Übungen zu Atom- und Quantenphysik/Physik IV, SoSe 2012

Prof. Dr. R. Friedrich, Prof. Dr. G. F. Hanne

Übungen im WWW: `http://pauli.uni-muenster.de/tp/`

Übungsblatt 6: (12 P.) **Abgabe: 22.05.12**

Aufgabe 1: (mündlich)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ beliebige Zustände aus $\mathcal{H}$.

a) **[1 P.]** Beweisen Sie die Parallelogrammgleichung:

$$\|\alpha+\beta\|^2 + \|\alpha-\beta\|^2 = 2\|\alpha\|^2 + 2\|\beta\|^2$$

b) **[2 P.]** Verifizieren Sie mit Hilfe der Schwarz'schen Ungleichung

$$|\langle\alpha|\beta\rangle| \leq \|\alpha\|\|\beta\|$$

die Dreiecksungleichung:

$$|\,\|\alpha\| - \|\beta\|\,| \leq \|\alpha+\beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$$

Aufgabe 2: (schriftlich)

a) **[1 P.]** Zeigen Sie zunächst, dass für beliebige Operatoren A, B unc C gilt:

$$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C, \quad [AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$$

b) **[2 P.]** Nehmen Sie weiterhin an, dass für zwei Operatoren A und B gilt:

$$[A,\, B] = i\,\mathbf{1} \tag{1}$$

Beweisen Sie, dass dann für $n = 1, 2, 3, \ldots$ folgt:

$$[A,\, B^n] = inB^{n-1} = i\frac{d}{dB}B^n \tag{2}$$

$$[A^n,\, B] = inA^{n-1} = i\frac{d}{dA}A^n \tag{3}$$

Hinweis: Benutzen Sie die Methode der vollständigen Induktion und das Ergebnis aus a).

Aufgabe 3: (schriftlich) Näherung zum Grundzustand des Helium-Atoms

Wir haben in der Vorlesung die Coulomb-Abstoßung der Elektronen im He-Atom als "Störung" betrachtet und ihren Erwartungswert mit Wasserstoff-Eigenfunktionen zur Kernladungszahl $Z = 2$ als Korrektur angegeben. Eine bessere Näherung zum Grundzustand des He-Atoms erhält man durch die Überlegung, dass es sicher günstig ist, eine möglichst kleine "Störung" abzuspalten. Schreiben wir den Hamilton-Operator wie folgt um,

$$\begin{aligned}&\frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m} - \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\frac{Z'\,e^2}{r_1} - \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\frac{Z'\,e^2}{r_2} \\ &\quad + \left\{ -\frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\frac{(Z-Z')\,e^2}{r_1} - \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\frac{(Z-Z')\,e^2}{r_2} + \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_{12}} \right\} = H_0(Z') + W\,, \end{aligned} \tag{4}$$

so können wir diese Gleichung so interpretieren, als würden sich die beiden Elektronen im Feld eines Atomkerns mit der Kernladungszahl $Z' < Z$ (Abschirmung!) bewegen (H_0), und die geschweifte Klammer ist die zu betrachtende "Störung" W.

a) **[2 P.]** Berechnen Sie die Bindungsenergie $E(Z') = \langle H_0(Z')\rangle + \langle W\rangle = 2(-13,6\,\mathrm{eV})Z'^2 + \langle W\rangle$ der Elektronen im Grundzustands "dieses" He-Atoms mit der Kernladungszahl Z'. (Hinweis: benutzen Sie $\langle e^2/(4\pi\varepsilon_0 r_{12})\rangle = (5/4)\,(13,6\,\mathrm{eV})Z'$ und den Virialsatz $\langle V(Z')\rangle = 2\langle H_0(Z')\rangle$ für ein Coulomb-Potential, der auch in der Quantenphysik gilt.)

b) **[2 P.]** Bestimmen Sie Z' so, dass der Erwartungswert $\langle W\rangle$ der Störung verschwindet und die Bindungsenergie so optimal angenähert wird. Berechnen Sie die Bindungsenergie beider Elektronen in eV.

Aufgabe 4: (mündlich) [2 P.] Diskussion einer Energieformel für das He-Atom

Die Energieniveaus heliumähnlicher Atome mit einem Elektron im Grundzustand ($n = 1$) und dem anderen im angeregten Zustand ($n > 1$) seien ausgedrückt durch

$$E = -13,6\left(Z^2 + \frac{(Z-1)^2}{n^2}\right)\mathrm{eV}\,.$$

Diskutieren Sie diesen Ansatz. Für welche Werte von n ist dieser Ansatz geeignet?