ein paar Beispiele solcher Voraussetzngen an die C_n, $n \in \mathbb{N}$ und die Eindeutigkeit invarianter Verteilungen näher ein.

Kapitel 4

Die Eindeutigkeitsfrage

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Frage der Eindeutigkeit möglicher invarianter Verteilungen im superkritischen Fall befassen, die nicht der Dirac-Verteilung entsprechen. (In Kapitel 2 wurde bereits gezeigt, dass im subkritischen und im kritischen Fall keine solche Verteilung vorliegen kann.) Wir werden im Folgenden sehen, dass unter gewissen Voraussetzungen an die Verteilung der C_n, $n \in \mathbb{N}$ mehrere invariante Verteilungen existieren können, die von der Dirac-Verteilung δ_0 verschieden sind. Die in diesem Kapitel aufgeführten Ergebnisse liefern Beispiele sowohl für eine Situation, in der es mindestens zwei unterschiedliche nicht-triviale invariante Verteilungen gibt, als auch für solche Situationen, in denen es genau eine vom Dirac-Maß δ_0 verschiedene gibt. Beginnen wollen wir mit der Situation der Nicht-Eindeutigkeit.

4.1 Nicht-Eindeutigkeit der invarianten Verteilung

Das in diesem Abschnitt vorgestellte Beispiel folgt dem Artikel von K.B. Athreya und J.J. Dai [5], in dem eine Situation, in der verschiedene nicht-triviale invariante Verteilungen der Markov-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ existieren, durch eine geschickte Wahl der Verteilung der Zufallsfaktoren $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geschaffen wird. Dabei greift man auf folgende Konstruktion zurück:

Es sei $\mu_0 = 3,67\ldots$ die einzige im Intervall $(3,4)$ liegende Lösung der Gleichung $g(x) = x^3(4-x) - 16 = 0$. Für $\mu \in (3,\mu_0)$ setzen wir

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{\mu} \\ a &= 1 - b \\ \lambda &= \frac{1}{a} = \frac{\mu}{\mu - 1}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

d.h. $b \in \left(\frac{1}{\mu_0}, \frac{1}{3}\right),\ a \in \left(\frac{2}{3}, \frac{\mu_0 - 1}{\mu_0}\right)$. Durch die Wahl von μ erhalten wir:

$$\begin{aligned} & (\mu-2)^2 > 0 \\ \Leftrightarrow\ & \mu^2 - 4\mu + 4 > 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\mu^2}{4} - \mu + 1 > 0 \\ \Leftrightarrow\ & \mu - \frac{\mu^2}{4} < 1 \\ \Leftrightarrow\ & 1 - \frac{\mu}{4} < b = \frac{1}{\mu} \\ \Leftrightarrow\ & a = 1 - b < \frac{\mu}{4}, \end{aligned}$$

$$\text{also} \quad a, b \in I := \left[1 - \frac{\mu}{4}, \frac{\mu}{4}\right]. \tag{4.2}$$

Wir setzen wieder

$$\begin{aligned} f_c(x) &:= cx(1-x) \quad \text{f.a. } x \in [0,1],\ c \in [0,4], \\ \text{d.h.} \qquad X_n &= f_{C_n}(X_{n-1}) \quad \text{f.a. } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Im Folgenden sei die Verteilung von C_1 durch

$$\mathrm{P}(C_1 \in \cdot) = \eta\,\delta_\lambda + (1-\eta)\,\delta_\mu \tag{4.3}$$

für ein $\eta \in (0,1)$ gegeben. Auf Grund von $\mu \in (3,\mu_0)$ sind $\mu, \lambda > 1$ und $4 - C_1 \in [2, 2.5]$, wodurch sich dann $\mathrm{E} \lg C_1 > 0$ und $\mathrm{E}\,|\lg(4 - C_1)| < \infty$ ergibt. Bei dieser Wahl der Verteilung von C_1 werden in unseren Betrachtungen häufig die Funktionen f_λ und f_μ auftreten, weshalb hier ein paar

Vorüberlegungen festgehalten werden sollen. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_\lambda(a) &= f_\lambda(b) = \lambda ab = \frac{1}{a}\,ab = b, \\ f_\mu(a) &= f_\mu(b) = \mu ab = \frac{1}{b}\,ab = a. \end{aligned}$$

Da f_λ und f_μ streng monoton wachsend auf dem Intervall $[0, \frac{1}{2})$, streng monoton fallend auf $(\frac{1}{2}, 1]$ und maximal im Punkt $\frac{1}{2}$ sowie symmetrisch zum Punkt $\frac{1}{2}$ sind, gilt weiter:

$$\begin{aligned} \{a, b\} &= \big\{x \in [0,1] : f_\lambda(x) = b\big\} \\ &= \big\{x \in [0,1] : f_\mu(x) = a\big\}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Man bemerke zudem

$$a > \frac{1}{2} \tag{4.5}$$

$$\Rightarrow a^2 > \frac{1}{4} \tag{4.6}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{4} = \frac{1}{4a} < a \tag{4.7}$$

$$\Rightarrow f_\lambda(x) \le f_\lambda(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4a} < a \tag{4.8}$$

für alle $x \in [0, 1]$, sowie für alle $x \in I$ und alle $\mu \in (3, \mu_0)$

$$\mu^3\Big(4 - \mu\Big) > 16 \tag{4.9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mu^3}{4}\Big(1 - \frac{\mu}{4}\Big) > 1 \tag{4.10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mu^2}{4}\Big(1 - \frac{\mu}{4}\Big) > \frac{1}{\mu} = b \tag{4.11}$$

$$\Rightarrow f_\mu(x) \ge f_\mu\Big(\frac{\mu}{4}\Big) = \frac{\mu^2}{4}\Big(1 - \frac{\mu}{4}\Big) > b. \tag{4.12}$$

Nun sei π_1 ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[0, 1]$ mit

$$\begin{aligned} \pi_1\big(\{a\}\big) &= 1 - \eta, \\ \pi_1\big(\{b\}\big) &= \eta. \end{aligned}$$

Ist X_0 gemäß π_1 verteilt, ergibt sich mit (4.4) und (4.8):

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}^{X_1}\big(\{a\}\big) &= \mathrm{P}\big(C_1 X_0(1-X_0)=a\big) \\
&= \mathrm{P}(C_1=\lambda)\ \mathrm{P}\big(f_\lambda(X_0)=a\big)+\mathrm{P}(C_1=\mu)\ \mathrm{P}\big(f_\mu(X_0)=a\big) \\
&= 0+(1-\eta)\ \mathrm{P}\big(X_0\in\{a,b\}\big) \\
&= 1-\eta \\
&= \pi_1\big(\{a\}\big) \\
\text{und}\quad \mathrm{P}^{X_1}\big(\{b\}\big) &= \mathrm{P}(C_1=\lambda)\ \mathrm{P}\big(f_\lambda(X_0)=b\big)+\mathrm{P}(C_1=\mu)\ \mathrm{P}\big(f_\mu(X_0)=b\big) \\
&= \eta\ \mathrm{P}\big(X_0\in\{a,b\}\big)+(1-\eta)\ \mathrm{P}\big(f_\mu(X_0)=b\big) \\
&= \eta+(1-\eta)\ \mathrm{P}\big(f_\mu(X_0)=b\big) \\
&= \eta \\
&= \pi_1\big(\{b\}\big),
\end{aligned}$$

wobei in der vorletzten Zeile

$$\mathrm{P}\big(f_\mu(X_0)=b\big) \;=\; \mathrm{P}\big(X_0(1-X_0)=b^2\big) \;=\; 0$$

einging. Beide Rechnungen zusammen zeigen, dass π_1 eine invariante Verteilung der Markov-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist. Wie das nächste Theorem zeigen wird, ist dies für hinreichend kleine η nicht die einzige invariante Verteilung, doch zum Beweis dieses Theorems werden zwei weitere Ergebnisse benötigt, die daher voran gestellt werden.

Lemma 4.1. *Es gilt für* $I=[1-\frac{\mu}{4},\frac{\mu}{4}],\ c\in\{\lambda,\mu\}$*:*

$$f_c(I)\subset I.$$

Beweis. Bei beliebigem $x\in I$ gelangt man zur Abschätzung

$$\begin{aligned}
f_\lambda(x) &= \lambda x(1-x) \\
&= \frac{\mu}{\mu-1}\,x(1-x) \\
&< \mu x(1-x) \;=\; f_\mu(x) \\
&\le f_\mu\Big(\frac{1}{2}\Big) \;=\; \frac{\mu}{4}.
\end{aligned}$$

Da nach Konstruktion $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda} = 1$ gilt, ist $\frac{1}{\mu\lambda} \leq \frac{1}{4}$, also $\mu\lambda \geq 4$. Das liefert wiederum für alle $x \in I$:

$$\begin{aligned} f_\mu(x) &> f_\lambda(x) \\ &\geq f_\lambda\Big(1 - \frac{\mu}{4}\Big) \\ &= \frac{\lambda\mu}{4}\Big(1 - \frac{\mu}{4}\Big) \\ &\geq 1 - \frac{\mu}{4}. \end{aligned}$$ □

Damit kommt man direkt zu folgendem

Korollar 4.2. *Die Menge I ist für die Markov-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bei nach (4.3) verteilten Faktoren C_n absorbierend, d.h. für alle $x \in I$ gilt:*

$$\mathrm{P}_x(X_1 \in I) \;=\; 1.$$

Beweis. Es sei $x \in I$. Dann erhält man:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_x(X_1 \in I) &= \mathrm{P}(C_1 = \lambda)\,\mathrm{P}\big(f_\lambda(x) \in I\big) + \mathrm{P}(C_1 = \mu)\,\mathrm{P}\big(f_\mu(x) \in I\big) \\ &= \eta + (1 - \eta) \;=\; 1. \end{aligned}$$ □

Im Folgenden sei $\mu \in (3, \mu_0)$ fest gewählt.

Lemma 4.3. *Es sei*

$$h(x) \;=\; \begin{cases} \lg \frac{1}{|x-a|}, & \text{falls } 0 < |x-a| < \varepsilon_1, \\ \lg \frac{1}{|x-b|}, & \text{falls } 0 < |x-b| < \varepsilon_1, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

wobei $0 < \varepsilon_1 < \frac{a-b}{2}$ derart gewählt sei, dass

$$(a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1) \cup (b - \varepsilon_1, b + \varepsilon_1) \;\subset\; I.$$

Dann gibt es Konstanten $0 < \varepsilon_3 < \varepsilon_1$ und $0 < \gamma, \delta, \eta < \infty$, für die

$$\varphi(x) \;:=\; \mathrm{E}_x\, h(X_1) - h(x)$$

den nachstehenden Ungleichungen genügt:

1. $\varphi(x) \le -\delta$ *für alle* $x \in (a-\varepsilon_3, a+\varepsilon_3) \cup (b-\varepsilon_3, b+\varepsilon_3)$,
2. $\varphi(x) \le \gamma$ *für alle* $x \in I$.

Beweis. In (4.2) haben wir bereits gesehen, dass die Punkte a und b im Inneren der Menge I liegen, weshalb die Wahl eines $\varepsilon_1 \in \left(0, \frac{a-b}{2}\right)$ mit

$$\begin{aligned} (a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1) &\subset I, \\ (b-\varepsilon_1, b+\varepsilon_1) &\subset I \end{aligned}$$

möglich ist. Die Stetigkeit von f_λ und f_μ auf $[0,1]$ und (4.4) implizieren, dass man ein $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1)$ findet, für das

$$x \in (a-\varepsilon_2, a+\varepsilon_2) \cup (b-\varepsilon_2, b+\varepsilon_2) \quad \Rightarrow \quad |f_\lambda(x) - b|,\ |f_\mu(x) - a| < \varepsilon_1$$

gilt. Für solche x bekommen wir

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \mathrm{E}_x\, h(X_1) - h(x) \\ &= \mathrm{P}(C_1 = \lambda)\, h\big(f_\lambda(x)\big) + \mathrm{P}(C_1 = \mu)\, h\big(f_\mu(x)\big) - h(x) \\ &= \eta \lg \frac{1}{|f_\lambda(x) - b|} + (1-\eta) \lg \frac{1}{|f_\mu(x) - a|} - \lg \frac{1}{|x-a|} \\ &= \eta \lg \frac{|x-a|}{|f_\lambda(x) - b|} + (1-\eta) \lg \frac{|x-a|}{|f_\mu(x) - a|} \\ &= \eta \lg \frac{|x-a|}{|f_\lambda(x) - f_\lambda(a)|} + (1-\eta) \lg \frac{|x-a|}{|f_\mu(x) - f_\mu(a)|} \end{aligned}$$

Auf Grund der Definition (4.1) gilt

$$\begin{aligned} |(1-x) - a| &= |x-b|, \\ |(1-x) - b| &= |x-a|, \end{aligned}$$

was $h(x) = h(1-x)$ zur Folge hat. Daraus ergibt sich aber

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \mathrm{E}_x\, h(X_1) - h(x) \\ &= \mathrm{E}_{1-x}\, h(X_1) - h(1-x) \\ &= \varphi(1-x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to b}\varphi(x) &= \lim_{x\to a}\varphi(x) \\
&= \eta\,\lg\frac{1}{|f'_\lambda(a)|} + (1-\eta)\lg\frac{1}{|f'_\mu(a)|}\,.
\end{aligned}$$

Die Ableitungen sind für alle $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
& \left|f'_\lambda(x)\right| &=& \left|\frac{2x-1}{a}\right| && \\
\text{und} \quad & \left|f'_\mu(x)\right| &=& \left|\frac{2x-1}{b}\right|, && \\
\text{speziell} \quad & \left|f'_\lambda(a)\right| &=& \left|f'_\lambda(b)\right| &=& \left|\frac{2a-1}{a}\right| \;>\; 0, \\
\text{und} \quad & \left|f'_\mu(a)\right| &=& \left|f'_\mu(b)\right| &=& \left|\frac{2b-1}{b}\right| \\
& &=& |2-\mu| &=& \mu-2 \;>\; 1.
\end{aligned}$$

Dabei folgt die erste Ungleichung aus $a > \frac{1}{2}$ und die zweite aus $\mu > 3$. Daher ist zum Einen der Term $\lg\frac{1}{|f'_\lambda(a)|}$ endlich und zum Anderen $\lg(\mu-2)$ positiv. Setzen wir die frühere Rechnung fort, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\varphi(x) &= \eta\,\lg\frac{1}{|f'_\lambda(a)|} + (1-\eta)\lg\frac{1}{|f'_\mu(a)|} \\
&= \eta\lg\left|\frac{a}{2a-1}\right| - (1-\eta)\lg(\mu-2) \\
&= \eta\Big(\lg\Big(\frac{a}{2a-1}\Big) + \lg(\mu-2)\Big) - \lg(\mu-2) \\
&= \eta\Big(\lg\Big(\frac{1-b}{1-2b}\Big) + \lg(\mu-2)\Big) - \lg(\mu-2) \\
&= \eta\Big(\lg\Big(\frac{\mu-1}{\mu-2}\Big) + \lg(\mu-2)\Big) - \lg(\mu-2) \\
&= \eta\,\lg(\mu-1) - \lg(\mu-2) \;<\; 0 \\
\Leftrightarrow \qquad \eta &< \frac{\lg(\mu-2)}{\lg(\mu-1)} \;<\; 1.
\end{aligned}$$

Demnach finden wir zu jedem $\eta \in \big(0, \frac{\lg(\mu-2)}{\lg(\mu-1)}\big)$ Konstanten $\delta > 0$ und $\varepsilon_3 \in (0,\varepsilon_2)$, so dass für alle $x \in (a-\varepsilon_3, a+\varepsilon_3) \cup (b-\varepsilon_3, b+\varepsilon_3)$ folgende Ungleichung gilt:

$$\varphi(x) \;=\; \mathrm{E}_x\, h(X_1) - h(x) \;\leq\; -\delta,$$

womit 1. bewiesen ist.

Wenden wir uns dem Beweis von 2. zu. In (4.8) und (4.12) haben wir bereits gesehen, dass die Gleichungen $f_\lambda(x) = a$ und $f_\mu(x) = b$ keine Lösungen im Intervall I besitzen. Wir definieren nun

$$J \;:=\; I \cap \{\, |x-a| \geq \varepsilon_3\} \cap \{\, |x-b| \geq \varepsilon_3\}, \tag{4.13}$$

was offensichtlich eine kompakte Menge ist. Zusammen mit (4.4) bedeutet dies aber, dass die Infima

$$\begin{aligned}
&\inf_{x\in J} \,|\, f_\lambda(x) - a \,|, \\
&\inf_{x\in J} \,|\, f_\lambda(x) - b \,|, \\
&\inf_{x\in J} \,|\, f_\mu(x) - a \,|, \\
&\inf_{x\in J} \,|\, f_\mu(x) - b \,|
\end{aligned}$$

streng positiv sind. Es liegen also alle

$$|\, f_i(x) - j \,|, \;\; i \in \{\mu, \lambda\}, \;\; j \in \{a, b\}, \;\; x \in J,$$

im Intervall $(0, 1]$, weshalb für alle $x \in J$

$$\begin{aligned}
0 \;&\leq\; \mathrm{E}_x\, h(X_1) \\
&\leq \eta\Big(\lg \frac{1}{\inf_{x\in J} |f_\lambda(x) - a|} + \lg \frac{1}{\inf_{x\in J} |f_\lambda(x) - b|}\Big) \\
&\quad + (1-\eta)\Big(\lg \frac{1}{\inf_{x\in J} |f_\mu(x) - a|} + \lg \frac{1}{\inf_{x\in J} |f_\mu(x) - b|}\Big) \;=:\; c_1, \\
0 \;&\leq h(x) \;\leq\; \frac{1}{\lg \varepsilon_3} \;=:\; c_2, \\
\Rightarrow \quad c_1 - c_2 \;&\leq \varphi(x) \;=\; \mathrm{E}_x\, h(X_1) - h(x) \;\leq\; c_1
\end{aligned}$$

gilt. Auf $I - J$ ist $\varphi(x)$ nach Wahl von ε_3 negativ, also auf ganz I von oben durch c_1 beschränkt, was den Beweis von Lemma 4.3 abschließt. □

Nach diesen Vorbereitungen können wir das oben angekündigte Theorem in Angriff nehmen:

Theorem 4.4. *Die Markov-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ besitzt in der durch die Gleichungen (4.1) und (4.3) gegebenen Situation für hinreichend kleine η zwei invariante Verteilungen π_0, π_1, für die*

$$\pi_0\big((0,1)\big) \;=\; \pi_1\big((0,1)\big) \;=\; 1,$$
$$\pi_0 \;\neq\; \pi_1$$

gültig ist.

Beweis. Es wurde schon nachgeprüft, dass

$$\pi_1 \;=\; (1-\eta)\;\delta_a + \eta\;\delta_b$$

eine invariante Verteilung dieser Markov-Kette definiert, wobei $a, b \in (0,1)$ gemäß (4.1) gewählt sind. Daher bleibt zu zeigen, dass es eine invariante Verteilung $\pi_0 \neq \pi_1$ mit $\pi_0((0,1)) = 1$ gibt.

Nach Lemma 4.1 ist I eine absorbierende Menge, weshalb

$$\mathrm{P}_x(X_n \in I \;\forall\; n \geq 1) \;=\; 1 \tag{4.14}$$

für jeden Startpunkt $x \in I$ zutrifft. Betrachten wir nun die Okkupationsmaße $\{\mu_n(x,\cdot) : x \in I, n \geq 1\}$, so erhalten wir, dass jeder vage Grenzwert ν einer konvergenten Teilfolge wegen der Beziehung (4.13) und der Kompaktheit von I ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf I ist. Zudem ist ν nach Lemma 2.6 eine invariante Verteilung. Mit Hilfe von Lemma 4.3 werden wir nun zeigen, dass es mindestens ein vages Grenzmaß ν mit $\nu(J) > 0$ gibt, wobei J wie in (4.13) definiert ist. Bei beliebigem $x \in I$ können wir folgende Rechnung vornehmen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\;\mathrm{E}_x\, h(X_n) - h(x) \;&=\; \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\;\mathrm{E}_x\left(h(X_j) - h(X_{j-1})\right)\\ &=\; \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\;\mathrm{E}_x\,\varphi(X_{j-1})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}_x \big(\varphi(X_{j-1})\mathbf{1}_{\{X_{j-1}\in J\}}\big) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}_x \big(\varphi(X_{j-1})\mathbf{1}_{\{X_{j-1}\notin J\}}\big) \\
&\le \gamma\, \mu_{n,x}(J) - \delta\, \mu_{n,x}(J^c) \\
&= (\gamma+\delta)\, \mu_{n,x}(J) - \delta,
\end{aligned}
$$

wobei die zweite Gleichung auf die Markov-Eigenschaft und die Ungleichung auf Lemma 4.3 zurückgeht. Hätte jede vag konvergente Teilfolge der Okkupationsmaße einen Grenzwert ν mit $\nu(J) = 0$, so müsste bereits $\lim_{n\to\infty} \mu_{n,x}(J) = 0$ zutreffen. Es gälte also

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\big(\mathrm{E}_x\, h(X_n) - h(x)\big) \;\le\; -\delta \;<\; 0,
$$

während gleichzeitig wegen der Nicht-Negativität von h

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\big(\mathrm{E}_x\, h(X_n) - h(x)\big) \;&=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\mathrm{E}_x\, h(X_n) - \lim_{n\to\infty} \frac{h(x)}{n} \\
&=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\mathrm{E}_x\, h(X_n) \\
&\ge\; 0
\end{aligned}
$$

stimmen müsste. Dieser Widerspruch belegt, dass es einen vagen Grenzwert π_0 einer Teilfolge der Okkupationsmaße mit $\pi_0(J) > 0,\ \pi_0(I) = 1$ gibt, der eine invariante Verteilung von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und offenkundig $\neq \pi_1$ ist, da

$$
\begin{aligned}
\pi_1\big(\{a,b\}\big) \;&=\; 1, \\
\pi_1(J) \;&=\; 0.
\end{aligned}
$$

Da I in $(0,1)$ enthalten ist, ist das Theorem hiermit bewiesen. □

4.2 Beispiele für die Eindeutigkeit

Das erste Beispiel in diesem Abschnitt stellt das Ergebnis des Artikels [11] von J.J. Dai dar. Dieses basiert auf folgender Ausgangslage:

Für beliebige $a, b \in [0,4],\ 1 < a < 2 < b < 4$ gilt $1 - \frac{1}{a}, 1 - \frac{b}{4} \in (0, \frac{1}{2})$. Hier seien zwei solche reelle Zahlen a und b nun so gewählt, dass zusätzlich

$$
1 - \frac{1}{a} \;\le\; 1 - \frac{b}{4} \;<\; \frac{1}{2} \tag{4.15}
$$

erfüllt ist. Im Folgenden sei die Verteilung von C_1 durch $\mathrm{P}\big(C_1 \in [a,b]\big) = 1$ gegeben. Dann können wir für alle $c \in [a,b]$ und alle $x \in I := [1-\frac{1}{a}, \frac{b}{4}]$ zwei Abschätzungen vornehmen: Einerseits gilt

$$cx(1-x) \;\leq\; \frac{c}{4} \;\leq\; \frac{b}{a},$$

und andererseits unter Ausnutzung der Monotonie-Eigenschaften der Funktion $f_c(x) := cx(1-x)$ sowie der Voraussetzung (4.15)

$$\begin{aligned} cx(1-x) \;&\geq\; ax(1-x) \\ &\geq\; a\min\Big\{\Big(1-\frac{1}{a}\Big)\frac{1}{a}, \frac{b}{4}\Big(1-\frac{b}{4}\Big)\Big\} \\ &\geq\; a\Big(1-\frac{1}{a}\Big)\frac{1}{a} \\ &=\; 1-\frac{1}{a}. \end{aligned}$$

Beide Abschätzungen zusammen demonstrieren, dass unter diesen Bedingungen die Funktion f_c das Intervall I in sich selbst abbildet. Also ist dieses Intervall absorbierend, denn für alle $x \in I$ ergibt sich

$$\mathrm{P}_x(X_1 \in I) \;=\; \mathrm{P}_x\big(\forall\, n \geq 1 : X_n \in I\big) \;=\; 1.$$

Da I nun kompakt und absorbierend ist, ist jeder Grenzwert einer vag konvergenten Teilfolge von $\{\mu_n(x,\cdot) : n \geq 1, x \in I\}$ (nach Lemma 2.6) eine invariante Verteilung der Markov-Kette. Nach diesen Vorbereitungen und Überlegungen nun zum Hauptergebnis:

Theorem 4.5. *Es seien die folgenden zwei Bedingungen erfüllt:*

1. *Es seien $a \in (1,2)$ und $b \in (2,4)$ wie oben so gewählt, dass sie der Gleichung (4.15) genügen. Dafür sei weiter $\mathrm{P}\big(C_1 \in [a,b]\big) = 1$ gegeben.*

2. *Für positive Konstanten r, ε mit $(r-\varepsilon, r+\varepsilon) \subset (1,3)$ gebe es ein $\delta > 0$, so dass für jedes $B \in \mathbb{B}_{|(r-\varepsilon,r+\varepsilon)}$ die Ungleichung*

$$\mathrm{P}(C_n \in B) \;\geq\; \delta\lambda(B)$$

mit dem Lebesgue-Maß λ erfüllt sei.

Dann gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß π auf I und zwei Konstanten $K \in (0,\infty)$, $\rho \in (0,1)$, für die

$$\sup_{x\in I}\ \sup_{B\in\mathbb{B}_{|I}} |\,\mathbb{P}^n(x,B)-\pi(B)\,| \ \leq\ K\rho^n$$

gilt.

Da die n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}^n(x,\cdot)$ ebenso wie π Wahrscheinlichkeitsmaße sind, stimmt die Abschätzung des Theorems auch, wenn man das Supremum über alle $B \in \mathbb{B}_{|[0,1]}$ bildet. Dies bedeutet nichts Anderes, als dass für jedes $x \in I$ eine Konvergenz in Totalvariation der $\mathbb{P}^n(x,\cdot)$, $n \in \mathbb{N}$ und somit auch der $\mu_{n,x}$, $n \in \mathbb{N}$ gegen π vorliegt. Dadurch ist π aber eine invariante Verteilung (Konvergenz in Totalvariation impliziert schwache Konvergenz) und eindeutig (unter den invarianten Verteilungen mit in I enthaltenem Träger). Nun gilt

$$\begin{aligned} 1-\frac{1}{a} &\xrightarrow[]{\substack{a\to 1\\ a\neq 1}} 0-,\\ \frac{b}{4} &\xrightarrow[]{\substack{b\to 4\\ b\neq 4}} 1-\,. \end{aligned}$$

Zu beliebigem $x \in (0,1)$ können dann jedoch $1 < a_x < 2 < b_x < 4$ mit $1-\frac{1}{a_x} \leq 1-\frac{b_x}{4}$ so gewählt werden, dass das Intervall $I_x := [1-\frac{1}{a_x}, \frac{b_x}{4}]$ den Punkt x umfasst. Entsprechend existiert ein invariantes π_x, gegen das die P^n_y und die $\mu_n(y,\cdot)$ für jedes $y \in I_x$ in Totalvariation konvergieren. Gibt es also ein solches Intervall I, das den Voraussetzungen des Theorems genügt, so erhalten wir eine eindeutige invariante Verteilung π mit $\pi\big((0,1)\big) = 1$.

Wir werden im Folgenden zeigen, dass die Aussage des Theorems in einem bereits bekannten Lemma enthalten ist. Dazu wird das betreffende Lemma sogleich angeführt und die Verbindung zum obigen Theorem wird in einem zweiten Theorem (bzw. dessen Beweis) hergestellt.

Lemma 4.6. *Es sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum $S \subset \mathbb{R}$. Weiter gebe es eine natürliche Zahl n und reelle Zahlen c, d, $e \in (0,1)$ mit*

$d < e$, $(d,e) \subset I$, für die die n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten für alle $x \in S$ folgende Gestalt haben

$$\mathbb{P}^n(x,\cdot) \; = \; cR(d,e) + (1-c)\nu_x,$$

mit der Gleichverteilung $R(d,e)$ auf (d,e) und einer Verteilung ν_x auf S. Dann existieren Konstanten $K \in (0,\infty)$ und $\rho \in (0,1)$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß π_0, so dass

$$\sup_{x\in S} \sup_{B\in\mathbb{B}|S} |\,\mathbb{P}^n(x,B) - \pi_0(B)\,| \; \leq \; K\rho^n$$

ist.

Auf den Beweis des Lemmas soll hier nicht weiter eingegangen werden, er kann aber (in verallgemeinerter Form) z.B. im Buch von Bhattacharya und Waymire (1990, S. 214-215) nachgelesen werden.

Theorem 4.7. *Sind die Voraussetzungen des Theorems 4.5 erfüllt, gilt Gleiches für die des Lemmas 4.6.*

Beweis. Es seien die Voraussetzungen des Theorems 4.5 gegeben. Für $x \in I$ und das r aus Voraussetzung 2. sei die Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekursiv durch

$$x_i \; = \; rx_{i-1}(1-x_{i-1}), \quad i \geq 1$$

definiert. Im weiteren Verlauf des Beweises werden wir zeigen, dass es für $u := 1 - \frac{1}{r}$ und zu beliebigem $\varepsilon_1 > 0$ ein $M \in \mathbb{N}$ gibt, so dass bei jedem Startpunkt $x_0 \in I$

$$x_M \in [u-\varepsilon_1, u+\varepsilon_1] \tag{4.16}$$

zutrifft. Mit Hilfe von Gleichung (4.16) kann dann Theorem 4.7 bewiesen werden.

Zunächst halten wir dieses fest:

$$\begin{aligned} x_{i+1} - u \; &= \; rx_i(1-x_i) - \Big(1 - \frac{1}{r}\Big) \\ &= \; \Big(x_i - \Big(1 - \frac{1}{r}\Big)\Big)(1 - rx_i) \\ &= \; (x_i - u)(1 - rx_i). \end{aligned} \tag{4.17}$$

In Abhängigkeit vom Wert von r ergeben sich nun die zwei Fälle $1 < r < 2\sqrt{2}$ und $2\sqrt{2} \leq r < 3$.

Es sei zunächst $1 < r < 2\sqrt{2}$. Dann können wir folgende Abschätzungen für alle $i \geq 1$ tätigen:

$$\begin{array}{rrcl} & x_i &=& r x_{i-1}(1 - x_{i-1}) \;\leq\; \dfrac{r}{4} \\ \Rightarrow & r x_i - 1 &\leq& \dfrac{r^2}{4} - 1 \\ \Rightarrow & |1 - r x_i| &=& \max\{1 - r x_i,\, r x_i - 1\} \\ & &\leq& \max\left\{1 - r\Big(1 - \dfrac{1}{a}\Big), \dfrac{r^2}{4} - 1\right\} \\ & &=:& \alpha < 1, \end{array}$$

denn es gilt:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{r^2}{4} - 1 &<& \dfrac{1}{4}\left(2\sqrt{2}\right)^2 - 1 \;=\; 1 \\ 1 - r\left(1 - \dfrac{1}{a}\right) &<& 1 - \left(1 - \dfrac{1}{a}\right) \\ &=& \dfrac{1}{a} \;\in\; \left(\dfrac{1}{2}, 1\right). \end{array}$$

Dabei wurde bei der zweiten Ungleichung mit Startwert $x_0 \in I$ die Invarianz von I, bei der dritten die Voraussetung $r < 2\sqrt{2}$ und bei der vierten $r > 1$ ausgenutzt. Wenn $m \geq 1$ ist, gelangt man durch iterierte Anwendung von Gleichung (4.17) zu

$$\begin{array}{rcl} |x_m - u| &=& |x_1 - u| \displaystyle\prod_{i=1}^{m-1} |1 - r x_i| \\ &\leq& |x_1 - u|\; \alpha^{m-1}, \end{array}$$

d.h. (4.16) gilt im Fall $r \in (1, 2\sqrt{2})$.

Betrachten wir nun den Fall $r \in [2\sqrt{2}, 3)$. Dann gilt für $x_i < \frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{rcl} x_{i+1} &=& r x_i(1 - x_i) \\ &\geq& 2\sqrt{2}\, x_i\Big(1 - \dfrac{1}{2}\Big) \\ &=& \sqrt{2}\, x_i, \end{array}$$

und folglich

$$\begin{aligned} x_{M_1} &\geq \left(\sqrt{2}\right)^{M_1} x_0 \\ &\geq \left(\sqrt{2}\right)^{M_1} \left(1 - \frac{1}{a}\right) \geq \frac{1}{2}, \\ \text{falls} \quad M_1 &\geq -2\, \frac{\lg(2 - \frac{2}{a})}{\lg 2}. \end{aligned}$$

Wählt man ein derartiges $M_1 \in \mathbb{N}$, findet man zu jedem $x_0 \in I$ ein $i \in \{1, \ldots, M_1\}$, so dass $x_i \geq \frac{1}{2}$. Mit den Monotonie-Eigenschaften der Funktion $f_r(x) = rx(1-x)$ ergibt sich weiter für $i \geq 1$ und $x_i \geq \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} x_i &= r x_{i-1}(1 - x_{i-1}) \\ &\leq \frac{r}{4} < \frac{3}{4}, \\ x_{i+1} &= r x_i (1 - x_i) \\ &\geq 2\sqrt{2}\, x_i (1 - x_i) \\ &\geq 2\sqrt{2}\, \frac{3}{4} \left(1 - \frac{3}{4}\right) \\ &> \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

also ist $J := [\frac{1}{2}, \frac{r}{4}]$ ein invariantes Intervall für $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, und für jedes $x_0 \in I$ ist $x_{M_1} \geq \frac{1}{2}$. Bei beliebigem $x_i \in J$ gilt weiterhin

$$r x_i - 1 \geq \frac{r}{2} - 1 > 0,$$

weshalb sich unter Ausnutzung der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel diese Rechnung ergibt:

$$\begin{aligned} \sqrt{(r x_i - 1)(r x_{i+1} - 1)} &\leq \frac{1}{2} \left[(r x_i - 1) + (r x_{i+1} - 1)\right] \\ &= \frac{1}{2}\, r\big[x_i + r x_i (1 - x_i)\big] - 1 \\ &= \frac{1}{2}\, r x_i \big[1 + r(1 - x_i)\big] - 1 \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}\big(r x_i + 1 + r - r x_i\big)\right]^2 - 1 \\ &= \frac{1}{8}\, (1 + r)^2 - 1 \\ &< \frac{1}{8}\, 4^2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

Definieren wir $\beta := \left[\frac{1}{8}(1+r)^2 - 1\right]^2 < 1$, so lässt sich

$$|rx_i - 1|\,|rx_{i+1} - 1| \;\le\; \beta \;<\; 1$$

abschätzen, woraus sich mit Hilfe von Gleichung (4.17)

$$\begin{aligned}
|x_{i+2} - u| &= |x_i - u|\,|1 - rx_i|\,|1 - rx_{i+1}| \\
&\le |x_i - u|\,\beta, \\
|x_{i+2m} - u| &= |x_i - u| \prod_{j=0}^{m-1} \big(|1 - rx_{i+2j}|\,|1 - rx_{i+2j+1}|\big) \\
&\le |x_i - u|\,\beta^m \quad \text{f.a. } m \ge 1
\end{aligned}$$

schließen lässt. Eine grobe Abschätzung zeigt

$$|x_i - u| \;\le\; \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}.$$

Nun sei $\varepsilon_1 > 0$ beliebig und (davon abhängig) $m \in \mathbb{N}$ folgendermaßen gewählt:

$$m \;>\; \frac{\lg \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}{\lg \beta} \;\ge\; \frac{\lg \frac{\varepsilon_1}{|x_i - u|}}{\lg \beta}.$$

Daraus ergibt sich

$$|x_i - u|\;\beta^m \;<\; \varepsilon_1.$$

Das bedeutet, dass

$$|x_{M_1+2m}| \;\in\; |u - \varepsilon_1, u + \varepsilon_1|$$

bei jedem Startpunkt $x_0 \in I$ gilt, d.h. (4.16) ist auch im zweiten Fall erfüllt.

Nehmen wir nun an, dass die Voraussetzungen des Theorems 4.5 erfüllt sind, insbesondere gibt es zu Konstanten r, ε mit $(r - \varepsilon, r + \varepsilon) \subset (1, 3)$ ein $\delta > 0$, so dass $\mathrm{P}(C_n \in B) \ge \delta\lambda(B)$ für jedes $B \in \mathbb{B}_{|(r-\varepsilon,r+\varepsilon)}$ und das Lebesgue-Maß λ gilt. Hier sei noch einmal daran erinnert, dass wir $u = 1 - \frac{1}{r}$ definiert haben, was sich zu $r = \frac{u}{u(1-u)}$ umstellen lässt und in die nachfolgenden Abschätzungen eingehen wird. Da $r \in (1, 3)$ liegt, können wir ein $\varepsilon_1 > 0$ so klein wählen, dass

$$\begin{aligned} \Delta_1 &:= \inf\bigl\{y(1-y) : y \in [u-\varepsilon_1, u+\varepsilon_1]\bigr\} > 0, \\ \Bigl|\frac{u}{y(1-y)} - r\Bigr| &\leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

für alle $y \in [u-\varepsilon_1, u+\varepsilon_1]$ und das ε aus den Voraussetzungen des Theorems 4.5 gilt. Unter Ausnutzung von 4.16 erhalten wir jetzt, dass es ein $M \in \mathbb{N}$ gibt, so dass bei beliebigem Startpunkt $x_0 \in I$

$$x_M \in \Bigl[u - \frac{\varepsilon_1}{2}, u + \frac{\varepsilon_1}{2}\Bigr]$$

erfüllt ist. Die Stetigkeit von f_C in C impliziert die Existenz eines $\varepsilon_2 > 0$, für das

$$\begin{aligned} |X_M - x_M| &\leq \frac{\varepsilon_1}{2}, \\ \text{also} \quad X_M &\in [u-\varepsilon_1, u+\varepsilon_1] \end{aligned}$$

gültig ist, falls $X_0 = x_0$ und $|C_m - r| < \varepsilon_2$ für alle $m \in \{0, \ldots, M-1\}$. Für

$$\Delta_2 := \inf\Bigl\{\mathrm{P}_{X_0}\bigl(X_M \in [u-\varepsilon_1, u+\varepsilon_1]\bigr) : X_0 \in I\Bigr\}$$

folgt daraus $\Delta_2 \geq \mathrm{P}\bigl(C_0, \ldots, C_{M-1} \in (r-\varepsilon_2, r+\varepsilon_2)\bigr) > 0$. Bei $X_M = y \in [u-\varepsilon_1, u+\varepsilon_1]$ setzen wir $\gamma := \frac{u}{y(1-y)}$, wofür dann

$$\begin{aligned} \gamma y(1-y) &= u, \\ |\gamma - r| &\leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

gilt. Daher hat die Verteilung von C_M eine Dichte, die auf dem Intervall $(\gamma - \frac{\varepsilon}{2}, \gamma + \frac{\varepsilon}{2})$ Werte $\geq \delta$ annimmt. Wegen $\Delta_1 \leq y(1-y) \leq 1$ besitzt die bedingte Verteilung von X_{M+1} gegeben $X_M = y$ eine Dichte, die größer oder gleich $\frac{\delta}{y(1-y)} \geq \delta$ ist auf dem Intervall $(u - \frac{\varepsilon}{2\Delta_1}, u + \frac{\varepsilon}{2\Delta_1})$. Da weiter $\mathrm{P}\bigl(X_M \in [u-\varepsilon_1, u+\varepsilon_1]\bigr) \geq \Delta_2$, hat die Verteilung von X_{M+1} eine Dichte, die auf $(u - \frac{\varepsilon}{2\Delta_1}, u + \frac{\varepsilon}{2\Delta_1})$ mindestens den Wert $\Delta_2\delta$ annimmt. Dies bedeutet aber gerade, dass der $M+1$-Schritt-Übergangskern, wie in den Voraussetzungen von Lemma 4.6 gefordert, als Linearkombination der Gleichverteilung auf diesem Intervall und einer geeigneten anderen Verteilung dargestellt werden kann, womit Lemma 4.7 bewiesen ist. □

Nach diesem doch eher rechenlastigen Resultat von J.J. Dai [11] soll nun noch auf eine Vorgehensweise eingegangen werden, die sich das Vorhandensein von Fixpunkten und zyklischer Verhaltensweisen der logistischen Transformationen unter Verwendung eines Theorems von Dubins und Freedman [13] beim Beweis der Eindeutigkeit zu Nutze macht. Hierbei werden wir die Ergebnisse der Artikel von Bhattacharya und Rao [9] bzw. Bhattacharya und Majumdar [8] vorstellen, ohne jedoch ausführlich auf einfache Rechnungen einzugehen.

Wir sagen, dass die von uns betrachtete Kette der zufälligen logistischen Transformationen die Splitting-Bedingung erfüllt, wenn es einen Anfangspunkt $x_0 \in [0,1]$, ein $N \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ gibt, so dass gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_x\big(\forall\ x \in [0,1] : X_{N,x} \leq x_0\big) \ &\geq\ \delta, \\ \mathrm{P}_x\big(\forall\ x \in [0,1] : X_{N,x} \geq x_0\big) \ &\geq\ \delta, \end{aligned} \tag{4.18}$$

wobei $X_{N,x}$ wieder das N-te Glied X_N bei gegebenem Startwert $X_0 = x$ bezeichnet. Das Theorem von Dubins und Freedman (s. [13]) besagt, dass eine die Splitting-Bedingung erfüllende Markov-Kette eine eindeutige invariante Verteilung π besitzt. Zudem konvergiert dann die n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit folgendermaßen:

$$\sup_{x\in[0,1],\, y\in\mathbb{R}} \Big|\, \mathbb{P}^n\big(x,(-\infty,y] \cap [0,1]\big) - \pi\big((-\infty,y] \cap [0,1]\big)\, \Big| \ \leq\ (1-\delta)^{[n/N]} \tag{4.19}$$

mit $[n/N] := \max\{k \in \mathbb{N} : k \leq \frac{n}{N}\}$.

Um uns diese Erkenntnisse zu Nutze machen zu können, wollen wir die Transformationen auf Fixpunkte untersuchen, die beim Finden des in der Splitting-Bedingung geforderten x_0 behilflich sein werden.

Da für jedes $\mu \in [0,4]$ die Gleichung $f_\mu(0) = 0$ gültig ist, erhalten wir 0 als einen Fixpunkt jeder der logistischen Transformationen. Bei allen anderen $x \in (0,1]$ ergibt sich

$$\begin{aligned} f_\mu(x) &= x \\ \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{\mu} &= x, \end{aligned}$$

wobei diese Äquivalenz auch bestehen bleibt, wenn man das Gleichheitszeichen durch $<$ oder $>$ ersetzt. Für jeden Wert von μ gibt es also noch höchstens einen weiteren Fixpunkt $q_\mu := 1 - \frac{1}{\mu}$. Falls $\mu \in [0,1]$ ist allerdings $q_\mu \leq 0$, weshalb 0 der einzige Fixpunkt bleibt. Wie oben gesehen, gilt $f_\mu(x) < x$ für alle $x \in (0,1]$, was

$$f_\mu^n(x) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

für alle $x \in [0,1]$ zur Folge hat, d.h. 0 ist ein anziehender Fixpunkt. Denn (s. [23], S. 127) ein Fixpunkt a ist *anziehend* oder *stabil*, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für jedes $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

$$\lim_{n\to\infty} f_\mu^n(x) = a$$

gilt, und er ist *abstoßend* oder *instabil*, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass man zu jedem $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) - \{a\}$ ein $n \in \mathbb{N}$ findet mit

$$\left| f_\mu^n(x) - a \right| > \varepsilon.$$

Für $\mu \in (1,4]$ ist $q_\mu \in [0,1]$, d.h. die Transformationen f_μ besitzen zwei Fixpunkte. Wie in Proposition 5.3 in [12] gezeigt, ist q_μ im Fall $\mu \in (1,3]$ ein anziehender und 0 ein abstoßender Fixpunkt. Liegt μ hingegen im Intervall $(3, 1+\sqrt{5}]$, gilt

$$\left| f_\mu^n(x) - a \right| = \mu - 2 > 1,$$

d.h. q_μ ist ein abstoßender Fixpunkt (s. [23], S.). In diesem Fall gibt es jedoch zwei Punkte

$$\begin{aligned} p_\mu &:= \sqrt{\mu+1}\,\frac{\sqrt{\mu+1}-\sqrt{\mu-3}}{2\mu}, \\ r_\mu &:= \sqrt{\mu+1}\,\frac{\sqrt{\mu+1}+\sqrt{\mu-3}}{2\mu}, \\ \frac{1}{2} &\le p_\mu < q_\mu < r_\mu < \frac{\mu}{4}, \end{aligned} \tag{4.20}$$

die einen stabilen zwei-periodischen Orbit bilden, d.h.

$$\begin{aligned} f_\mu(p_\mu) &= r_\mu, \\ f_\mu(r_\mu) &= p_\mu, \end{aligned}$$

und anziehende Fixpunkte des dynamischen Systems $(X_{2n})_{n\in\mathbb{N}_0} \subset (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sind (s. [23], S. 172-181, 201-202). Da für $2 \le \mu \le 1+\sqrt{5}$ immer $f_\mu(\frac{\mu}{4}) \ge \frac{1}{2}$ gilt und die Transformationen monoton fallen auf $[\frac{1}{2}, 1]$, ist das Intervall $I := [\frac{1}{2}, \frac{\mu}{4}]$ invariant unter f_μ, es gilt also $f_\mu(I) \subset I$. Über den Fall $\mu \in (1+\sqrt{5}, 4]$ treffen wir hier keine weiteren Aussagen.

Im Folgenden sei

$$\mathrm{P}(C_1 \in \cdot) = \gamma\,\delta_\mu + (1-\gamma)\,\delta_\lambda \tag{4.21}$$

mit $\mu,\ \lambda \in [0,4]$ und einem $\gamma \in (0,1)$. Das erste Theorem stellt für diese Situation ein Ergebnis von Bhattacharya und Rao [9] dar.

Theorem 4.8. *Gilt $0 \le \mu < \lambda \le 1$, so ist δ_0 die einzige invariante Verteilung der durch (2.1) und (4.21) definierten Markov-Kette. Liegt einer der Fälle*

1. $1 < \mu < \lambda \le 2$,
2. $2 < \mu < \lambda \le 3$,
3. $2 < \mu \le 3 < \lambda < 1+\sqrt{5}$

vor, besitzt die Kette eine eindeutig bestimmte, von δ_0 verschiedene invariante Verteilung.

Beweis. Sind μ und λ Elemente des Einheitsintervalls, erhalten wir für den Erwartungswert von $\lg C_1$ Folgendes:

$$\mathrm{E} \lg C_1 \;=\; \gamma \lg \mu + (1-\gamma) \lg \lambda \;\leq\; 0,$$

weshalb es, wie in Korollar 2.7 gesehen, genau eine invariante Verteilung, die Dirac-Verteilung in 0, gibt. Für $1 < \mu < \lambda \leq 2$ gilt

$$0 \;<\; q_\mu \;<\; q_\lambda \;\leq\; \frac{1}{2}.$$

Die Funktionen f_μ und f_λ sind daher monoton wachsend auf dem Intervall $[q_\mu, q_\lambda]$ und lassen dieses invariant, denn für alle $x \in [q_\mu, q_\lambda],\ \theta \in \{\mu, \lambda\}$ gilt

$$q_\mu \;=\; f_\mu(q_\mu) \;\leq\; f_\theta(x) \;\leq\; f_\lambda(q_\lambda) \;=\; q_\lambda.$$

Da q_μ und q_λ anziehende Fixpunkte für f_μ bzw. f_λ sind, ist die Splitting-Bedingung für jedes $x_0 \in [q_\mu, q_\lambda]$ erfüllt. Somit gibt es nach dem Theorem von Dubins und Freedman (s. [13]) genau eine invariante Verteilung π mit einem in $[q_\mu, q_\lambda]$ enthaltenen Träger. Die Stabilität der Fixpunkte liefert aber ebenfalls

$$\mathrm{P}_x\big(\exists\, n \in \mathbb{N}_0 : X_n \in [q_\mu, q_\lambda]\big) \;=\; 1$$

für jeden Startpunkt $x \in (0,1)$, so dass π die einzige invariante Verteilung $\neq \delta_0$ der Markov-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist.

Für $2 < \mu < \lambda \leq 3$ liegen $q - \mu$ und q_λ im Intervall $[\frac{1}{2}, \frac{\lambda}{4}]$, und dieses ist wegen

$$\frac{1}{2} \;\leq\; f_\mu\Big(\frac{\lambda}{4}\Big) \;\leq\; f_\theta(x) \;\leq\; f_\lambda\Big(\frac{1}{2}\Big) \;=\; \frac{\lambda}{4}, \quad \text{f.a. } x \in \Big[\frac{1}{2}, \frac{\lambda}{4}\Big],\ \theta \in \{\mu, \lambda\}$$

invariant unter den Abbildungen $f_\mu,\ f_\lambda$, falls $\mu \in \Big[\frac{1}{2}\big(\frac{\lambda}{4}(1-\frac{\lambda}{4})\big)^{-1}, \lambda\Big]$ gilt. Auch hier erhält man mit einer Vorgehensweise wie der obigen mit Hilfe der Stabilität der Fixpunkte, dass es genau eine stationäre Verteilung gibt, die im Punkt 0 kleiner als 1 ist.

Schließlich ergibt sich für den Fall $2 < \mu < 3 < \lambda < 1+\sqrt{5}$, wobei wieder $\mu \in \Big[\frac{1}{2}\big(\frac{\lambda}{4}(1-\frac{\lambda}{4})\big)^{-1}, \lambda\Big]$ sei, dass q_μ einen anziehenden Fixpunkt von f_μ und

r_λ einen solchen von f_λ^2 darstellt. Daraus folgt die Gültigkeit der Splitting-Bedingung auf $[q_\mu, q_\lambda]$ für alle $x \in (q_\mu, r_\lambda)$ für hinreichend großes gerades $N \in \mathbb{N}$. Mit der Stabilität von q_μ und r_λ erhält man wieder die Existenz einer eindeutig bestimmten invarianten Verteilung auf $(0, 1)$. □

Bemerkung 4.9. In ihrem Artikel [9] haben Bhattacharya und Rao zudem den Träger der invarianten Verteilung π genauer untersucht und sind zu folgenden Ergebnissen gekommen: Im Fall 1. ist π atomlos, d.h. die zugehörige Verteilungsfunktion ist stetig. Gilt

$$\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^3} \; < \; \frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\mu^3}, \tag{4.22}$$

ist der Träger von π eine Cantorsche Teilmenge von $[q_\mu, q_\lambda]$. Falls überdies

$$\lambda \; < \; \frac{\mu - 1}{2 - \mu} \, \mu$$

gilt, ist der Träger eine Lebesgue-Nullmenge. Wenn (4.22) nicht zutrifft, dafür aber

$$\begin{aligned} 1 \; &< \; \lambda - 2\lambda^2 \, \frac{\mu - 1}{\mu^2}, \\ \lambda \; &< \; \frac{\mu}{(2 - \mu)^2} \end{aligned}$$

gilt, entspricht der Träger dem Intervall $[q_\mu, q_\lambda]$. Im Fall 3. ist die stationäre Verteilung atomlos, und ihr Träger ist im Intervall $[\frac{1}{2}, \frac{\lambda}{4}]$ enthalten.

Der Artikel von Bhattacharya und Majumdar [8] folgt einer ähnlichen Systematik, beschäftigt sich jedoch nur mit dem Fall

$$\begin{aligned} 3 \; < \; \mu \; < \; \lambda \; &< \; 1 + \sqrt{5}, \\ f_\mu\Big(\frac{\lambda}{4}\Big) \; &\geq \; \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

in dem die Punkte p_μ und r_μ bzw. p_λ und r_λ jeweils einen zwei-periodischen Orbit bilden. Die Transformationen f_μ^2 und f_λ^2 besitzen dann genau die Fixpunkte $\{0, p_\mu, q_\mu, r_\mu\}$ bzw. $\{0, p_\lambda, q_\lambda, r_\lambda\}$. Anhand der Formeln (4.20) kommt man mit leichten, aber länglichen Rechnungen zu

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \;\leq\; p_\theta \;<\; q_\theta \;<\; r_\theta \;\leq\; \frac{\theta}{4}&, \\
\frac{d}{d\theta}\, p_\theta \;<\; 0&, \\
\frac{d}{d\theta}\, r_\theta \;>\; 0&, \\
q_{\theta_2} - q_{\theta_1} \;>\; 0&
\end{aligned} \tag{4.23}$$

für alle $\theta,\ \theta_1,\ \theta_2\ \in \big(3, 1+\sqrt{5}\big],\ \theta_1 < \theta_2$. Dies impliziert

$$\begin{aligned}
p_\mu &> p_\lambda, \\
r_\mu &< r_\lambda.
\end{aligned}$$

Wir definieren $I := [\frac{1}{2}, \frac{\lambda}{4}]$. Dieses Intervall ist invariant unter den Abbildungen $f_\mu,\ f_\lambda$, denn es gilt für alle $x \in I,\ \theta \in \{\mu, \lambda\}$:

$$\frac{1}{2} \;\leq\; f_\mu\Big(\frac{\lambda}{4}\Big) \;\leq\; f_\theta(x) \;\leq\; f_\lambda\Big(\frac{1}{2}\Big) \;=\; \frac{\lambda}{4},$$

wobei die letzte Ungleichung für jedes $x \in [0,1]$ gültig ist. Nun findet man zu beliebigem Startwert $x \in (0,1)$ eine natürliche Zahl M_x, so dass X_{M_x} in I liegt, wie die folgenden Überlegungen zeigen: Es sei $x \notin I$. Wir wählen o.B.d.A. $x \in (0, 1-\frac{\lambda}{4})$, da erstens entweder x oder $1-x$ im Intervall $(0, \frac{1}{2})$ enthalten ist und zweitens für $x \in [1-\frac{\lambda}{4}, \frac{1}{2})$ schon $1-x \in (\frac{1}{2}, \frac{\lambda}{4}] \subset I$ gilt. Für $\theta \in \{\mu, \lambda\}$ kann man dann folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned}
f_\theta(x) &= \theta x(1-x) \\
&\geq \mu x(1-x) \\
&> \frac{\mu}{2}\, x \;>\; 1{,}5\, x.
\end{aligned}$$

Durch Iteration erhalten wir

$$f_\theta^n(x) \;>\; (1{,}5)^n x.$$

Unter Beachtung der Äquivalenzbeziehung

$$(1{,}5)^n x \;\geq\; \frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad n \;\geq\; \frac{-\lg(2x)}{\lg(1{,}5)}$$

und der oben gezeigten Invarianz des Intervalls I ergibt sich, dass sich die Kette mit Anfangswert x nach $M_x := \min\left\{n \geq 1 : \; n \geq \frac{-\lg(2x)}{\lg(1{,}5)}\right\}$ immer in I befindet. Es ist also $\mathrm{P}_x\big(\exists\, n \in \mathbb{N} : \; X_n \in I\big) = 1$, weshalb es im Folgenden reicht, die Markov-Kette mit einem auf I eingeschränkten Zustandsraum zu betrachten. Kann man jetzt zwei Intervalle $I_1, \; I_2 \; \subset I$ wählen, so dass p_λ, p_μ in I_1 und r_μ, r_λ in I_2 liegen, und so dass für $\theta \in \{\mu, \lambda\}$

$$\begin{aligned} f_\theta(I_1) \; &\subset \; I_2 \\ f_\theta(I_2) \; &\subset \; I_1 \end{aligned}$$

gilt, findet man mit Hilfe der Stabilität der Fixpunkte p_μ und r_μ bzw. p_λ und r_λ von f_μ^2 bzw. f_λ^2 eine eindeutige von δ_0 verschiedene invariante Verteilung π der Markov-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Die Stabilität sorgt dafür, dass sich unsere Markov-Kette fast sicher nach endlich vielen Schritten in $I_1 \cup I_2$ aufhält. Nun genügt die Kette $(X_{2n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit eingeschränktem Zustandsraum I_1 der Splitting-Bedingung (4.18) mit beliebigem $x_0 \in [p_\lambda, p_\mu]$, hinreichend großem $N \in \mathbb{N}$ und

$$\delta \; := \; \min\left\{\gamma^N, (1-\gamma)^N\right\}$$

mit dem γ aus (4.21). Also besitzt sie eine eindeutige invariante Verteilung π_1 auf I_1. Eine analoge Vorgehensweise liefert eine eindeutige invariante Verteilung π_2 auf I_2 für die Kette $(X_{2n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Zustandsraum I_2. Aus (4.19) folgt nun für alle $M \geq 1$

$$\begin{aligned} &\sup_{\substack{x\in I_1\cup I_2\\ y\in\mathbb{R}}} \left| \frac{1}{2M} \sum_{n=1}^{2M} \Big(\mathbb{P}^n\big(x, (-\infty, y] \cap (I_1 \cup I_2)\big)\Big) - \frac{\pi_1 + \pi_2}{2}\big((-\infty, y] \cap (I_1 \cup I_2)\big) \right| \\ &\qquad \leq \; (1-\delta)^{[M/N]}, \end{aligned}$$

insbesondere gilt also für jedes $x \in I_1 \cup I_2$

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}^m(x, \cdot) \; \xrightarrow{w} \; \pi \; := \; \frac{\pi_1 + \pi_2}{2}.$$

π ist demnach eine eindeutige invariante Verteilung der Markov-Kette bei eingeschränktem Zustandsraum $I_1 \cup I_2$. Da dieser aber fast sicher in endlich vielen Schritten von der Markov-Kette erreicht wird, ist π schon eindeutig für die Kette mit dem Einheitsintervall als Zustandsraum.

Bemerkung 4.10. In dem Artikel von Bhattacharya und Majumdar werden die Intervalle

$$\begin{aligned} I_1 &= [p_\lambda, p_\mu], \\ I_2 &= [r_\mu, r_\lambda] \end{aligned}$$

gewählt, doch leider gilt nicht $f_\mu(I_2) \subset I_1$, $f_\lambda(I_2) \subset I_1$, denn es ist

$$\begin{aligned} f_\mu(r_\lambda) &< f_\lambda(r_\lambda) = p_\lambda, \\ f_\lambda(r_\mu) &> f_\mu(r_\mu) = p_\mu. \end{aligned}$$

Da wir keine passenden Intervalle oder einen Beweis für oder gegen die Existenz solcher Intervalle bzw. keine Veröffentlichungen zu diesem Problem gefunden haben, scheint die Frage, ob es geeignete Intervalle geben kann, noch offen zu sein.

Bemerkung 4.11. Für das System nicht-zufälliger logistischer Transformationen, erzeugt durch $f_\theta(x) = \theta x(1-x)$, lässt sich eine Zahlenfolge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finden, so dass das System mit Parameter $c_n < \theta < c_{n+1}$ einen anziehenden 2^n-Zyklus besitzt (s. [23], S. 203). Möglicherweise gibt es in solchen Fällen Intervalle, auf die obige Vorgehensweise in ähnlicher Form angewendet werden kann.

Als Letztes wollen wir den Fall betrachten, dass die Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ φ-irreduzibel ist (Definition s. Anhang). Dabei wird das folgende Beispiel zeigen, dass die Verteilung der C_n, $n \in \mathbb{N}$ so gewählt werden kann, dass unsere Markov-Kette φ-irreduzibel ist:

Beispiel 4.12. Die Verteilung der $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$, also der Faktoren in unserer Markov-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sei die Dirac-Verteilung im Punkt 2, und weiter sei $\varphi = \delta_{\frac{1}{2}}$. Dann wissen wir, dass im Fall $\varphi(A) = \delta_{\frac{1}{2}}(A) > 0$ mit einer

Menge $A \subset (0,1)$ der Punkt $\frac{1}{2}$ in dieser Menge enthalten sein und zudem $\varphi(A) = 1$ gelten muss. Daher reicht es, sich bei den folgenden Betrachtungen auf die Behandlung von Mengen der Form $(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \delta)$ mit $\varepsilon, \delta \in (0, \frac{1}{2})$ zu beschränken. Die Erwartungswerte von $\lg C_1$ bzw. $|\lg(4 - C_1)|$ berechnen sich hier zu

$$\begin{aligned} \mathrm{E} \lg C_1 &= \lg 2 \; > \; 0, \\ \mathrm{E}\,|\lg(4 - C_1)| &= |\lg 2| \; > \; 0. \end{aligned}$$

Der erste der beiden Erwartungswerte zeigt gerade, dass hier der superkritische Fall vorliegt, wohingegen der zweite gemäß Theorem 2.8 die Existenz einer invarianten Verteilung π sichert, was im nachfolgenden Theorem eine nicht zu vernachlässigende Rolle spielen wird.

Da die C_n, $n \in \mathbb{N}$, Dirac-verteilt in 2 sind, können wir jedes X_n, $n \in \mathbb{N}_0$ (zumindest fast sicher) mittels der Funktion $f_2 : [0,1] \to [0,1],\ x \mapsto 2x(1-x)$ ausdrücken:

$$f_2^n(X_0) \; = \; X_n \quad \mathrm{P} - \text{f.s.}$$

Nun ist für diese Funktion bekannt, dass bei beliebigem Startpunkt $x \in (0,1)$ die Folge ihrer Iterationen $\big(f_2^n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ strebt. Für die Ersteintrittszeit bedeutet dies bei beliebigen $x \in (0,1), \varepsilon, \delta > 0$:

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}_x\left(\tau\Big(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \delta\Big) < \infty\right) \\ &= \mathrm{P}_x\left(\exists\, n \in \mathbb{N} : X_n \in \Big(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \delta\Big)\right) \\ &= 1 \; > \; 0. \end{aligned}$$

Bei dieser Wahl der $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine $\delta_{\frac{1}{2}}$-irreduzible Markov-Kette.

Theorem 4.13. *Die Verteilung von C_1 sei so gewählt, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ φ-irreduzibel für ein geeignetes σ-endliches Maß φ auf $(0,1)$ ist. Weiter seien*

$\mathrm{E} \lg C_1 > 0$ *und* $\mathrm{E}\,|\lg(4 - C_1)| < \infty$. *Dann existiert eine eindeutige invariante Verteilung* π *mit* $\pi\big((0,1)\big) = 1$, *so dass für fast alle* $x \in (0,1)$ *die Okkupationsmaße* $\big(\mu_n(x,\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *in Totalvariation gegen* π *konvergieren.*

Beweis. Wie im Beispiel vorhin gesehen, kann die Verteilung von C_1 entsprechend gewählt werden, und die Existenz von π wurde bereits in Theorem 2.8 gezeigt. Aus der Theorie der Harris-rekurrenten Markov-Ketten ist bekannt (s. z.B. [6], [19], [20]), dass für eine φ-irreduzible Markov-Kette, die ein invariantes Maß zulässt, letzteres bis auf eine multiplikative Konstante eindeutig ist. Zudem kann der Zustandsraum in eine maximale Harris-Menge H und eine π-Nullmenge N zerlegt werden (s. Theorem A.3). Auf H konvergieren die Okkupationsmaße in Totalvariation gegen π (s. Theoreme A.4 und A.5). Da jedes invariante Maß der Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß sein muss, ist dieses somit eindeutig bestimmt. □

Bemerkung 4.14. Die Konvergenz der Okkupationsmaße in Totalvariation gegen π bedeutet, dass π den Césaro-Limes (in Totalvariation) der $\mathbb{P}^n(x,\cdot)$, $n \in \mathbb{N}_0$, für fast alle $x \in (0,1)$ bildet. Um die stärkere Aussage

$$\|\,\mathbb{P}^n(x,\cdot) - \pi\,\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

zu erhalten, bedarf es einer Aperiodizitätsbedingung an die Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ (s. Theorem A.4, [20] oder [10]).

Anhang A

Harris-Rekurrenz

Dieser Anhang beschäftigt sich mit der Harris-Rekurrenz, die am Ende von Kapitel 4 schon verwendet wurde. Hier sollen in kurzer Form einige wichtige Ergebnisse der zugehörigen Theorie angeführt werden. Dies geschieht in Anlehnung an [19], wo sämtliche Ergebnisse weitaus ausführlicher nachgelesen werden können.

Im Folgenden sei $\mathbf{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum S und zugehöriger σ-Algebra $\mathcal{S}$.

Die Markov-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt *φ-irreduzibel*, wenn es ein σ-endliches Maß φ auf $\mathcal{S}$ gibt, so dass für jedes $A \in \mathcal{S}$ mit $\varphi(A) > 0$ und jedes $x \in S$

$$\mathrm{P}_x\big(\tau(A) < \infty\big) \;>\; 0$$

gilt, wobei

$$\tau(A) \;:=\; \inf\{n \geq 0 \;:\; X_n \in A\}$$

die Ersteintrittszeit in die Menge A bezeichnet. Gilt sogar

$$\mathrm{P}_x\big(\tau(A) < \infty\big) \;=\; 1,$$

so ist die Markov-Kette *Harris-rekurrent*.

Nach dieser Definition kann eine Markov-Kette mehrere verschiedene Irreduzibilitätsmaße besitzen. Unter diesen befindet sich immer ein Wahrscheinlichkeitsmaß, dass gewisse Maximalitätseigenschaften aufweist (vgl. [19], Proposition 4.2.2):

Proposition A.1. *Ist $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ φ-irreduzibel für ein σ-endliches Maß φ, gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß ψ auf $\mathcal{S}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *$\boldsymbol{X}$ ist ψ-irreduzibel.*
2. *Für ein beliebiges Maß φ' ist $\boldsymbol{X}$ genau dann φ'-irreduzibel, wenn φ' durch ψ dominiert wird.*
3. *Ist $\psi(A) = 0$, gilt $\psi\big(\{y : \mathrm{P}_y(\tau(A) < \infty) > 0\}\big) = 0$.*
4. *Das Wahrscheinlichkeitsmaß ψ ist äquivalent zu ψ', definiert durch*

$$\psi'(A) \ := \ \int \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{n+1}} \, \mathbb{P}^n(y, A) \ \varphi'(dy)$$

für alle $A \in \mathcal{S}$, mit einem Irreduzibilitätsmaß φ'.

Wir nennen ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit den Eigenschaften 1.-4. ein *maximales Irreduzibilitätsmaß*. Im Folgenden bezeichnen wir Markov-Ketten als ψ-irreduzibel, wenn sie φ-irreduzibel für ein geeignetes Maß φ sind und ψ ein maximales Irreduzibilitätsmaß ist. Weiter schreiben wir

$$\mathcal{S}^+ \ := \ \big\{A \in \mathcal{S} : \psi(A) > 0\big\}$$

für die Mengen mit positivem ψ-Maß. Dabei sichert die Äquivalenz maximaler Irreduzibilitätsmaße (Eigenschaft 4. in Prop. A) die Eindeutigkeit von $\mathcal{S}^+$. Eine ψ-irreduzible Markov-Kette heißt *rekurrent*, falls

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}^n(x, A) \ = \ \infty$$

für alle $x \in S$ und alle $A \in \mathcal{S}$ gilt, und sie heißt *transient*, wenn ihr Zustandsraum transient ist, d.h. wenn es eine abzählbare Überdeckung des

Zustandsraumes durch Mengen $A_i,\ i \geq 1$, und eine Schranke $M > 0$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}^n(x, A) \ \leq \ M \qquad \text{f.a. } x \in A_i$$

gibt. Es gilt (s. [19], Theorem 8.2.5):

Theorem A.2. *Jede ψ-irreduzible Markov-Kette ist entweder rekurrent oder transient.*

Weiter heißt eine Menge *maximale Harris-Menge*, wenn sie eine maximale absorbierende Menge ist, so dass $\mathbf{X}$ bei Einschränkung auf diese Menge Harris-rekurrent ist. Dazu gibt es folgenden Zerlegungssatz (s. [19], Theorem 9.1.5 und Proposition 8.3.7):

Theorem A.3. *Falls $\boldsymbol{X}$ ψ-irreduzibel und rekurrent ist, können wir den Zustandsraum der Kette zerlegen:*

$$S \ = \ H \cup N,$$

wobei $H \neq \emptyset$ eine maximale Harris-Menge und N eine ψ-Nullmenge ist.

Ein σ-endliches Maß π heißt *stationäres* oder *invariantes Maß*, falls für alle $A \in \mathcal{S}$

$$\pi\ \mathbb{P}(A) \ := \ \int_S \mathbb{P}(x, A)\ \pi(dx) \ = \ \pi(A)$$

gilt. Ist π ein Wahrscheinlichkeitsmaß, heißt es *stationäre* oder *invariante Verteilung*. Dazu gibt folgende Ergebnisse (s. [19], Theoreme 13.3.3, 13.3.4, 17.0.1):

Theorem A.4. *Für eine aperiodische Harris-rekurrente Markov-Kette $\boldsymbol{X}$ mit invarianter Verteilung π gilt für jede Anfangsverteilung λ*

$$\|\, \mathrm{P}_\lambda(X_n \in \cdot) - \pi \,\| \ \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \ 0.$$

Theorem A.5. *Ist $\boldsymbol{X}$ eine Harris-rekurrente Markov-Kette mit invarianter Verteilung π und Periode $d \geq 1$, gilt für jede Anfangsverteilung λ*

$$\left\| \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} \int \mathbb{P}^{nd+k}(x,\cdot)\ \lambda(dx) - \pi \right\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ist $\boldsymbol{X}$ jedoch nur ψ-irreduzibel mit Periode $d \geq 1$ und einer invarianten Verteilung π, dann gibt es eine π-Nullmenge N, so dass für jede Anfangsverteilung λ mit $\lambda(N) = 0$ gilt:

$$\left\| \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} \int \mathbb{P}^{nd+k}(x,\cdot)\ \lambda(dx) - \pi \right\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Theorem A.6. *Für jede Harris-rekurrente Markov-Kette $\boldsymbol{X}$, die eine invariante Verteilung besitzt, gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g(X_k) \;=\; \mathrm{E}_\pi \left(g(X_0)\right) \;=\; \int g\ d\pi$$

fast sicher für jede Funktion g auf S mit $\int |g|\ d\pi < \infty$.

Aus diesen Theoremen ergibt sich, dass für eine Harris-rekurrente Kette mit einer invariante Verteilung Letztere eindeutig bestimmt ist. Unter gewissen Ergodizitätsbedingungen an die Kette und einer Beschränkheitsbedingung an die Funktion g erhält man den zentralen Grenzwertsatz und das Gesetz vom iterierten Logarithmus für die Funktion g:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{n\gamma_g^2}} \sum_{k=1}^{n} \left(g(X_k) - \int g\ d\pi\right) \overset{d}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0,1),\\
\liminf_{n\to\infty}\ &\frac{1}{\sqrt{2\gamma_g^2 n \lg\lg(n)}} \sum_{k=1}^{n} \left(g(X_k) - \int g\ d\pi\right) \;=\; -1 \qquad \mathrm{P-f.s.},\\
\limsup_{n\to\infty}\ &\frac{1}{\sqrt{2\gamma_g^2 n \lg\lg(n)}} \sum_{k=1}^{n} \left(g(X_k) - \int g\ d\pi\right) \;=\; 1 \qquad \mathrm{P-f.s.},
\end{aligned}$$

wobei γ_g eine von g abhängige Konstante ist, die sich durch die Beschränkheitsbedingung an g ergibt.

Literaturverzeichnis

[1] Alsmeyer, G. (1991). *Erneuerungstheorie*, Teubner, Stuttgart.

[2] Alsmeyer, G. (2002). *Stochastische Prozesse. Teil 1: Diskrete Markov-Ketten, Martingale und Erneuerungstheorie*, 2. Auflage, Skripten zur Mathematischen Statistik Nr. 33, Universität Münster.

[3] Alsmeyer, G. (2003). *Wahrscheinlichkeitstheorie*, 3. Auflage, Skripten zur Mathematischen Statistik Nr. 30, Universität Münster.

[4] Athreya, K.B. und Dai, J.J. (2000). Random Logistic Maps I, *Journal of Theoretical Probability*, Bd. 13, Nr. 2, 595-608.

[5] Athreya, K.B. und Dai, J.J. (2002). On the Nonuniqueness of the Invariant Probability for i.i.d. Random Logistic Maps,*The Annals of Probability*, Bd. 30, Nr. 1, 437-442.

[6] Athreya, K.B. und Ney, P. (1978). A new approach to the limit theory of Markov chains, *Trans. Am. Math. Soc.*, Bd. 245, 493-501.

[7] Athreya, K.B. und Schuh, H.-J. (2003). Random Logistic Maps II. The Critical Case, *Journal of Theoretical Probability*, Bd. 16, Nr. 4, 813-830.

[8] Bhattacharya, R.N. und Majumdar, M. (1999). On a theorem of Dubins and Freedman, *Journal of Theoretical Probability*, Bd. 12, Nr. 4, 1067-1087.

[9] Bhattacharya, R.N. und Rao, B.V. (1993). Random iterations of two quadratic maps, in Cambanis et al. (Herausgeber), *Stochastic Processes: A Festschrift in Honor of Gopinath Kallianpur*, Springer-Verlag, New York.

[10] Bhattacharya, R.N. und Waymire, E.C. (1990). *Stochastic Processes with Applications*, Wiley, New York.

[11] Dai, J.J. (2000). A Result Regarding Convergence of Random Logistic Maps, *Statistics and Probability Letters*, Bd. 47, 11-14.

[12] Devaney, R.L. (1989). *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 2. Ausgabe, Addison-Wesley, New York.

[13] Dubins, L.E. und Freedman, D.A. (1966). Invariant Probabilities for Certain Markov Processes, *Annals of Mathematical Statistics*, Bd. 37, 837-848.

[14] Graczyk, J. und Swiatek, G. (1997). Generic hyperbolicity in the logistic family, *Annals of Mathematics*, Bd. 146, 1-52.

[15] Gyllenberg, M., Hognas, G. und Koski, T. (1994). Population models with environmental stochasticity, *Journal of Math. Biology*, Bd. 32, 93-108.

[16] KLEBANER, F.C. (1997). Population and Density Dependent Branching Processes, in Athreya and Jagers (Herausgeber), *Classical and Modern Branching Processes*, Bd. 84, I.M.A., Springer-Verlag.

[17] KIFER, Y. (1988). *Random Perturbations of Dynamical Systems*, Birkhauser.

[18] MAY, R.H. (1976). Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature*, Bd. 261, 459-467.

[19] MEYN, S.P. und TWEEDIE, R.L. (1994). *Markov Chains and Stochastic Stability*, 2. Auflage, Springer-Verlag, London.

[20] NUMMELIN, E. (1984). *General Irreducible Markov chains and Nonnegative Operators*, Cambridge University Press.

[21] PEITGEN, H.-O., JÜRGENS, H. und SAUPE, D. (1992). *Chaos and Fractals. New Frontiers of Science*, Springer-Verlag, New York.

[22] PEITGEN, H.-O. und RICHTER, P.H. (1986). *The Beauty of Fractals. Images of Complex Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin.

[23] SANDEFUR, J.T. (1990). *Discrete Dynalical Systems: Theory and Applications*, Clarendon Press, Oxford.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Diplomarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die im Literaturverzeichnis aufgeführten Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Münster, den 6. November 2007

Silke Ahlers