

Abgabe der Lösungen:

01.06.2010

Aufgabe 9: Spinodale und kritischer Punkt des van der Waals-Gases (10 Punkte)

Die van der Waals-Zustandsgleichung für ein Mol eines Gases lautet

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right) (V - b) = RT.$$

- a) Im p - V -Diagramm besitzt diese Gleichung Extrema bei festem T . Bei Variation von T bilden diese Extrema eine Kurve im p - V -Diagramm. Wie lautet die Gleichung dieser Kurve? (2 Punkte)

- b) Zeigen Sie, dass die gefundene Kurve ein Maximum besitzt bei

$$V_c = 3b, \quad p_c = \frac{a}{27b^2}, \quad T_c = \frac{8a}{27bR}.$$

Dies ist der sogenannte kritische Punkt.

(2 Punkte)

- c) Zeigen Sie, dass der kritische Punkt auch durch die Gleichungen

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_T = 0$$

bestimmt ist.

(2 Punkte)

- d) Drücken Sie die van der Waals-Gleichung durch die reduzierten Größen

$$\bar{V} = \frac{V}{V_c}, \quad \bar{p} = \frac{p}{p_c}, \quad \bar{T} = \frac{T}{T_c}$$

aus.

(2 Punkte)

- e) Berechnen Sie die isobare, thermische Volumenausdehnung

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

und die isotherme Kompressibilität

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

für den Fall $V = V_c$.

(2 Punkte)

Aufgabe 10: CO₂ (5 Punkte)

Für CO₂ gilt näherungsweise die van der Waals-Zustandsgleichung mit

$$a = 3,67 \cdot 10^6 \text{ bar cm}^6 \text{ Mol}^{-2}, \quad b = 43,75 \text{ cm}^3 \text{ Mol}^{-1}$$

oder die Clausius'sche Gleichung

$$p = \frac{RT}{V - a'} - \frac{c}{T(V + b')^2}.$$

Bestimmen Sie a' , b' und c so, dass die kritischen Punkte für beide Gleichungen übereinstimmen.

Übungen zu den Theoretischen Ergänzungen zur Physik II

Aufgabe E5: Paraboloid (7 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m bewege sich auf einem Paraboloid

$$z = a(x^2 + y^2)$$

unter dem Einfluss des homogenen Schwerfeldes.

- a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion und die Bewegungsgleichungen mit Hilfe eines Lagrange-Multiplikators. Verwenden Sie dabei Zylinderkoordinaten. (2 Punkte)
- b) Geben Sie eine Symmetrie und die dazugehörige Erhaltungsgröße an. (2 Punkte)
- c) Zeigen Sie, dass eine Kreisbahn mit Radius ρ_0 Lösung der Bewegungsgleichungen ist. Wie groß ist dabei die Winkelgeschwindigkeit? (2 Punkte)
- d) Wie lautet die Energie ausgedrückt durch ρ und $\dot{\rho}$?
Hinweis: $\dot{\varphi}$ ist mit Hilfe des Drehimpulses L_3 zu eliminieren. (1 Punkt)