

Aufgabe 14: Elektron mit polarisiertem Spin (3 Punkte)

Betrachten Sie ein Elektron, dessen Spin in Richtung \vec{n}_1 polarisiert ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten bei Messung des Spins in Richtung \vec{n}_2 jeweils die Eigenwerte $\pm \frac{\hbar}{2}$ auf? ($\vec{n}_1^2 = \vec{n}_2^2 = 1$.) Drücken Sie die Ergebnisse durch $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2$ aus.

Aufgabe 15: Zwei-Spin-System (5 Punkte)

Ein System zweier Elektronenspins sei durch den Hamiltonoperator $H = \gamma \vec{S}_a \cdot \vec{S}_b$, $\gamma > 0$, beschrieben. Bestimmen Sie die Dimension von γ . Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenzustände von H . Gehen Sie dazu von einer Linearkombination der vier ungekoppelten Zustände aus und stellen Sie die zugehörige Eigenwertgleichung auf. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis für die so berechneten Eigenwerte mit Hilfe des Zusammenhangs zwischen dem gekoppelten Gesamtdrehimpuls \vec{J} und den Spinoperatoren \vec{S}_a und \vec{S}_b .

Aufgabe 16: (9 Punkte)

Gegeben sei ein Spin-0-Teilchen, das sich in der x - y -Ebene bewegen kann und dort dem Potential $V(x, y) = \frac{m\omega^2}{18} |z^3 - 1|^2$ ausgesetzt ist, wobei $z = x + iy$.

- Finden Sie die Minima von V .
- Welche Symmetrien besitzt das System? Betrachten Sie die Symmetriegruppe, die aus Rotationen besteht. Schreiben Sie die unitären Operatoren, die diese Transformationen beschreiben, in der Form $U_j = e^{iA_j}$. Wie lauten die A_j in Polarkoordinaten?
- Entwickeln Sie V um die Minima z_j bis zur quadratischen Ordnung. Verwenden Sie dabei die Bezeichnung $\zeta_j = v_j + iw_j$ für die jeweiligen Abweichungen von den Minima z_j .
- Wie lautet die jeweilige Grundzustandswellenfunktion ϕ_j für diese drei Fälle (ohne explizite Angabe der Normierung N_j)?
- U_1 sei der unitäre Operator für die gefundene Rotation mit dem kleinsten Winkel, der größer als Null ist. Welche Eigenwerte λ_k besitzt U_1 ? Wie wirkt U_1 auf die ϕ_j ?
- Finden Sie Linearkombinationen der Form $\Phi_k = \alpha\phi_1 + \beta\phi_2 + \gamma\phi_3$, wobei Sie o.B.d.A. $\alpha = 1$ wählen können, so dass Φ_k eine Eigenfunktion zum Eigenwert λ_k ist.