Übungen zur Atom- und Quantenphysik (SS 2013)

Prof. Dr. G. Münster, Prof. Dr. H. Zacharias

Übungsblatt 7 **Abgabe: 13.06.2013, Besprechung: 18.06.2013**

Aufgabe 29: Operatoridentitäten (4 Punkte)

a) Beweisen Sie die Operatoridentitäten

$$[B,A] = -[A,B], \qquad [A+B,C] = [A,C]+[B,C], \qquad [AB,C] = [A,C]B + A[B,C].$$

b) Berechnen Sie ausgehend von der Born-Jordanschen Vertauschungsrelation $[P_j, Q_k] = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\delta_{jk}\mathbb{1}$ mit Hilfe von Aufgabenteil a) die Kommutatoren

$$[\vec{P}^2, Q_k] \qquad \text{und} \qquad [L_k, Q_l],$$

wobei $L_k = \varepsilon_{ijk} Q_i P_j$ (Summenkonvention!) der Operator einer Drehimpulskomponente ist.

c) Zeigen Sie, dass für Operatoren A, B und C die Jacobi-Identität

$$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$$

erfüllt ist.

Aufgabe 30: Operator $A^\dagger A$ (2 Punkte)

Sei A ein linearer Operator und $A^\dagger$ sein Adjungiertes, beide definiert auf ganz $\mathcal{H}$. Zeigen Sie:

a) der Operator $A^\dagger A$ ist selbstadjungiert,

b) der Operator $A^\dagger A$ ist positiv-semidefinit, d.h. er besitzt nur nichtnegative Erwartungswerte.

Aufgabe 31: Zerlegung nach Eigenfunktionen (7 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m befinde sich in einem unendlich tiefen eindimensionalen Kastenpotential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } \ |x| \le a \\ +\infty & \text{für } \ |x| < a \end{cases}.$$

Achtung: Der Kasten liegt symmetrisch um 0, anders als in der Vorlesung!
Zu einem bestimmten Zeitpunkt sei seine Zustandsfunktion durch

$$\psi(x) = N(a^2 - x^2)\,, \quad |x| \le a$$

gegeben (N Normierungskonstante).

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einer Messung der Energie des Teilchens zum betreffenden Zeitpunkt den Messwert

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2}n^2\,, \quad n \in \mathbb{N}\ (n > 0)$$

zu finden.

b) Zeigen Sie, dass Erwartungswert und Unschärfe der Energie zu diesem Zeitpunkt durch

$$\langle H \rangle = \frac{5\hbar^2}{4ma^2}\,, \quad \Delta E = \frac{\sqrt{5}\hbar^2}{4ma^2}$$

gegeben sind.

Hinweis: Folgende Formeln werden benötigt

$$\int \mathrm{d}\xi\, \xi^2 \cos(\alpha\xi) = \frac{2\xi}{\alpha^2}\cos(\alpha\xi) + \frac{\alpha^2\xi^2 - 2}{\alpha^3}\sin(\alpha\xi) + C\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+\,,$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}\,.$$

Aufgabe 32: Hermitesch oder selbstadjungiert? (4 Punkte)

Über der positiven reellen Halbachse $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} | r \geq 0\}$ sei $\mathcal{D} = \{u(r) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^+) | u'(r) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^+)\}$ die Menge der quadratintegrablen differenzierbaren Funktionen, deren Ableitung ebenfalls quadratintegrabel ist. Der „Radialimpuls-Operator" $\tilde{P}$ sei definiert durch

$$\tilde{P}u(r) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} u(r)$$

auf dem Definitionsbereich $\mathcal{D}_{\tilde{P}} = \{u \in \mathcal{D} | u(0) = 0\}$.

a) Zeigen Sie, dass $\tilde{P}$ hermitesch ist.

b) Ist $\tilde{P}$ selbstadjungiert? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Welche Eigenfunktionen besitzt $\tilde{P}$? Liegen diese in $\mathcal{D}_{\tilde{P}}$?