Übungen zu Quantentheorie, WS 2012/2013

Prof. Dr. F. Jenko

Übungen im WWW: http://pauli.uni-muenster.de/tp/

Übungsblatt 3: (23 P.) **Abgabe: 06.11.12-08.11.12**

Aufgabe 1: Spin im zeitabhängigen Magnetfeld (schriftlich)

Betrachten Sie ein Teilchen mit Spin 1/2 in einem räumlich konstanten, aber zeitlich veränderlichen Magnetfeld $\mathbf{B} = [B_x(t), 0, B_z]$.

a) **[1P.]** Wie lautet die zeitabhängige Schrödingergleichung?

b) **[2P.]** Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für die Amplituden c_+ und c_- des Zustandes

$$|\psi >= c_+(t)|\frac{1}{2} > +c_-(t)| - \frac{1}{2} > \tag{1}$$

Benützen Sie dazu die Matrix-Darstellungen der Spinoperatoren S_x, S_y, S_z.

c) **[1P.]** Wie lauten die Lösungen für den Fall $B_x = 0$?

d) **[1P.]** Bestimmen Sie die Lösung für den Fall $B_x = B$ (B: zeitlich konstant).

Aufgabe 2: Stern-Gerlach-Versuch (mündlich)

a) **[1P.]** Betrachten Sie ein Neutron in einem inhomogenen Magnetfeld $\mathbf{B} = B(0, 0, z)$. Formulieren Sie die Pauli-Gleichung.

Hinweis: Es besteht folgenden Zusammenhang zwischen magnetischen Moment μ_n des Neutrons und dessen Spin $\mathbf{S}$:

$$\boldsymbol{\mu}_n = g_n \frac{\mu_N}{\hbar} \mathbf{S},$$

wobei $g_n = -3.82608546 \pm 9 \cdot 10^{-6}$ und $\mu_N := \frac{e\hbar}{2m_p}$ das Kernmoment ist, m_p ist die Ruhemasse des Protons.

b) **[1P.]** Wie lauten die Schrödinger-Gleichungen für die beiden Spinkomponenten $\psi_\pm(\mathbf{x}, t)$ der Wellenfunktion $\psi(\mathbf{x}, t)$?

c) **[2P.]** Ein Separationsansatz führt auf die Schrödingergleichung

$$i\hbar \dot{\widetilde{\psi}}_\pm = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \widetilde{\psi}_\pm \mp g_n \frac{\mu_N}{2} Bz \widetilde{\psi}_\pm \, . \tag{2}$$

Bestimmen Sie erst diesen Separationsansatz. Interpretieren Sie die Gleichung (2).

d) **[3P.]** Bestimmen Sie die zeitliche Entwicklung der Erwartungswerte

$$Z_\pm = \langle \widetilde{\psi}_\pm | z | \widetilde{\psi}_\pm \rangle \quad \text{und} \quad P_\pm = \langle \widetilde{\psi}_\pm | \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} | \widetilde{\psi}_\pm \rangle.$$

Berechnen Sie dazu explizit unter Berücksichtigung der Schrödingergleichung für $\widetilde{\psi_\pm}$ die Größen $\dot{Z}_\pm$ und $\dot{P}_\pm$. Welche Bewegung wird dadurch beschrieben?

Hinweis: Für einen beliebigen zeitunabängigen Operator A gilt:

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, H] \rangle.$$

Beweisen Sie diese Relation.

e) **[1P.]** Diskutieren Sie qualitativ die Bewegung von Wellenpaketen.

Aufgabe 3: (mündlich)

Betrachten Sie das Wasserstoffatom bzw. ein Alkaliatom in einem konstanten Magnetfeld **B**.

a) **[1P.]** Wie lautet die Pauli-Gleichung für das Elektron?

b) **[2P.]** Bestimmen Sie die Eigenfunktionen und die Energieeigenwerte in Abhängigheit des Magnetfeldes $\mathbf{B} = Be_z$?

c) **[2P.]** Skizzieren Sie schematisch das Energieniveau-Schema und die Energieaufspaltung für s und p Orbitale.

Aufgabe 4: Pauli-Matrizen (schriftlich)

a) **[2P.]** Zeigen Sie, dass folgende Relationen gültig sind

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\epsilon_{jkl}\sigma_l. \tag{3}$$

Berechnen Sie dazu explizit z.B.

$$\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 \tag{4}$$

durch Matrizenmultiplikation.

b) **[1P.]** Verifizieren Sie, dass

$$\sigma_j\sigma_j = \mathbf{1}, \quad j = 1, 2, 3\,.$$

c) **[1P.]** Beweisen Sie, dass

$$\begin{aligned} \sigma_1\sigma_2 &= i\sigma_3\,, \\ \sigma_2\sigma_3 &= i\sigma_1\,, \\ \sigma_3\sigma_1 &= i\sigma_2\,. \end{aligned}$$

d) **[1P.]** Zeigen Sie, dass

$$\sigma_j\sigma_k + \sigma_k\sigma_j = 2\delta_{kj}\,.$$