Übungen zu Quantentheorie, WS 2012/2013

Prof. Dr. F. Jenko

Übungen im WWW: http://pauli.uni-muenster.de/tp/

Übungsblatt 4: (13 P.) **Abgabe: 13.11.12-15.11.12**

Aufgabe 1: (schriftlich) [3 P.]

Zeigen Sie, dass die Dirac-Matrizen

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{I_2} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I_2} \end{pmatrix}$$

die Bedingungen

$$\begin{aligned} &a) \quad \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbf{I_4}\,, \\ &b) \quad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0\,, \\ &c) \quad \beta^2 = \mathbf{I_4}\,. \end{aligned}$$

erfüllen, wobei $\mathbf{I_n}$ die $n \times n$ Einheitsmatrix ist und σ_i, $i = \{1, 2, 3\}$ die Pauli-Matrizen sind.

Aufgabe 2: (mündlich)

$\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$ seien die Spinoroperatoren zweier Spin $\frac{1}{2}$-Teilchen, etwa der beiden Elektronen im He-Atom.

a) **[3P.]** Finden Sie die gemeinsamen Eigenzustände $|S\, m_s; S_1, S_2\rangle$ des Gesamtspinoperators $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$, seiner z-Komponente S_z sowie $\mathbf{S}_1^2$ und $\mathbf{S}_2^2$.

   Hinweis: Benutzen Sie die Dreieckungleichung $|S_1 - S_2| \leq S \leq S_1 + S_2$ sowie die Clebsch-Gordan-Koeffizienten.

b) **[2P.]** Zeigen Sie, dass diese Zustände auch Eigenzustände des Operators $\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$ sind. Berechnen Sie die Eigenwerte.

c) **[2P.]** Zeigen Sie, dass der Operator

$$P = \frac{3}{4} + \frac{1}{\hbar^2}\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$$

   im Raum der Spinzustände ein Projektionsoperator ist. Auf welchen Unterraum projeziert P?

   Hinweis: Ein Projektionsoperator A ist ein hermitescher Operator, der die Eigenschaft $A^2 = A$ erfüllen muss.