---

**Übungsblatt 4: (13 P.)** **Abgabe: 08.05.12**

**Aufgabe 1: (mündlich)**

Ein Teilchen der Masse $m$ befindet sich in einem eindimensionalen Potential, das an der Stelle $x = x_0$ längs einer kleinen Strecke sehr stark anziehend ($D > 0$) (bzw. abstoßend ($D < 0$)) ist,

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{m} D\delta(x - x_0) + V_1(x)\,.$$

Hierbei stellt $V_1(x)$ ein in der Umgebung der Stelle $x = x_0$ stetiges Potential dar. Nehmen Sie an, dass die Energieeigenfunktionen $\psi(x)$ in der Umgebung von $x = x_0$ stetig sind, d.h.

$$\psi(x_0-) = \psi(x_0+) \equiv \psi(x_0).$$

a) **[1P.]** Integrieren Sie die zeitunabhängige Schrödingergleihung über ein Intervall $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$.

**Hinweis:** Benutzen Sie die Eigenschaft

$$\int_a^b f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0), \qquad \text{falls} \quad a < x_0 < b\,.$$

b) **[1P.]** Zeigen Sie, dass die erste Ableitung der Energieeigenfunktion $\psi(x)$ an der Stelle $x = x_0$ einen durch

$$\psi'(x_0-) = \psi(x_0+) + 2D\psi(x_0)$$

gegebenen Sprung besitzt.

**Hinweis:** Führen Sie den Grenzübergang $\varepsilon \to 0+$ durch.

c) **[1P.]** Formulieren Sie die Anschlussbedingungen für die Energieeigenfunktionen $\psi(x)$ an der Stelle $x = x_0$.

**Aufgabe 2: (schriftlich)**

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse $m$ in dem eindimensionalen anziehenden $\delta$-förmigen Potential

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{m} D\delta(x), \qquad D > 0.$$

a) **[1P.]** Lösen Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung für den Fall $E < 0$.

b) **[2P.]** Zeigen Sie, dass in diesem Fall es nur einen gebundenen Zustand gibt.

c) **[1P.]** Finden Sie die Energie $E$ dieses gebundenen Zustandes und die zugehörige auf eins normierte Eigenfunktion $\psi_E(x)$.
**Hinweis:** Lösen Sie die Schrödingergleichung für die Bereiche $x < 0$ bzw. $x > 0$ und verwenden Sie die in Aufgabe 1 c) abgeleiteten Anschlussbedingungen.

**Aufgabe 3: Einfache Spektren von Einelektronen-Atomen**

a) **[2P.] (schriftlich)** Im Spektrum des Wasserstoffatoms tritt eine Linie mit der Wellenlänge $\lambda = 1875\,\mathrm{nm}$ auf. Welche Hauptquantenzahlen haben Anfangs- und Endzustand bei dem entsprechenden Übergang?

   **Hinweis:** Sie müssen, wie früher die Spektroskopiker, am Ende schlicht probieren.) Welche Linien mit welchen Wellenlänge werden noch auftreten, wenn der Endzustand weiter zerfällt?

b) **[2P.] (schriftlich)** Man bestimme eine Linie im $He^+$-Spektrum, welche dieselbe Wellenlänge wie eine Linie des Wasserstoffspektrums hat. Wie groß ist ihre Wellenlänge?

c) **[2P.] (mündlich)** Wie groß ist die Bindungsenergie eines Myons (207-mal schwerer als ein Elektron), das von einem Ti-Kern eingefangen wird? Vergleichen Sie den Radius der 1. Bohr'schen Bahn dieses Systems mit dem effektiven Radius von Ti-Kernen. Hinweis: Der effektive Radius eines Kerns der Massenzahl A ist durch $r_K = 1.2 \cdot 10^{-15} A^{1/3}\,\mathrm{m}$ gegeben. Nehmen Sie das hauptsächlich vorkommende Isotop.