`Übungen zu Quantentheorie, WS 2012/2013`

Prof. Dr. F. Jenko

Übungen im WWW: `http://pauli.uni-muenster.de/tp/`

Übungsblatt 2: (14 P.) **Abgabe: 23.10.12-25.10.12**

Aufgabe 1: Eichtransformation (schriftlich)

Betrachten Sie die Eichtransformation der elektrostatischen Potentiale

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}' + \nabla Q\,, \\ \Phi &= \Phi' - \frac{\partial Q}{\partial t}\,, \end{aligned} \tag{1}$$

sowie die Lösungen der dazugehörigen zeitabhängigen Schrödingergleichungen, $\psi(\mathbf{x}, t)$ und $\psi'(\mathbf{x}, t)$.

a) **[2P.]** Beweisen Sie, dass beide Lösungen durch die Transformation

$$\psi'(\mathbf{x}, t) = e^{iG(\mathbf{x},t)}\psi(\mathbf{x}, t) \tag{2}$$

verknüpft sind. Berechnen Sie dazu explizit den Phasenfaktor $G(\mathbf{x}, t)$.

b) **[2P.]** Zeigen Sie, dass für die Wahrscheinlichkeitsdichte $w = \psi^*\psi$ folgende Kontinuitätsgleichung gilt

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla\mathbf{S} = 0\,,$$

wobei

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right) - \frac{q}{m}\mathbf{A}\psi^*\psi$$

der Wahrscheinlichkeitsstrom ist.

c) **[1P.]** Bewiesen Sie nun, dass der Wahrscheinlichkeitsstrom $\mathbf{S}$ invariant gegenüber der Eichtransformation (1) ist.

Aufgabe 2: Rotation eines starren Körpers: Quantenmechanische Behandlung (mündlich)

a) **[1P.]** Betrachten Sie die Rotation eines Moleküls um seinen Schwerpunkt, das Sie durch einen starren Körper mit dem Trägheitstensor Θ beschreiben. Bestimmen Sie die Rotationsenergie des Moleküls. Drücken Sie diese durch seinen Drehimpuls aus.

b) **[1P.]** Betrachten Sie zunächst einen symmetrischen starren Körper mit den Hauptträgheitsmomenten $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 = \Theta_0$. Wie lautet der Hamiltonoperator? Bestimmen Sie die Eigenzustände und die Energieeigenwerte dieses Operators.

c) **[2P.]** Wie entwickelt sich der Anfangszustand

$$|\psi>= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|1,1> + |2,0>\Big] \tag{3}$$

wobei die Vektoren $|l,m>$ die Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ bezeichnen. Berechnen Sie die zeitliche Entwicklung des Drehimpulsoperators $<\psi(t)|\mathbf{L}^2|\psi(t)>$.

d) **[1P.]** Betrachten Sie jetzt den Fall $\Theta_1 = \Theta_2 \neq \Theta_3$. Wie lautet der Hamiltonoperator? Bestimmen Sie die Energieeigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren.

e) **[1P.]** Wie entwickelt sich der Anfangszustand (9) in diesem Fall? Berechnen Sie die Erwartungswerte $<L_z>$, $<L_z^2>$, $<\mathbf{L}^2>$?

f) **[1P.]** Nehmen Sie nun an, dass die Rotation des Moleküls mit einem magnetischen Moment

$$\mu = -g_M \frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{L} \tag{4}$$

verknüpft ist. Wie lautet der Hamiltonoperator? Bestimmen Sie das Energiespektrum und die Eigenfunktionen im homogenen Magnetfeld. Skizzieren Sie die Energiniveaus in Abhängigkeit des Magnetfeldes B.

g) **[2P.]** Bestimmen Sie die zeitliche Entwicklung der Erwartunsgwerte $< L_x >$ und $< L_y >$ für Zustände mit der Anfangsbedingung (9) sowie für den allgemeinen Fall $|\psi >= \sum_m c_m |l, m >$.

Hinweis: Verwenden Sie die Leiteropratoren $L_\pm = L_x \pm i L_y$.