Übungen zur Quantentheorie (WS 2008/2009)

Blatt 1

Aufgabe 1: Skalarprodukt und Hermitezität (10 Punkte)

Betrachten Sie den N-dimensionalen Raum $\mathbb{C}^N$ der komplexwertigen Spaltenvektoren

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix}, \quad \alpha_i \in \mathbb{C}.$$

a) Ein Skalarprodukt $\langle a, b\rangle$ in $\mathbb{C}^N$ ist definiert durch das Matrixprodukt $a^\dagger \cdot b$, wobei $a^\dagger = (a^{\mathrm{T}})^*$ die zu a transponierte und komplex-konjugierte $1 \times N$-Matrix (Zeilenvektor) ist. Schreiben Sie dieses Skalarprodukt in Komponenten aus und verifizieren Sie die Eigenschaften:

(i) $\langle a, \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2\rangle = \gamma_1 \langle a, b_1\rangle + \gamma_2 \langle a, b_2\rangle$ für $a, b_1, b_2 \in \mathbb{C}^N, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$ (Linearität)

(ii) $\langle a, b\rangle = (\langle b, a\rangle)^*$ (Symmetrie bis auf Komplex-Konjugation)

(iii) $\|a\|^2 := \langle a, a\rangle$ ist positiv reell (≥ 0), wobei $\langle a, a\rangle = 0 \Leftrightarrow a = 0$ (positiv und nicht entartet)

Zeigen Sie, dass aus (i) und (ii) folgt: $\langle \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2, a\rangle = \gamma_1^* \langle b_1, a\rangle + \gamma_2^* \langle b_2, a\rangle$ (Antilinearität) (2 Punkte)

b) Es sei A ein Endomorphismus von $\mathbb{C}^N$, d.h. eine $N \times N$-Matrix (α_{ij}) mit Einträgen aus $\mathbb{C}$. Ein Endomorphismus heißt zu A adjungiert (Schreibweise: $A^\dagger$), wenn gilt:

$$\langle A^\dagger a, b\rangle = \langle a, Ab\rangle \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{C}^N.$$

Geben Sie die Elemente der Matrix von $A^\dagger$ an. Ist $A^\dagger$ eindeutig bestimmt? (2 Punkte)

c) Ein Endomorphismus A von $\mathbb{C}^N$ heißt *hermitesch* oder *selbstadjungiert*, wenn $A^\dagger = A$ gilt.
Es seien A und B hermitesche Operatoren. Welche der folgenden Operatoren sind wiederum hermitesch? (1 Punkt)

- λA mit $\lambda \in \mathbb{C}$,
- AB,
- $[A, B] := AB - BA$,
- $\mathrm{i}[A, B]$.

Aufgabe 2: Matrizen (8 Punkte)

Zu einer gegebenen Basis $\{|n\rangle\}, n = 1, 2, \ldots N$ seien zwei Operatoren A und B durch ihre Matrizen (A_{nm}) und (B_{nm}) definiert, der ket-Vektor $|\psi\rangle$ durch c_n und der bra-Vektor $\langle\phi|$ durch b_n^*.

a) Berechnen Sie die Matrixdarstellung des Operators AB.

b) Finden Sie die Darstellung des ket-Vektors $A\,|\psi\rangle$.

c) Berechnen Sie den Skalar $\langle\phi|\, A\,|\psi\rangle$ aus den gegebenen Darstellungen.

d) Die Basis $\{|n\rangle\}$ sei eine Basis aus Eigenvektoren für den Operator K mit Eigenwerten n:

$$K\,|n\rangle = n\,|n\rangle\,. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass K in seiner **Spektraldarstellung** als

$$K = \sum_{n=1}^{N} n \left| n \right\rangle \left\langle n \right| \tag{2}$$

geschrieben werden kann.
Hinweis: Ein Operator ist durch seine Wirkung auf jeden beliebigen Vektor charakterisiert. Zeigen Sie obige Darstellung daher durch Anwendung auf einen unbestimmten Vektor $|\alpha\rangle$.

Aufgabe 3: Projektoren (6 Punkte)

In einem 3-dimensionalen, komplexen Vektorraum seien bezüglich einer Basis $\left| e_i \right\rangle, i = 1 \ldots 3$ folgende Matrizen gegeben:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

a) Zeigen Sie, dass P_1 und P_2 Projektoren sind.

b) Zeigen Sie, dass P_1 und P_2 auf zueinander orthogonale Unterräume projizieren, und dass der Bildraum von P_1 gleich dem Kern von P_2 ist.

c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Vektorraums, in der P_1 und P_2 Diagonalgestalt haben. Geben Sie P_1 und P_2 in dieser Basis an.

Aufgabe 4: Neutrino-Oszillation (8 Punkte)

Gegeben sei ein System mit nur zwei linear unabängigen Zuständen:

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Der allgemeinste Zustand ist dann eine normierte Linearkombination:

$$|\psi\rangle = a\,|1\rangle + b\,|2\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{5}$$

Der Hamilton-Operator sei in Matrixdarstellung durch

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h & g \\ g & h \end{pmatrix} \tag{6}$$

mit konstanten g, h gegeben.

a) Finden Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathbf{H}$.

b) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei das System im Zustand $|1\rangle$. Zeigen Sie, dass es sich zum Zeitpunkt t im Zustand

$$|\psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ht/\hbar} \begin{pmatrix} \cos(gt/\hbar) \\ -\mathrm{i}\sin(gt/\hbar) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

befindet.