

Landau-Theorie

Seminar zur Theorie der Teilchen und Felder

Daniel Schröer

1. Einleitung

Um ein Problem der Statistischen Physik zu lösen, wird ein relevantes thermodynamisches Potential, wie beispielsweise die Innere Energie U oder die freie Enthalpie G , vollständig bestimmt. Dies ist allerdings, außer in Spezialfällen, selten streng mathematisch möglich, weshalb man zu Näherungen greifen muss.

Bei Phasenübergängen jedoch zeigt sich, dass bestimmte physikalische Größen ein universelles Verhalten zeigen. Aus diesem Grund versucht man, das Problem im kritischen Bereich allgemein, d.h. materialunabhängig, zu beschreiben.

Ein erster Versuch stammt von dem russischen Physiker Lev Landau (1908-1968), der hier diskutiert wird.

Hierzu betrachtet man das Potential als Funktional des Ordnungsparameters Φ bzw. seiner Dichte Ψ , wobei

$$\Phi = \int d^3 r \Psi \begin{cases} = 0 & \text{für } T > T_c \\ \neq 0 & \text{für } T < T_c \end{cases} \quad (1)$$

Hierbei ist T die Temperatur und T_c die kritische Temperatur.

Beispiele für den Ordnungsparameter und dessen Dichte sind das magnetische Moment \vec{m} und die lokale Magnetisierung \vec{M} beim Ferromagneten.

Für $T \rightarrow T_c$ strebt der Ordnungsparameter gegen 0.

2. Landau-Theorie

Da Ψ in der Nähe des kritischen Punktes sehr klein ist, scheint eine Potenzreihenentwicklung des Potentials, hier durchgeführt am Beispiel der freien Enthalpie G , sinnvoll zu sein:

$$G = \int d^3 r g = \int d^3 r [g_0(r) - \pi(r)\Psi(r) + a(T)\Psi^2(r) + b(T)\Psi^4(r) + c(T)(\nabla\Psi(r))^2] \quad (2)$$

Hierbei ist g_0 die Ordnungsparameterdichte bei verschwindendem Ordnungsparameter und π die zu ψ konjugierte Kraft, dies ist im Falle des Ferromagneten die magnetische Induktion \vec{B} . Da sich G nicht ändern sollte, wenn man bei Ψ und π das Vorzeichen ändert, treten nur gerade Terme in Ψ bzw. $\pi \cdot \Psi$ auf.

In dieser Formel stecken bestimmte Näherungen. So verursacht der Phasenübergang einen singulären Punkt im Potential. Außerdem wird angenommen, dass sich a, b , und c bei T_c harmlos verhalten.

Eine weitere wichtige Näherung ist die Vernachlässigung von Fluktuationen des Ordnungsparameters. Dieser Sachverhalt wird später noch von entscheidender Bedeutung sein.

Da das Potential G im wahrscheinlichsten Zustand minimal wird, kann man die Bestimmungsgleichung für die Ordnungsparameterdichte ψ nach dem Hamiltonschen Prinzip durch Variation von G nach ψ . Dies ergibt

$$\delta G = \int d^3 r \delta \Psi [-\pi(r) + 2a(T)\Psi(r) + 4b(T)\Psi^3(r) - 2c(T)\Delta\Psi(r)] \quad (3)$$

Da $\delta G = 0$ für beliebige $\delta\Psi$ gelten muss, muss der Term in der Klammer Null ergeben und somit gilt:

$$\pi = 2a(T)\Psi(r) + 4b(T)\Psi^3(r) - 2c(T)\Delta\Psi(r) \quad (4)$$

Dies ist die Bestimmungsgleichung mit der im Folgenden weiter gerechnet wird.

3. Kritische Exponenten

Bei Phasenübergängen spielen die kritischen Exponenten eine wichtige Rolle. Die Landau-Theorie ist in der Lage, explizite numerische Werte für diese Exponenten zu berechnen. Dies soll nun nachvollzogen werden.

3.1 Bestimmung von β

β beschreibt die Änderung von Ψ mit der Temperatur durch:

$$\Psi \sim |T - T_c|^\beta \quad (5)$$

Zur Berechnung wird einer homogenen Ordnungsparameterdichte Ψ und einer ausgegangen. Außerdem werden spontane Phasenübergänge betrachtet, d.h. solche mit $\pi = 0$. Damit vereinfacht sich (4) zu

$$\Psi [2a(T) + 4b(T)\Psi^2] = 0 \quad (6)$$

Da die ersten drei Ableitungen von G bei der kritischen Temperatur verschwinden, bezieht sich die Minimumsbedingung auf die vierte Ableitung und somit folgt $b(T_c) > 0$.

Also muss eine Fallunterscheidung bei (6) gemacht werden.

$$\text{i) } a > 0 \Rightarrow \Psi = 0 \quad (7.1)$$

$$\text{ii) } a < 0 \Rightarrow \Psi = 0 \vee \Psi_0 = \pm \sqrt{\frac{-a(T)}{2b(T)}} \quad (7.2)$$

Da a am kritischen Punkt das Vorzeichen wechselt, liegt ein Ansatz der Form

$$a(T) = a_0(T - T_c), a_0 > 0 \quad (8)$$

Nahe. Nimmt man weiterhin an, dass $b(T) \approx b(T_c) =: b$ in der Nähe des kritischen Punktes gilt, so folgt:

$$\Psi = \pm \sqrt{\frac{-a_0}{2b}} \cdot |T - T_c|^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

Aus (9) lässt sich sofort ablesen, dass $\beta = \frac{1}{2}$ ist.

3.2 Bestimmung von δ

δ ist definiert über

$$\Psi \sim \pi^{\frac{1}{\delta}} \quad (10)$$

Mit dem linearen Ansatz (8) für $a(T)$ ergibt sich aus (4) bei einer homogenen Ordnungparameterdichte der Zusammenhang

$$\Psi = \left(\frac{1}{4b} \right) |\pi|^{\frac{1}{3}} \quad (11)$$

woraus sofort $\delta = 3$ folgt.

3.3 Bestimmung von γ und γ'

Die kritischen Exponenten γ und γ' sind definiert über

$$\chi \sim \epsilon^{-\gamma} \text{ für } \epsilon > 0 \quad (12.1)$$

$$\chi \sim |\epsilon|^{-\gamma'} \text{ für } \epsilon < 0 \quad (12.2)$$

Hierbei ist $\epsilon = \frac{T - T_C}{T_C}$ und $\chi = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \pi} \right)_T$ die Suszeptibilitätsdichte.

Leitet man nun (4) nach π ab, so erhält man

$$2a(T)\chi + 12b(T)\chi^2 = 1 \quad (13)$$

Setzt man nun (7.1) und (7.2) in 13 ein, so ergibt sich

$$2a_0(T - T_C)\chi = 1; \epsilon > 0 \quad (14.1)$$

$$2a_0(T - T_C)\chi - 6a_0(T - T_C)\chi^2 = 1; \epsilon < 0 \quad (14.2)$$

Umformen nach χ liefert dann

$$\chi = \frac{1}{2a_0 T_C \epsilon}; \epsilon > 0 \quad (15.1)$$

$$\chi = \frac{1}{4a_0 T_C |\epsilon|}; \epsilon < 0 \quad (15.2)$$

Aus diesen Gleichungen lässt sich ablesen, dass $\gamma = \gamma' = 1$ gilt.

3.4 Bestimmung von α und α'

α und α' sind definiert über

$$c_\pi \sim \epsilon^\alpha; \epsilon > 0 \quad (16.1)$$

$$c_\pi \sim |\epsilon|^{\alpha'}; \epsilon < 0 \quad (16.2)$$

Mit $c_\pi = -T \left(\frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \right)_\pi$ wird die Wärmekapazität bezeichnet. Unter der Annahme homogener Lösungen und $\epsilon \rightarrow 0$ kann man für $a(T)$ den linearen Ansatz (8) benutzen und von $b(T) \approx b(T_c)$ ausgehen. Unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung $\sim \epsilon^3$ erhält man aus (2) die Formeln:

$$\epsilon > 0: G(T) \approx G_0 + a_0 (T - T_c) \Psi_0^2 \Rightarrow c_\pi = 0 \quad (17.1)$$

$$\epsilon < 0: G(T) \approx G_0 + a_0^2 \frac{(T - T_c)^2}{2b(T_c)} \Psi_0^2 \Rightarrow c_\pi = \frac{T_c a_0^2}{2b(T_c)} \quad (17.2)$$

Hieraus liest man ab, dass $\alpha = \alpha' = 0$.

Einschub: Korrelationsfunktion und -länge

Die Korrelationsfunktion ist definiert durch

$$g(\vec{r}, \vec{r}') = \langle \Psi(\vec{r}) \Psi(\vec{r}') \rangle - \langle \Psi(\vec{r}) \rangle \langle \Psi(\vec{r}') \rangle \quad (18)$$

$g(\vec{r}, \vec{r}')$ verknüpft die Antwort des Ordnungsparameters auf äußere Störungen und den Fluktuationen des Systems über

$$\delta \langle \Psi(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{k \cdot T} \int d^3 r' g(\vec{r}, \vec{r}') \delta \pi(\vec{r}') \quad (19)$$

Dies ist das so genannte Fluktuations-Dissipations-Theorem. Um eine Bestimmungsgleichung für g zu finden, wird nun (4) variiert. Unter der Annahme, dass der mittlere und der wahrscheinlichste Wert des Ordnungsparameters übereinstimmen, erhält man

$$(2a(T) + 12b(T) \langle \Psi \rangle^2 - 2c(T) \Delta_r) g(\vec{r}, \vec{r}') = kT \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (20)$$

Dies ist die definierende Gleichung einer Greens-Funktion, die sich durch Fourier-Transformation, Lösen der algebraischen Gleichung und Rücktransformation lösen lässt. Man erhält:

$$g(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{kT}{8\pi c(T)} \cdot \exp\left(\frac{-|\vec{r} - \vec{r}'|}{\xi(T)}\right) \quad (21)$$

Hierbei ist $\xi(T)$ die Korrelationslänge, die in diesem Fall durch

$$\xi(T) = \sqrt{\frac{c(T)}{a(T)}}; T > T_c \quad (22.1)$$

$$\xi(T) = \sqrt{\frac{-c(T)}{2a(T)}}; T < T_c \quad (22.2)$$

gegeben ist.

3.5 Bestimmung von ν & ν'

Die letzten zwei kritischen Exponenten sind definiert über

$$\xi \sim \epsilon^{-\nu}; \epsilon > 0 \quad (23.1)$$

$$\xi \sim |\epsilon|^{-\nu'}; \epsilon < 0 \quad (23.2)$$

Geht man davon aus, dass $c(T)$ nur unkritisch von T im kritischen Bereich abhängt, so erhält man aus (22.1) bzw. (22.2) die Zusammenhänge

$$\xi = \sqrt{c \frac{(T_c)}{T_c a_0}} \epsilon^{-\frac{1}{2}}; \epsilon > 0 \quad (24.1)$$

$$\xi = \sqrt{c \frac{(T_c)}{2 T_c a_0}} |\epsilon|^{-\frac{1}{2}}; \epsilon < 0 \quad (24.2)$$

Hieraus folgt direkt, dass $\nu = \nu' = \frac{1}{2}$.

4. Gültigkeitsbereich

Im Laufe der Rechnungen werden viele Annahmen und Näherungen benutzt, weshalb sich die Frage aufdrängt, wie groß der Gültigkeitsbereich der Theorie überhaupt ist.

Die erste Näherung ist, dass die Ordnungsparameterdichte klein ist, sodass die Entwicklung nach dem fünften Glied abgebrochen werden kann. Somit sollte sich der Wert des Ordnungsparameters mit der Temperatur nicht zu stark ändern.

Aus (24.1) und (24.2) lässt sich ablesen, dass am kritischen Punkt die Korrelationslänge divergiert. Dies bedeutet, dass die einzelnen Bereiche stärker korreliert sind, was sich in kritischen Fluktuationen zeigt. Diese Tatsache widerspricht aber der Annahme vom Anfang, dass Fluktuationen vernachlässigbar klein sind.

Außerdem wird davon ausgegangen, dass der mittlere Wert dem wahrscheinlichsten Wert des Ordnungsparameters entspricht, dies ist bei großen Fluktuationen aber nicht der Fall.

Insgesamt kann man sagen, dass die Landau-Theorie nur bei kleinen Fluktuationen, also bei

$$\langle (\Psi - \langle \Psi \rangle)^2 \rangle \ll \langle \Psi \rangle^2 \quad (25)$$

gültig ist. Nach einigen Umformungen folgt hieraus das Ginzburg-Kriterium

$$\frac{4a_0 b}{c^{d/2}} k T_c |T - T_c|^{(d/2)-2} \ll 1 \quad (26)$$

Hierbei ist d die Dimension des Systems.

Für $d > 4$ ist der Exponent größer als 0 und das Kriterium ist für $T \rightarrow T_c$ immer erfüllbar.

Ist $d = 4$, so hängt es von den Vorfaktoren ab, ob die Theorie gültig ist.

Für $d < 4$ ist der Exponent kleiner als 0. Somit divergiert die linke Seite der Ungleichung und das Kriterium ist verletzt für $T \rightarrow T_c$.

5. Zusammenfassung

Insgesamt lässt sich sagen, dass die Landau-Theorie einige Vor- und Nachteile hat.

So war sie die erste Theorie, die eine allgemeine, materialunabhängige Beschreibung von Phasenübergängen liefert und numerische Werte für die kritischen Exponenten lieferte.

Des Weiteren lässt sie sich so erweitern, dass sie auch bei Systemen anwendbar ist, bei denen die gemachten Annahmen nicht gültig sind.

Außerdem lassen sich bekannte Modelle, wie das Van-der-Waals-Gas und die Molekularfeldnäherung des Ferromagneten als Spezialfälle der Landau-Theorie auffassen.

Allerdings widerspricht sich die Theorie am kritischen Punkt selbst, da sie kritische Fluktuationen vorhersagt, obwohl vorher angenommen worden ist, dass die Fluktuationen klein sind.

Weiterhin stimmen die Vorhersagen der kritischen Exponenten in vielen Fällen nicht mit dem Experiment überein.

Darüber hinaus besagt das Ginzburg-Kriterium, dass die Theorie für $d < 4$ nicht gültig ist, andererseits ist $d < 4$ für viele reale Systeme der Fall.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Theorie viele Systeme qualitativ korrekt beschreibt, z.B. wird, bis auf vereinzelte Ausnahmen, richtig vorhergesagt, ob ein Phasenübergang erster oder zweiter Ordnung vorliegt. Demgegenüber müssen die quantitativen Werte, beispielsweise für die kritischen Exponenten, auf eine andere Art genau bestimmt werden.