Übungen zur Atom- und Quantenphysik

Prof. Dr. M. Klasen, Prof. Dr. H. Zacharias

Blatt 1

Abgabe:	17.04.2014
Besprechung:	22.04.2014

Aufgabe 6: Wellengleichungen (8 Punkte)

a) Wie lautet der allgemeine Ausdruck für eine ebene Welle $\Psi(\vec{r},t)$?
Berechnen Sie $\vec{\nabla}\Psi$, $\Delta\Psi$ und $\frac{\partial}{\partial t}\Psi$.

b) Bestimmen Sie die Phasengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit einer Welle

$$\psi(x,t) = A\cos(k_1 x - \omega_1 t) + A\cos(k_2 x - \omega_2 t).$$

c) Gegeben seien die folgenden Dispersionsbeziehungen $\omega(k)$.
Bestimmen Sie die zugehörigen Wellengleichungen, sowie $v_{\mathrm{Gruppe}}(k)$ und $v_{\mathrm{Phase}}(k)$ für (1)-(3).

1. $\omega = ck$
2. $\omega = Ak^2$
3. $\omega^2 = Ak^2 + B$

Aufgabe 7: Wellenpaket (10 Punkte)

Ein freies Teilchen in einer Dimension kann beschrieben werden durch eine Materienwelle:

$$\psi(x,t) = \int dk\ \tilde{\varphi}(k)\ \exp\left\{i(kx - \omega(k)\,t)\right\}.$$

Nehmen wir an, dass $\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$ und weiter, dass $\tilde{\varphi}(k)$ ein gaußsches Wellenpaket sei,

$$\tilde{\varphi}(k) = \tilde{\varphi}_0\, e^{-b^2(k-k_0)^2}.$$

a) Mit Hilfe des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk\ e^{-\alpha k^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

berechen Sie die Wellenfunktion $\psi(x,t)$.

b) Berechnen Sie den Betragsquadrat der Wellenfunktion $|\psi(x,t)|^2$ und zeigen Sie, dass es sich um einen gaußschen Paket handelt mit dem Schwerpunkt bei

$$\overline{x} = \frac{\hbar k_0}{m}\,t.$$

Zeigen Sie auch dass die Breite des Packets Δx mit der Zeit zunimmt.

Aufgabe 8: Wellengleichung & Kontinuitätsgleichung **(2 Punkte)**

Zeigen Sie, dass ein allgemeines Wellenpacket

$$\psi(x,t) = \int dk\ \tilde{\varphi}(k)\ \exp\left\{i(kx - \omega(k)\,t)\right\}.$$

mit $\omega(k) = \frac{\hbar\, k^2}{2m}$, genügt einer Wellengleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)$$

und auch einer Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\rho(x,t) = -\vec{\nabla}.\,\vec{j}(x,t)$$

wo

$$\rho(x,t) = \psi^*(x,t)\psi(x,t) \qquad\qquad \vec{j}(x,t) = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right).$$

(die Kontinuitätsgleichung)