

**Aufgabe 1: Gauss'sche Glockenkurve (schriftlich)**

- a) [1 P.] Berechnen Sie die Fläche  $A$  zwischen der Gauss'sche Glockenkurve  $G(x) = e^{-\alpha x^2}$  und der  $x$ -Achse,

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} \quad \text{mit } \alpha > 0. \quad (1)$$

Hinweis: Berechnen Sie  $A^2$  und stellen Sie  $A^2$  in der Form eines Doppelintegrals dar. Führen Sie dann Polarkoordinaten ein.

- b) [2 P.] Bestimmen Sie die Fouriertransformierte  $F(k)$  der normierten Gauss'schen Glockenkurve  $f(x)$  und diskutieren Sie das Ergebnis.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha}\right) \quad \text{mit } \alpha > 0. \quad (2)$$

- c) [1 P.] Diskutieren Sie den Verlauf der Kurve  $f(x)$  im Grenzfall  $\alpha \rightarrow 0$ .  
 d) [2 P.] Bestimmen Sie das Integral

$$I = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-x^2/2\alpha} h(x) \quad (3)$$

für eine bei  $x = 0$  stetige Funktion  $h(x)$ .

**Aufgabe 2: Wellenpakete (schriftlich)**

- a) [1P.] Formulieren Sie die Schrödingergleichung für ein freies Teilchen, das sich entlang einer Koordinate  $x$  bewegen kann.  
 b) [1P.] Wie lautet die allgemeine Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung?  
 c) [2P.] Die Wellenfunktion zur Zeit  $t = 0$  besitze die Form

$$\Psi(x, t = 0) = \frac{1}{2\pi} \int dk A e^{-(k-k_0)^2 \frac{D^2}{2}} e^{ikx} \quad (4)$$

Berechnen Sie das Integral. Wie muss  $A$  gewählt werden, dass die Normierung der Wellenfunktion

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |\Psi(x, t)|^2 = 1 \quad (5)$$

gewährleistet ist?

Hinweis: Die Fourier-Transformierten einer Gauss-Funktion ist wiederum eine Gauss-Funktion.

- d) [2P.] Berechnen Sie die Wellenfunktion zur Zeit  $t$ . Wie bewegt sich das Maximum der Wellenfunktion? Was können Sie über die Breite der Wellenfunktion aussagen? Bleibt die Normierung bei der zeitlichen Entwicklung erhalten?  
 e) [1P.] Diskutieren Sie das Auseinanderfließen der Wellenfunktion für ein Teilchen mit der Masse  $m = 0,1$  g,  $D = 2$ mm, sowie für ein  $\alpha$ -Teilchen der Masse  $6,6 \cdot 10^{-27}$ kg mit  $D = 10^{-11}$ cm.

### Aufgabe 3: (mündlich)

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse  $m$ , das sich in einem unendlich tiefen eindimensionalen Kastenpotential

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } |x| \leq a, \\ +\infty, & \text{für } |x| > a \end{cases}$$

befindet. Zu einem bestimmten Zeitpunkt sei seine Zustandsfunktion  $\psi(x)$  durch

$$\psi(x) = N(a^2 - x^2), \quad |x| \leq a$$

gegeben, wobei  $N$  eine Normierungskonstante ist.

- a) [1P.] Bestimmen Sie zunächst die Normierungskonstante  $N$ .
- b) [3P.] Nehmen Sie an, dass bei einer Messung der Energie des Teilchens zum betreffenden Zeitpunkt der Messwert

$$E_{n-1} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2} n^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

gefunden wurde. Zeigen Sie, dass die Entwicklungskoeffizienten  $c_{n-1} := \langle \psi_{n-1} | \psi \rangle$  in diesem Fall durch

$$c_{n-1} = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} \frac{8\sqrt{15}}{(n\pi)^3}, & n \text{ ungerade,} \\ 0, & n \text{ gerade} \end{cases}$$

gegeben sind.

**Hinweis:** Die Energieeigenfunktionen  $\psi_{n-1}(x)$  für das unendlich tiefe Kastenpotential sind durch

$$\psi_{n-1} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \cos \frac{n\pi x}{2a}, & |x| \leq a \quad n \text{ ungerade,} \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \frac{n\pi x}{2a}, & |x| \leq a \quad n \text{ gerade} \end{cases}$$

gegeben. Benutzen Sie auch die Formel

$$\int d\xi \xi^2 \cos \alpha \xi = \frac{2\xi}{\alpha^2} \cos \alpha \xi + \frac{\alpha^2 \xi^2 - 2}{\alpha^3} \sin \alpha \xi + C, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

- c) [1P.] Berechnen Sie nun die Wahrscheinlichkeit  $W_{n-1}$  dafür, den Messwert  $E_{n-1}$  zum diesen Zeitpunkt zu finden.

### Aufgabe 4: Rutherford-Streuung [2P.] (mündlich)

Ein Strahl  $\alpha$ -Teilchen der Energie 1 MeV und der Stromstärke  $I_0 = 10^{-5}$  A trifft senkrecht auf ein Gold-Target ( $Z = 79$ ) (eine Metallfolie) der "Flächendichte"  $n_A = 8,95 \cdot 10^{18}$  Atome/cm<sup>2</sup> (eine übliche Angabe zur "Foliendicke"). Etwa welche Stromstärke gestreuter  $\alpha$ -Teilchen misst man mit einem Detektor der quadratischen Fläche 1 cm<sup>2</sup>, der unter dem Winkel  $\vartheta = 15^\circ$  in 1 m Abstand vom Target aufgestellt ist?

**Hinweis:** Überlegen Sie, wie Sie aus den Angaben das Produkt aus Zahl der streuenden Atome und einfallender Stromdichte berechnen, ohne den Strahlquerschnitt und die Foliendicke bzw. das Targetvolumen der Goldfolie bestimmen zu müssen.