Seminar zu Symmetrien und Erhaltungssätzen
Darstellungstheorie der Lorentzgruppe

Philipp Maichrowitz

26. Januar 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Überblick **3**

2 Allgemeines zur Lorentzgruppe und ihren Untergruppen **4**

2.1 Die Lorentzgruppe 4

2.2 Wichtige Untergruppen der Lorentzgruppe 5

2.3 Definition einer Lie-Gruppe und Parametrisierung der eigentlichen Lorentzgruppe 5

3 Darstellungstheorie der eigentlichen und vollständigen Lorentzgruppe **7**

3.1 Wichtige Definitionen der Darstellungstheorie 7

3.2 Wichtige Sätze und Definitionen zur Darstellungstheorie Liescher Gruppen 7

3.3 Infinitesimale Operatoren der eigentlichen Lorentzgruppe 8

3.4 Klassifikation der endlichen, irreduziblen Darstellungen der eigentlichen Lorentzgruppe 9

3.5 Produkte der endlichen, irreduziblen Darstellungen der eigentlichen Lorentzgruppe 12

3.6 Klassifikation der endlichen, irreduziblen Darstellungen der vollständigen Lorentzgruppe 14

4 Anhang **18**

4.1 Minkowskiraum, Liegruppe, Kroneckerprodukt von Darstellungen, direktes Produkt von Darstellungen 18

Literaturverzeichnis **19**

1 Überblick

In diesem Vortrag geht es um die Darstellungstheorie der Lorentzgruppe. Sie ist eine Lie-Gruppe. Wesentliche Aussagen ergeben sich also schon aus der Betrachtung der infinitesimalen Operatoren. Im Mittelpunkt steht die Klassifikation der endlichdimensionalen, irreduziblen Darstellungen der eigentlichen und vollständigen Lorentzgruppe.

Im zweiten Kapitel werden die betrachteten Gruppen vorgestellt, physikalisch motiviert und es wird eine Parametrisierung der eigentlichen Lorentzgruppe angegeben. Im dritten Kapitel werden zunächst einige Grundlagen der Darstellungstheorie wiederholt und es werden die wichtigsten Sätze, die zur Untersuchung Liescher Gruppen benötigt werden, bereitgestellt. Nachdem aus der in Kapitel 2 angegebenen Parametrisierung die Vertauschungsrelationen der infinitesimalen Operatoren der eigentlichen Lorentzgruppe berechnet wurden, werden die endlichen, irreduziblen Darstellungen der eigentlichen Lorentzgruppe klassifiziert. Es schließt sich eine Untersuchung der Produkte dieser an. Die Klassifikation der endlichen, irreduziblen Darstellungen der vollständigen Lorentzgruppe erfolgt dann unter Ausnutzung der Ergebnisse, die wir für die eigentliche Lorentzgruppe erhalten haben und aus der Tatsache, dass jedes Element der vollständigen Lorentzgruppe aus Spiegelungsoperator und einer eigentlichen Lorentztransformation zusammengesetzt werden kann.

2 Allgemeines zur Lorentzgruppe und ihren Untergruppen

2.1 Die Lorentzgruppe

Def 2.1.1. Sei $G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Dann bezeichnet man die Menge $L := \left\{ A \in \mathbb{R}^{4\times 4} | A^T G A = G \right\}$ als **Lorentzgruppe**.

Bem 2.1.2. Wie die Bezeichnung suggeriert, bildet L eine Gruppe bzgl. der üblichen Matrixmultiplikation. Auf natürliche Weise, kann man L als Gruppe von linearen Abbildungen $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ auffassen. L enthält insbesondere die Raumspiegelung G und und die Zeitspiegelung $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Die Bedingung $A^T G A = G$ ist äquivalent zu $\langle Ax | GAy \rangle = \langle x | Gy \rangle$ [1] und $\langle \cdot | G \cdot \rangle$ stellt ein Minkowski-Skalarprodukt [2] für den $\mathbb{R}^4$ dar.

Interpretation 2.1.3. In der relativistischen Physik beschreibt L die Raum-Zeit- Transformationen. Die erste Koordinate wird dabei mit der Zeit identifiziert. Die anderen drei mit den kartesischen Raumrichtungen. Dies motiviert die folgende Definition von Minkowski.

Def 2.1.4. Sei M ein Minkowski-Raum, sei $x \in M$ und bezeichne $[\cdot|\cdot]$ das zugehörige Minkowskiskalarprodukt:
$[x|x] < 0 \quad \Leftrightarrow x$ **zeitartig**
$[x|x] = 0 \cap x \neq 0 \Leftrightarrow x$ **lichtartig**
$[x|x] > 0 \cup x = 0 \Leftrightarrow x$ **raumartig**

Bem 2.1.5. Zeitartige Vektoren lassen sich an Hand ihrer ersten Koordinate in **zukünftig** und **vergangen** klassifizieren.

[1] $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ist das übliche Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$
[2] im Anhang findet man die Definition eines Minkowskiraums und eines Minkowski-Skalarprodukts

2.2 Wichtige Untergruppen der Lorentzgruppe

Bem 2.2.1. Sei $A \in L$ Und sei A_{11} der Eintrag oben links der Matrix A:
$A_{11} \geq 1 \cup A_{11} \leq -1$
$\det A = 1 \cup \det A = -1$

Def 2.2.2. $L^{\uparrow} := L \cap \left\{A \in \mathbb{R}^{4\times 4} | A_{11} \geq 1\right\}$ bildet eine Untergruppe der Lorentzgruppe und wird als **vollständige Lorentzgruppe** bezeichnet.

Bem 2.2.3. Die Elemente der vollständigen Lorentzgruppe bilden zukünftige (vergangene) Vektoren auf zukünftige (vergangene) ab. Insbesondere enthält die vollständige Lorentzgruppe die Raumspiegelung P.

Def 2.2.4. $L_+^{\uparrow} = L^{\uparrow} \cap \left\{A \in \mathbb{R}^{4\times 4} | \det A = 1\right\}$ ist eine Untergruppe der Lorentzgruppe und wird als **eigentliche Lorentzgruppe** bezeichnet.

Bem 2.2.5. Es gilt:
$L = L_+^{\uparrow} \cup PL_+^{\uparrow} \cup GL_+^{\uparrow} \cup PGL_+^{\uparrow}$
$L^{\uparrow} = L_+^{\uparrow} \cup PL_+^{\uparrow}$
Die zweite Gleichung wird später bei der Klassifikation der endlichen, irreduziblen Darstellungen der volständigen Lorentzgruppe verwendet.

2.3 Definition einer Lie-Gruppe und Parametrisierung der eigentlichen Lorentzgruppe

Def 2.3.1. [3] Eine topologische Gruppe G_L heißt **Liesche Gruppe**, wenn man ihre Elemente durch endlich viele Parameter beschreiben kann.

Satz 2.3.2. $L_+^{\uparrow}$ ist eine Liesche Gruppe. Man kann sie durch 6 Parameter beschreiben.[4]
Außerdem existiert eine **Parametrisierung**
$p : [0, \pi)^3 \times [0, 1)^3 \to L_+^{\uparrow}$ mit:

$$D_1 := p(x, 0, 0, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & 0 & -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \hat{=} \text{ Drehung um } x_1\text{-Achse}$$

$$D_2 := p(0, x, 0, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & 0 & -\sin x \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cos x & 0 & \sin x \end{pmatrix} \hat{=} \text{ Drehung um } x_2\text{-Achse}$$

[3] Diese Definition ist für unsere Zwecke ausreichend. Im Anhang befindet sich die mathematisch präziese Definition.
[4] Das findet man direkt bei der Betrachtung der Definition.

$$D_3 := p(0,0,x,0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & \sin x & 0 \\ 0 & -\sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{=} \text{ Drehung um } x_3\text{-Achse}$$

$$L_1 := p(0,0,x,0,0,0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{=}\text{Lorentzboost in } x_1\text{-Richtung}$$

$$L_2 := p(0,0,0,0,x,0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & 0 & \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{=} \text{ Lorentzboost in } x_2\text{-Richtung}$$

$$L_3 := p(0,0,0,0,0,x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & 0 & 0 & \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{pmatrix} \hat{=} \text{ Lorentzboost in } x_3\text{-Richtung}$$

Interpretation 2.3.3. Der Lorentzboost L_1 beschreibt in der relativistischen Physik die Raumzeittransfromation von einem Inertilasystem $\sum_1$ in ein Inertialsystem $\sum_2$, dass sich mit der in $\sum_1$ gemessenen Geschwindigkeit $v = c \cdot x$ in x_1-Richtung bewegt.

3 Darstellungstheorie der eigentlichen und vollständigen Lorentzgruppe

3.1 Wichtige Definitionen der Darstellungstheorie

Def 3.1.1. Sei G eine Gruppe, V ein $\mathbb{R}/\mathbb{C}$-Vektorraum und $GL(V)$, die Gruppe der Isomorphismen $V \to V$:
Ein Gruppenhomorphismus $D : G \to GL(V)$ heißt **Darstellung von G auf dem Trägerraum V**. dim(V) ist die **Dimension der Darstellung**.

Bem 3.1.2. Ordnet man jedem Element einer Gruppe die Identität zu, so erhält man eine Darstellung. Diese heißt **Einsdarstellung**.
Wir hatten die Lorentzgruppe als Gruppe von Matrizen eingeführt. Da man diese als Isomorphismen $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ansehen kann, ist auf triviale Weise eine Darstellung auf dem $\mathbb{R}^4$ erklärt. Diese heißt **Vektordarstellung**.

Def 3.1.3. Sei G eine Gruppe und D_1, D_2 Darstellungen von G auf den Vektorräumen V_1 und V_2:
D_1 **äquivalent** zu $D_2 \Leftrightarrow \exists$ Isomorphismus T: $V_1 \to V_2$: $D_2(g) = TD_1(g)T^{-1}\ \forall g \in G$

Def 3.1.4. Sei G eine Gruppe und sei D eine Darstelung von G auf dem Vektorraum V:
D **irreduzibel** $\Leftrightarrow$ es gibt keinen nichttrivialen Untervektorraum von V, der invariant unter $D(g)\ \forall g \in G$

3.2 Wichtige Sätze und Definitionen zur Darstellungstheorie Liescher Gruppen

Def 3.2.1. Sei G_L eine Liesche Gruppe, die mit n Parametern beschrieben werden kann. Sei D eine Darstellung von G_L auf einem Vektorraum V. Da G_L eine Liesche Gruppe ist, kann man D als Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^{4\times 4}$ ansehen. Außerdem gelte $D(\underline{0}) = E$ [1]:
Man nennt $\frac{\partial D}{\partial x_i}|_{\underline{x}=0} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ **iter infinitesimaler Operator** der Darstellung D.

Satz 3.2.2. Seien D_1 und D_2 Darstellungen einer Liegruppe G_L auf einem Vektorraum V:
Die infinitesimalen Operatoren von D_1 und D_2 stimmen überein $\Rightarrow D_1 = D_2$

[1] E bezeichnet die Einheitsmatrix

Bem 3.2.3. Die infinitesimlaen Operatoren legen die Darstellungen also eindeutig fest. Außerdem gibt es ein Verfahren mit dem man aus den infinitesimalen Operatoren die Darstellung berechnen kann.

Satz 3.2.4. Die zu einer Darstellung D einer Liegruppe G_L gehörenden infinitesimalen Operatoren I_j genügen den Vertauschungrelationen:
$I_j I_k - I_k I_j = \sum\limits_i C_{ijk} I_i$.
Die Konstanten C_{ijk} sind dabei von der betrachteten Darstellung unabhängig.

Satz 3.2.5. Es seien $A_1, A_2, ..., A_m$ auf einem Vektorraum V erklärte lineare Operatoren. Erfüllen diese die Vertauschungsrelationen
$A_j A_k - A_k A_j = \sum\limits_i C_{ijk} A_i$,
denen auch die infinitesimalen Operatoren I_j genügen, so sind die Operatoren A_j die infinitesimalen Operatoren einer auf dem Raum V erklärten Darstellung D der Gruppe G_L.

Bem 3.2.6. Satz 3.2.5, Satz 3.2.2 und Bemerkung 3.2.3 können dazu verwendet werden um Darstellungen einer Liegruppe zu finden.[2]

3.3 Infinitesimale Operatoren der eigentlichen Lorentzgruppe

Satz 3.3.1. Der **ite infinitesimale Operator der eigentlichen Lorentzgruppe** bzgl. der Parametrisierung p aus Satz 2.3.2 ist gegeben durch:

$$I_1 := \frac{\partial D}{\partial x_1}|_{\underline{x}=0} = \frac{dD_1}{dx}|_{x=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_2 := \frac{dD_2}{dx}|_{x=0} = \epsilon_{31} - \epsilon_{13}$$ [3]

$$I_3 := \frac{dD_3}{dx}|_{x=0} = \epsilon_{12} - \epsilon_{21}$$

$$J_1 := \frac{\partial D}{\partial x_4}|_{\underline{x}=0} = \frac{dL_1}{dx}|_{x=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_2 := \frac{dL_2}{dx}|_{x=0} = -\epsilon_{02} - \epsilon_{20}$$

[2] s. Abschitt: Herleitung der endlichdimensionalen, irreduziblen Darstellungen der eigentlichen Lorentzgruppe.

[3] ϵ_{ij} bezeichnet die Matrix, deren Einträge überall Null sind außer an der ijten und der jiten Stelle, wo eine 1 steht.

$J_3 := \frac{dL_3}{dx}|_{x=0} = -\epsilon_{03} - \epsilon_{30}$

Durch nachrechnen erhält man die Vertauschungsrelationen [4]:

$$[I_j, I_k] = -\epsilon_{jkl} I_l$$

$$[J_j, J_k] = \epsilon_{jkl} J_l$$

$$[I_j, J_k] = -\epsilon_{jkl} J_l$$

Bem 3.3.2. Im folgenden werden Darstellungen auf $\mathbb{C}$-Vektorräumen untersucht. Die folgenden Definitionen sind daher praktisch:

$$A_k = -\frac{1}{2}(I_k + iJ_k)$$

$$B_k = -\frac{1}{2}(I_k - iJ_k)$$

Durch nachrechnen erhält man die Vertauschungsrelationen:

$$[A_j, A_k] = \epsilon_{jkl} A_l$$

$$[B_j, B_k] = \epsilon_{jkl} B_l$$

$$[A_j, B_k] = 0$$

Die Operatoren A_k und B_k definieren auf eindeutige Weise die Operatoren I_k und J_k. Um Darstellungen zu finden (s. Bem. 3.2.6) kann man also Operatoren suchen, die die Vertauschungsrelationen der Operatoren A_k und B_k erfüllen.

3.4 Klassifikation der endlichen, irreduziblen Darstellungen der eigentlichen Lorentzgruppe

Bem 3.4.1. Um alle endlichdimensionalen Darstellungen der eigentlichen Lorentzgruppe zu finden, muss man alle Operatoren finden, die den Vertauschungsrelationen aus Satz 3.3.1 genügen [5] . Da wir endliche Darstellungen betrachten, werden die Operatoren durch Matrizen repräsentiert. Operatoren, die die Vertauschungsrelationen erfüllen, sind nach Satz 3.2.5 die infinitesimalen Operatoren einer Darstellung der eigentlichen Lorentzgruppe aus denen man nach Bemerkung 3.2.3 die Darstellungen berechnen kann. Gibt es keinen nichttrivialen Untervektorraum, der unter allen infinitesimalen Operatoren invariant ist, dann definieren die infinitesimalen Operatoren eine irreduzible Darstellung. Um die besagten Matrizen zu finden, werden wir folgenden Satz verwenden.

[4] $[\cdot, \cdot]$ bezeichnet den gewöhnlichen Kommutator von Matrizen

[5] bzw. Operatoren die die Relationen aus Bemerkung 3.3.2 erfüllen

Satz 3.4.2. Es seien O_1, O_2 und O_3 drei beliebige auf eienm Vektorraum V definierte Operatoren, die den Vertauschungsrelationen

$$[O_i, O_j] = \epsilon_{ijk} O_k \tag{3.1}$$

genügen. Wir definieren: $O_0 = O_3$, $O_+ = iO_1 - O_2$ und $O_- = iO_1 + O_2$. Dann gilt:

1. Unter den Eigenvektoren des Operators O_0 gibt es einen Vektor e_j, für den $A_+ e_j = 0$ gilt.

2. Für den zu e_j gehörenden Eigenwert λ gilt: $\lambda \in -i \cdot \frac{\mathbb{N}}{2}$

3. Der Vektor e_j und die durch die Rekursionsformel

   $A_- e_m = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} e_{m-1}, (m = j, j-1, ..., -j+1)$

   definierten weiteren Vektoren $e_{j-1}, e_{j-2}..., e_{-j}$ werden bei Anwendung von A_+ bzw. A_0 gemäß

   $A_+ e_m = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} e_{m+1}$

   $A_0 = -ime_m$

   transfomiert.

4. Für spätere Zwecke definieren wir: $\alpha_m^j = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}$

Satz 3.4.3. Klassifikation der endlichen, irreduziblen Darstellungen der eigentlichen Lorentzgruppe Sei τ eine irreduzible Darstellung der eigentlichen Lorentzgruppe auf einem endlichdimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum. Dann gehört τ zu einer Äquivalenzklasse τ_{PQ}, ((P,Q) $\in \frac{\mathbb{N}}{2} \times \frac{\mathbb{N}}{2}$).[6]

Bew 3.4.4. Man definiere Operatoren A_k und B_k analog zu Bemerkung 3.3.2 aus den infinitesimalen Operatoren von τ. Diese erfüllen jeweils die Gleichung 3.1. Man definiere die Operatoren A_+, A_-, A_0 und B_+, B_-, B_0 wie im Satz 3.4.2.[7]

(1/2) $\Rightarrow \exists e \in L$ mit $B_0 e = -iQe$, $Q \in \frac{\mathbb{N}}{2}$. L_Q bezeichne den zugehörigen Eigenraum.

$[A_i, B_j] = 0 \Rightarrow L_Q$ invariant unter A_+, A_-, A_0.

$A_+|_{L_Q}, A_-|_{L_Q}, A_0|_{L_Q}$ erfüllen Gleichung 3.1.

(1/2) $\Rightarrow \exists\ e_{PQ} \in L_Q$ mit $B_0\ e_{PQ} = -iP\ e_{PQ}$, $P \in \frac{\mathbb{N}}{2}$.

[6] Was τ_{PQ} ist, wird im Beweis 3.4.4 klar. Hier: $0 \in \mathbb{N}$

[7] Im folgenden bezeichent (i) den iten Teil von Satz 3.4.2

(3) $\Rightarrow \exists$ Vektoren e_{pQ}, $p = -P, -P+1, ..., P$ (das sind 2P+1 Vektoren) in L_Q mit

$$A_0 e_{pQ} = -ipe_{pQ} \tag{3.2}$$

$$A_+ e_{pQ} = \alpha^P_{p+1} e_{p+1Q}$$

$$A_- e_{pQ} = \alpha^P_p e_{p-1Q}$$

Zu jedem dieser 2P+1 Vektoren kann man nach (3) durch Anwendung von B_- 2Q+1 weitere Vektoren e_{pq}, $q = -Q, -Q+1, ..., Q$ finden:

$$B_0 e_{pq} = -iqe_{pq} \tag{3.3}$$

$$B_+ e_{pq} = \alpha^Q_{q+1} e_{pq+1}$$

$$B_- e_{pq} = \alpha^Q_q e_{pq-1}$$

Wendet man B_-^{Q-q} auf die Gleichungen 3.2 an, so erhält man die Wirkweise der Operatoren A_+, A_-, A_0 auf die neuen Vektoren:

$$A_0 e_{pq} = -ipe_{pq} \tag{3.4}$$

$$A_+ e_{pq} = \alpha^P_{p+1} e_{p+1q}$$

$$A_- e_{pq} = \alpha^P_p e_{p-1q}$$

Aus den Gleichungen 3.2, 3.3, 3.4 schließt man: Die lineare Hülle der Vektoren e_{pq}, $p = -P, -P+1, ..., P$, $q = -Q, -Q+1, ..., Q$, ist invariant unter A_+, A_-, A_0, B_+, B_-, B_0, damit auch unter den A_k und B_k und damit auch unter den infinitesimalen Operatoren von τ. Da τ irreduzibel angenommen wurde, muss dann $L = V$ gelten und die Vektoren e_{pq} definieren eine Basis von V. Diese Basis wird **kanonische Basis** genannt. In der kanonischen Basis sind die Matrizen der Operatoren A_+, A_-, A_0, B_+, B_-, B_0 durch die Gleichungen 3.2, 3.3, 3.4 gegeben und damit auch die der infinitesimalen Operatoren.

τ kann man also eindeutig ein Zahlenpaar (P,Q) $\in \frac{\mathbb{N}}{2} \times \frac{\mathbb{N}}{2}$ zuordnen. (P,Q) definiert eine Äquivalenzklasse von Darstellungen τ_{PQ}, deren Elemente die Dimension (2P+1)(2Q+1) haben. (P,Q) heißt **Gewicht** der Darstellung. τ_{00} ist die **Einsdarstellung**. [8]

[8] Die Mehrdeutigkeit der Darstellungen kann in diesem Vortrag nicht behandelt werden. Dazu empfiehlt sich das Buch „Die linearen Darstellungen der Lorentzgruppe"' von M. A. Neumark. Mit Hilfe der universellen Überlagerung SL(2,$\mathbb{C}$) wird dort gezeigt: P+Q = ganze Zahl $\Rightarrow$ eindeutige Darstellung; P+Q = halbganz $\Rightarrow$ zweideutige Darstellung.

3.5 Produkte der endlichen, irreduziblen Darstellungen der eigentlichen Lorentzgruppe

Satz 3.5.1. [9] Es gilt:

$$\tau_{P_1Q_1} \otimes \tau_{P_2Q_2} = \sum_{|P_1-P_2|\leq P\leq|P_1+P_2|,|Q_1-Q_2|\leq Q\leq|Q_1+Q_2|} \tau_{PQ} \tag{3.5}$$

Seien also τ_1 und τ_2 Darstellungen auf den Trägerräumen V_1 bzw. V_2. Und sei $\tau_1 \in \tau_{P_1Q_1}$ und $\tau_2 \in \tau_{P_2Q_2}$. Durch Bildung des Kroneckerprodukts erhält man die Darstellung $\tau_1 \otimes \tau_2$ auf dem Trägerraum $V_1 \otimes V_2$. Dieser Trägerraum ist dann innere direkte Summe von Vektorräumen V_{PQ}:
$V_1 \otimes V_2 = \sum_{|P_1-P_2|\leq P\leq|P_1+P_2|,|Q_1-Q_2|\leq Q\leq|Q_1+Q_2|} V_{PQ}$. V_{PQ} sind dann invariante Unterräume von $V_1 \otimes V_2$ bezüglich $\tau_1 \otimes \tau_2$. V_{PQ} ist Darstellungsraum für eine Darstelllung aus τ_{PQ}, d.h. schränkt man $\tau_1 \otimes \tau_2$ auf V_{PQ} ein, so erhält man eine Darstellung aus τ_{PQ}.
Die Vektoren der kanonische Basis auf dem Untervektorraum V_{PQ} bezeichnen wir mit e_{pq}^{PQ}. Fasst man all diese Basen zusammen, so erhält man eine Basis von $V_1 \otimes V_2$.
Die Vektoren der kanonischen Basis von V_1 bezeichnen wir mit $u_{p_1q_1}^{P_1Q_1}$ und diejenigen von V_2 mit $v_{p_2q_2}^{P_2Q_2}$. Dann bilden die Vektoren $u_{p_1q_1}^{P_1Q_1} v_{p_2q_2}^{P_2Q_2} := u_{p_1q_1}^{P_1Q_1} \otimes v_{p_2q_2}^{P_2Q_2}$ eine Basis von $V_1 \otimes V_2$. Es gilt:

$$e_{pq}^{PQ} = \sum_{p_1+p_2=p,q_1+q_2=q} (P_1P_2p_1p_2|Pp)(Q_1Q_2q_1q_2|Qq)u_{p_1q_1}^{P_1Q_1} v_{p_2q_2}^{P_2Q_2} \tag{3.6}$$

$$u_{p_1q_1}^{P_1Q_1} v_{p_2q_2}^{P_2Q_2} = \sum_{P,Q,p_1+p_2=p,q_1+q_2=q} (P_1P_2p_1p_2|Pp)(Q_1Q_2q_1q_2|Qq)e_{pq}^{PQ} \tag{3.7}$$

$(X_1X_2x_1x_2|Xx)$ bezeichnen die Clebsch-Gordon-Koeffizienten.

Bem 3.5.2. Von einem Beweis dieses Satzes sehen wir hier ab. Wir betrachten stattdessen wichtige Folgerungen, die sich aus ihm ergeben.

Def 3.5.3. Sei $\tau_1 \in \tau_{\frac{1}{2}0}$ mit Trägerraum V_1 und $\tau_2 \in \tau_{0\frac{1}{2}}$ mit Trägerraum V_2. Ein Vektor aus V_1 heißt dann **Spinor erster Art** und einer aus V_2 **Spinor zweiter Art**.[10] Es ist üblich die kanonischen Basisvektoren solcher Darstellungen wie folgt zu bezeichnen:

$e_{\frac{1}{2}0} = e_1$	$e_{0\frac{1}{2}} = e_{\dot{1}}$
$e_{-\frac{1}{2}0} = e_{-1}$	$e_{0-\frac{1}{2}} = e_{-\dot{1}}$

[9] Im Anhang befinden sich die Definitionen des direkten Produkts und des Kroneckerprodukts von Darstellungen. Um Satz 3.5.1 zu verstehen, muss man diese kennen.

[10] Die Vektoren eines Darstellungsraum einer Darstellung aus $(\tau_{\frac{1}{2}0})^{m_1}(\tau_{0\frac{1}{2}})^{m_2}$ nennt man *Spinoren vom Rang* $m_1 + m_2$.

Satz 3.5.4. Invarianten Seien τ_1 und τ_2 Spinordarstellungen erster Art. Dann gelten:[11]

1. Der Vektor $\hat{w} = u_1 v_{-1} - u_{-1} v_1 \in V_1 \otimes V_2$ ist invariant, d.h. $\hat{w} = (\tau_1 \otimes \tau_2)(g)\hat{w}$ $\forall g \in G$.

2. Die Abbildung $[,]$: $V_1 \times V_2 \to \mathbb{C}$,

   $\hat{u} = \zeta_1 u_1 + \zeta_{-1} u_{-1}$, $\hat{v} = \mu_1 v_1 + \mu_{-1} v_{-1} \mapsto \zeta_1 \mu_{-1} - \zeta_{-1}\mu_1$ ist invariant,

   d.h. es gilt $[\hat{u}, \hat{v}] = [\tau_1(g)\hat{u}, \tau_2(g)\hat{v}]$ $\forall g \in G$, $\forall \hat{u} \in V_1$, $\forall \hat{v} \in V_2$.

Bew 3.5.5.

1. Der Vektor $e^{00}_{00} \in V_1 \otimes V_2$ ist invariant, da er zur Einsdarstellung gehört. Nutze Gleichung 3.6 mit den Clebsch-Gordon-Koeffizienten $(x_1 x_1 x_2 - x_2 | 00) = \frac{(-1)^{x_1 - x_2}}{\sqrt{2x_1+1}}$.

2. Zunächst definiert man die folgenden Abbildungen:

   T: $V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes V_2$;

   $$\hat{u} = \sum_{i=1,-1} \zeta_i u_i,\ \hat{v} = \sum_{i=1,-1} \mu_i v_i \qquad \mapsto \qquad \sum_{i,j=1,-1} \zeta_i \mu_j u_i v_j$$

   S: $V_1 \otimes V_2 \to \mathbb{C}$

   $$\hat{w} = \sum_{P,Q,p,q} w^{PQ}_{pq} e^{PQ}_{pq} \qquad \to \qquad \sqrt{2} w^{00}_{00}$$

   S ist invariant, da w^{00}_{00} die Komponente des Vektors ist, der zur Einsdarstellung gehört, d.h. es gilt: $S(\hat{w}) = S(\tau_1 \otimes \tau_2(g)\hat{w})$ $\forall\ \hat{w} \in V_1 \otimes V_2$, $\forall\ g \in G$.

   Für $\hat{u} \in V_1$ und $\hat{v} \in V_2$ zeigt man mit Hilfe von Gleichung 3.7:

   $$[\hat{u}, \hat{v}] = S \circ T(\hat{u}, \hat{v})$$

   Durch nachrechnen zeigt man, dass für $g \in G$ gilt:

   $$T(\tau_1(g)\hat{u}, \tau_2(g)\hat{v}) = (\tau_1 \otimes \tau_2)(g) T(\hat{u}, \hat{v})$$

   Mit diesen beiden Gleichungen folgt die Aussage:

   $$[\tau_1(g)\hat{u}, \tau_2(g)\hat{v}] = S \circ T(\tau_1(g)\hat{u}, \tau_2(g)\hat{v}) = S((\tau_1 \otimes \tau_2)(g) T(\hat{u}, \hat{v})) = S(T(\hat{u}, \hat{v})) = [\hat{u}, \hat{v}]\,,$$

Bem 3.5.6. Die Drehgruppe ist eine Untergruppe der eigentlichen Lorentzgruppe. Schränkt man eine Darstellung der eigentlichen Lorentzgruppe auf die Drehgruppe ein, so erhält man eine Darstellung der Drehgruppe. Man kann zeigen: $\tau \in \tau_{PQ} = \tau_{P0} \otimes \tau_{0Q} \Rightarrow \tau|_{Drehgruppe} \in D_P \otimes D_Q$. Wobei D_P die Äquivalenzklasse der Darstellungen der Drehgruppe mit dem Gewicht P ist.

[11] Bezeichnungen wie in Satz 3.5.1 und Definition 3.5.3. Ganz analog kann man den Satz für zwei beliebige Darstellungen der gleichen Äquivalenzklasse τ_{PQ} beweisen, da dann das Kroneckerprodukt der Darstellung die Einsdarstellung enthält.

3.6 Klassifikation der endlichen, irreduziblen Darstellungen der vollständigen Lorentzgruppe

Satz 3.6.1. Klassifikation der endlichen, irreduziblen Darstellungen der vollständigen Lorentzgruppe Sei τ eine irreduzible Darstellung der vollständigen Lorentzgruppe auf einem endlichdimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum. Dann gehört τ entweder zu einer Äquivalenzklasse τ_{PQ}, ((P,Q) $\in \frac{\mathbb{N}}{2} \times \frac{\mathbb{N}}{2}$ und P $\neq$ Q), oder zu einer, die mit τ_P^+ (P $\in \frac{\mathbb{N}}{2}$), oder zu einer, die mit τ_P^- (P $\in \frac{\mathbb{N}}{2}$) bezeichnet wird. [12]

Bew 3.6.2. Sei τ eine endliche, irreduzible Darstellung der vollständigen Lorentzgruppe. Nach Bemerkung 2.2.5 enthält die vollständige Lorentzgruppe im Gegensatz zur eigentlichen Lorentzgruppe den Spiegelungsoperator P (es gilt $P = P^{-1}$, also auch $\tau(P) = \tau(P^{-1}) = \tau(P)^{-1}$). Für den Beweis benötigen wir die Vertauschugsrelationen zwischen den infinitesimalen Operatoren der eigentlichen Lorentzgruppe und $\tau(P)$:

Man rechnet nach, dass gilt:[13]

$$PL_i(x)P = L_i(-x), i = 1, 2, 3$$

Nun bildet man auf die Gleichung mit τ ab:

$$\tau(PL_i(x)P) = \tau(P)\tau(L_i(x))\tau(P) = \tau(L_i(-x))$$

Auf beiden Seiten stehen Abbildungen $\mathbb{R} \to \textit{Operatoren}$. Differenzieren ergibt:

$$\tau(P)J_k\tau(P) = -J_k \tag{3.8}$$

Analog erhält man die Vertauschungsrelationen für die infinitesimalen Operatoren I_k (k=1,2,3):

$$PD_i(x)P = D_i(x) \Rightarrow \tau(P)I_k\tau(P) = I_k \tag{3.9}$$

Aus den Gleichungen 3.8, 3.9 folgt dann für die in Bemerkung 3.3.2 und in Satz 3.4.2 definierten Operatoren:

$$\tau(P)A_k\tau(P) = B_k \tag{3.10}$$

$$\tau(P)A_{0\pm}\tau(P) = B_{0\pm}$$

$\tau|_{L_+^\uparrow}$ ist eine Darstellung der eigentlichen Lorentzgruppe. Sie enthält mindestens eine irreduzible Darstellung $\tau^* \in \tau_{PQ}$.[14] Den Trägerraum dieser Darstellung bezeichnen wir

[12] Was τ_{PQ}, τ_P^+, τ_P^- genau bezeichnen, wird im Beweis 3.6.2 erklärt.
[13] L_i, D_i findet man in Satz 2.3.2
[14] Dies ist eine direkte Folgerung aus dem Beweis 3.4.4: Die Irreduzibilität der Darstellung τ wird dort erst zum Schluss ausgenutzt. Die Folgerungen des ersten Teils gelten deshalb auch für Darstellungen, die nicht irreduzibel sind.

mit V^*. Er ist Teilraum des Trägerraums V von τ. Nun bilden wir V^* mit dem Operator $\tau(P)$ ab. Das Bild bezeichnen wir mit V^{**}.

Wir berechnen nun, wie die Operatoren $A_{0\pm}$, $B_{0\pm}$ auf

$$u_{qp} := \tau(P)e_{pq} \tag{3.11}$$

wirken, wobei e_{pq} die kanonischen Basisvektoren von τ^* sind und wir die Gleichungen 3.10 verwenden.

$$A_0 u_{qp} = A_0\tau(P)e_{pq} = \tau(P)B_0 e_{pq} = -iq\tau(P)e_{pq} = -iqu_{qp} \tag{3.12}$$

Analog erhält man (α_m^j findet man in Satz 3.4.2):

$$B_0 u_{qp} = -ipu_{qp} \tag{3.13}$$

$$A_+ u_{qp} = \alpha_{q+1}^Q u_{q+1p}$$

$$B_+ u_{qp} = \alpha_{p+1}^P u_{qp+1}$$

$$A_- u_{qp} = \alpha_q^Q u_{q-1p}$$

$$B_- u_{qp} = \alpha_p^P u_{qp-1}$$

Die Gleichungen 3.12 und 3.13 zeigen, dass V^{**} invariant unter $\tau_{L_+^\uparrow}$ ist und dass V^{**} Trägerraum für eine Darstellung $\tau^{**} \in \tau_{QP}$ ist, wobei die u_{qp} die kanonische Basis bilden. V^* und V^{**} sind invariant unter $\tau_{L_+^\uparrow}$. Wir zeigen nun, dass $V^* \cup V^{**}$ invariant bezüglich aller Elemente der vollständigen Lorentzgruppe ist:
Nach Bemerkung 2.2.5 gilt: $A \in L^\uparrow \backslash L_+^\uparrow \Rightarrow \exists\ A^* \in L_+^\uparrow$ mit $A = PA^*$. D.h. das wir nur zeigen müssen, dass $V^* \cup V^{**}$ invariant unter $\tau(P)$ ist, was direkt aus $u_{qp} = \tau(P)e_{pq}$ folgt.
Da der Raum $V^* \cup V^{**}$ invariant unter der vollständigen Lorentzgruppe ist, fällt er mit V zusammen. Insbesondere enthält die Menge der e_{pq}, u_{qp} eine Basis von V.
Wir betrchten die Fälle $P = Q$ und $P \neq Q$ getrennt:

1. $P \neq Q$**:** *D.h.*τ^* **und** τ^{**} **sind nicht äquivalent** und die Vektoren e_{pq}, u_{qp} sind linear unabhängig. Sie bilden die **kanonische Basis** von V. Die Darstellung τ gehört in diesem Fall zu einer Äquivalenzklasse $2(2P+1)(2Q+1)$-dimensionaler Darstellungen, die mit $\tau_{PQ} = \tau_{QP}$ bezeichnet wird. Aus dem Beweis folgt: $\tau|_{L_+^\uparrow} \in \tau_{PQ} \oplus \tau_{QP}$.

2. $P = Q$**: D.h. τ^* und τ^{**} sind äquivalent**. Man definiert zunächst $2(2P+1)(2P+1)$ Vektoren:
$$v_{pq}^{\pm} = u_{pq} \pm e_{pq} \tag{3.14}$$
Wie die Operatoren $A_{0\pm}$ auf diese wirken, schließt man aus den Gleichungen 3.2, 3.3, 3.4, 3.12 und 3.13 (α_m^j findet man in Satz 3.4.2):
$$A_0 v_{pq}^{\pm} = -ipv_{pq}^{\pm} \tag{3.15}$$
$$A_+ v_{pq}^{\pm} = \alpha_{p+1}^{P} v_{p+1q}^{\pm}$$
$$A_- v_{pq}^{\pm} = \alpha_{p}^{P} v_{p-1q}^{\pm}$$
$$B_0 v_{pq}^{\pm} = -iqv_{pq}^{\pm}$$
$$B_+ v_{pq}^{\pm} = \alpha_{q+1}^{Q} v_{pq+1}^{\pm}$$
$$B_- v_{pq}^{\pm} = \alpha_{q}^{Q} v_{pq-1}^{\pm}$$
Aus Gleichung 3.11 folgt:
$$\tau(P)v_{pq}^{\pm} = \pm v_{pq}^{\pm} \tag{3.16}$$
Wir bezeichnen die lineare Hülle der Vektoren v_{pq}^{+} mit V^+ und die der v_{pq}^{-} mit V^-. Die Gleichungen 3.15 und 3.16 zeigen, dass V^+ und V^- invariant unter den Elementen der vollständigen Lorentzgruppe sind. Da τ irreduzibel angenommen wurde, folgt daraus:
$$(V^+ = 0 \cap V^- = V) \cup (V^+ = V \cap V^- = 0) \tag{3.17}$$
τ ist also $2(2P+1)$-dimensional und die Gleichungen 3.15 zeigen, dass $\tau|_{L_+^\uparrow} \in \tau_{PP}$ ist. Aus Gleichung 3.17 folgt insbesondere, dass entweder $u_{pq} = -e_{pq}$, oder $u_{pq} = e_{pq}$ gilt. Wenn ersteres gilt, dann folgt mit Gleichung 3.11:
$$\tau(P)e_{pq} = -e_{qp} \tag{3.18}$$
Wenn zweiteres gilt:
$$\tau(P)e_{pq} = e_{qp} \tag{3.19}$$

τ gehört also zu einer von zwei verschiedenen Äquivalenzklassen endlicher, irreduzibler Darstellungen der vollständigen Lorentzgruppe, die sich insbesondere dadurch unterscheiden, dass P verschiedene Operatoren zugeordnet werden. Ist P durch Gleichung 3.18 definiert, so wird die Äquivalenzklasse mit τ_P^- und im anderen Fall mit τ_P^+ bezeichnet.

Def 3.6.3. Sei τ eine Darstellung und V der zugehörige Trägerraum. Folgende Bezeichnungen sind gebräuchlich:

$\tau \in$	$v \in V$
τ_0^+	Skalar
τ_0^-	Pseudoskalar
$\tau_{\frac{1}{2}}^+$	Vektor
$\tau_{\frac{1}{2}}^-$	Pseudovektor

4 Anhang

4.1 Minkowskiraum, Liegruppe, Kroneckerprodukt von Darstellungen, direktes Produkt von Darstellungen

Def 4.1.1. Unter einem **Minkowskiraum** verstehen wir einen Vektorraum V der Dimension $n > 2$ zusammen mit einer nichtentarteten quadratischen Form g vom Index 1. g heißt dann **Minkowski-Skalarprodukt**.

Def 4.1.2. Eine **Liegruppe** ist eine Gruppe G_L, die gleichzeitig die Struktur einer diffb. Mannigfaltigkeit trägt und bei der die Gruppenverknüpfung und die Inversenbildung differenzierbare Abbildungen sind.

Def 4.1.3. Seien D_1 und D_2 Darstellungen einer Gruppe G und V_1 bzw. V_2 ihre Trägerräume. $B_1 = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ und $B_2 = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ seien Basen von V_1 und V_2. Das Kroneckerprodukt von D_1 und D_2 ist eine Darstellung von G über den Tensorraum $V_1 \otimes V_2$. $B_1 \otimes B_2 = \{u_1 \otimes v_1, u_1 \otimes v_2, ..., u_1 \otimes v_m, ..., u_n \otimes v_1, u_n \otimes v_2, ..., u_n \otimes v_m\}$ sei die den Basen B_1 und B_2 zugeordnete Basis des Tensorraums. Dann definiert man das **Kroneckerprodukt von** D_1 **und** D_2 wie folgt:
Fasse D_1, D_2 und $D_1 \otimes D_2$ als matrixwertige Funktionen bzgl. B_1, B_2 bzw. $B_1 \otimes B_2$ auf. Dann definiert man: $(D_1 \otimes D_2)(g) := D_1(g) \otimes D_2(g)$. Wobei auf der rechten Seite $\otimes$ das Kroneckerprodukt von Matrizen bezeichnet.

Def 4.1.4. Seien D_1 und D_2 Darstellungen einer Gruppe G und V_1 bzw. V_2 ihre Trägerräume. $B_1 = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ und $B_2 = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ seien Basen von V_1 und V_2. Das direkte Produkt von D_1 und D_2 ist eine Darstellung von G über den Produktraum $V_1 \times V_2$. $B_1 \times B_2 := \{(u_1, \underline{0}), (u_2, \underline{0}), ..., (u_n, \underline{0}), ..., (\underline{0}, v_1), (\underline{0}, v_2), ..., (\underline{0}, v_m)\}$ ist eine Basis von $V_1 \times V_2$. Dann definiert man das **direkte Produkt von** D_1 **und** D_2 wie folgt:
Fasse D_1, D_2 und $D_1 \times D_2$ als matrixwertige Funktionen bzgl. B_1, B_2 bzw. $B_1 \times B_2$ auf. Dann definiert man: $(D_1 \times D_2)(g) := \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix}$

Literaturverzeichnis

[L] G. J. Ljubarski; Anwendungen der Gruppentheorie in der Physik; Deutscher Verlag der Wissenschaften; Berlin 1962

[MM] Karl-Heinz Goldhorn, Hans-Peter Heinz, Magarita Kraus; Moderne mathematische Methoden der Physik, Band 2: Operator und Spektraltheorie, Gruppen und Darstellungen; Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010

[MP] Helmut Fischer, Helmut Kaul; Mathematik für Physiker, Band 3: Variationsrechnung, Differentialgeometrie, mathematische Gundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie, 2. Auflage, Teubner, Wiesbaden 2010