Effektive Wirkung und effektives Potential

Ein Vortrag im Rahmen des Seminars: Theorie der Teilchen und Felder im WS07/08

Andrea Goertsches

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation

Die Verwendung der effektiven Wirkung und des effektiven Potentials ist ein alternativer Zugang um spontane Symmetriebrüche ohne die Verwendung der Feynman-Regeln festzustellen. Ein spontaner Symmetriebruch ist ein Übergang eines Systems von einer höheren Symmetrie in eine niedrigere, wobei die äußere Symmetrie nicht verletzt wird. Hierzu zählt zum Beispiel der Ball auf dem Hügel, der zu einer beliebigen Seite spontan herabrollen kann aber auch das Gefrieren einer Flüssigkeit, wobei die kontinuierliche Translationsinvarianz zu einer diskreten Translationsinvarianz reduziert wird.
Im Falle der hier betrachteten Φ^4-Theorie, der einfachsten Beschreibung eines harmonischen Oszillators mit innerer Kopplung, wird man auf Unendlichkeiten stoßen, die auf UV-Divergenzen, d.h. ein kontinuierliches Energiespektrum über welches integriert wird, zurückgeführt werden. Um ein physikalisch sinnvolles Ergebnis zu erhalten, wird eine Renormierung, die allerdings über diesen Vortrag hinausgeht, notwendig.

2 Wiederholung

Die Ergebnisse der vorhergehenden Vorträge sind hier stichpunktartig zusammengefasst:
Wirkung:

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) = \int dt L(\Phi, \partial_\mu \Phi)$$

mit Φ Skalarfeld, $\mathcal{L}$ Lagrangedichte und L Lagrangefunktion.
Wirkung mit einer äußeren Quelle J:

$$S[\Phi, J] = S[\Phi] + \int d^4x J(x)\Phi(x)$$

Vakuum-Vakuum-Übergangsamplitude:

$$Z[J] = \langle 0 \mid 0 \rangle_J = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\Phi e^{\frac{i}{\hbar} S[\Phi, J]}$$

mit $|0\rangle$ dem Grundzustand.
Lagrangedichte der Φ^4-Theorie:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{m^2}{2}\Phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\Phi^4$$

mit Masse m und Kopplungsparameter λ. Es gilt $\lambda \geq 0$ (Dies hat den Effekt, dass das Potential von unten gebunden ist). Man kann diese Theorie nur für selbstwechselwirkende Spin Null-Teilchen verwenden.
Euler-Lagrange (klassiche Gleichung):

$$\frac{\delta S[\Phi, J]}{\delta \Phi(x)} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} - \frac{\partial L}{\partial \Phi} = 0$$

Hiermit erhält man für die Φ^4-Theorie:

$$\frac{\delta S[\Phi, J]}{\delta \Phi(x)} = (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Phi + \frac{\lambda}{3!}\Phi^3 - J(x) = 0$$

Für $\lambda = 0$:
Dann erfüllt eine Greensche Funktion G zu dem Operator $\partial_\mu \partial^\mu + m^2$ die folgende Gleichung:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)G(x - x') = -\delta^4(x - x')$$

Fouriertransformation, Rücktransformation und zusätzlicher $i\epsilon$-Term, der für die Konvergenz des Integrals sorgt, liefert den Feynman-Propagator G_F:

$$G_F(x-x') = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int \frac{d^4k}{2\pi}^4 \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-x')}$$

Es ist

$$Z_0[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\Phi e^{\frac{i}{\hbar} S_0[\Phi, J]}.$$

Fordert man zusätzlich $Z[0] = 1$, so erhält man

$$Z_0[J] = Z_0[0] e^{-\frac{i}{2\hbar} \int \int d^4x d^4x' J(x) G_F(x-x') J(x')}$$

Die 1-Punkt-Funktion ohne Kopplung ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\langle 0|\Phi(x)|0\rangle &= -i\hbar \frac{1}{Z_0[J]} \frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x)}\bigg|_{J=0} \\
&= -i\hbar \frac{1}{Z_0[J]} \left(-\frac{i}{\hbar} \int d^4x' G_F(x-x') J(x')\right) Z_0[J]\bigg|_{J=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Die 2-Punkt-Funktion ohne Kopplung ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\langle 0|T(\Phi(x)\Phi(y))|0\rangle &= (-i\hbar)^2 \frac{1}{Z_0[J]} \frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x) \delta J(y)}\bigg|_{J=0} \\
&= (-i\hbar)^2 \frac{1}{Z_0[J]} \left(-\frac{i}{\hbar} \int d^4x' G_F(x-x') J(x')\right) Z_0[J]\bigg|_{J=0} \\
&= i\hbar G_F(x-x')
\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass der Feynman Propagator der zeitgeordneten 2-Punkt-Funktion im Vakuum entspricht.
Für $\lambda \neq 0$ sehen die Gleichungen der n-Punkt-Funktionen analog aus. Sie ergeben sich auch hier aus den Feynman Regeln und der Übergangsamplitude für nicht-verschwindende Kopplung:

$$\begin{aligned}
Z[J] &= \left(e^{-\frac{i\lambda}{4!\hbar} \int d^4x \left(-i\hbar \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4}\right) Z_0[J] \\
&= Z_0[0] \left[1 - \frac{i\lambda\hbar^3}{4!} \int d^4x \frac{\delta^4}{\delta J^4(x)} + \mathcal{O}(\lambda^2)\right] \cdot e^{-\frac{i}{2\hbar} \int \int d^4x_1 d^4x_2 J(x_1) G_F(x_1-x_2) J(x_2)}
\end{aligned}$$

2-Punkt-Funktion mit Kopplung:

$$\begin{aligned}
\langle 0|T(\Phi(x_1)\Phi(x_2)|o\rangle &= (-i\hbar)^2 \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x) \delta J(y)}\bigg|_{J=0} \\
&= i\hbar G_F(x_1 - x_2) - \frac{\lambda\hbar^2}{2} G_F(0) \int d^4x G_F(x-x_1) G_F(x-x_2)
\end{aligned}$$

Bis zur linearen Ordnung erhält man also für die 2-Punkt-Funktion mit Kopplung eine Summe aus der 2-Punkt-Funktion ohne Kopplung und dem Übergang mit einer inneren Schleife.

3 Effektive Wirkung

3.1 Vorgehensweise

Bisher hat man das erzeugendes Funktional $Z[J]$, der zusammenhängenden und der nicht zusammenhängenden Feynman Diagramme, betrachtet. Da man aber nur an den Feynman Diagrammen interessiert ist, die einen Beitrag zur S-Matrix haben, beschränkt sich das Interesse auf die zusammenhängenden Feynman Diagramme. Das Funktional, welches dies leistet, heißt im Folgenden $W[J]$. Hiermit und mittels des klassischen Feldes $\Phi_c(x)$ läßt sich nun eine effektive Wirkung $\Gamma[\Phi_c]$ in Analogie zur klassischen Wirkung definieren. Um spontane Symmetriebrüche festzustellen, betrachtet man zuletzt den Fall ohne äußere Quelle J, also den Grenzfall $J \mapsto 0$ bzw. $\Phi_c(x) \mapsto \Phi_c$. Dies führt zu dem Begriff des effektiven Potentials V_{eff}. Hierdurch erhält man eine Reduktion des Problems, den Grundzustand $\Phi_c = \langle 0|\Phi(x)|0\rangle$ zu finden, auf eine einfache Extremalgleichung $\frac{\partial V_{eff}(\Phi_c)}{\partial \Phi_c} = 0$.

3.2 Zusammenhängende Feynman Diagramme

Um von dem erzeugenden Funktional $Z[J]$ zu einem neuen erzeugenden Funktional überzugehen, dass die gewünschten Eigenschaften hat, definiert man dieses wie folgt:
Definition:

$$W[J] := -i\hbar \ln Z[J]$$

Man kann sich davon überzeugen, dass es die gewünschten Eigenschaften besitzt indem man die folgenden Rechnungen betrachtet. Für die 1-Punkt-Funktion

$$\left.\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}\right|_{J=0} = -\frac{i\hbar}{Z[J]}\left.\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)}\right|_{J=0} = \langle 0|\Phi(x)|0\rangle = 0$$

als auch für die 2-Punkt-Funktion

$$\begin{aligned}
-i\hbar\left.\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\right|_{J=0} &= (-i\hbar)^2\left.\left[\frac{1}{Z[J]}\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} - \frac{1}{Z^2[J]}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1)}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_2)}\right]\right|_{J=0} \\
&= \langle 0|T(\Phi(x_1)\Phi(x_2)|0\rangle - \langle 0|\Phi(x_1)|0\rangle\,\langle 0|\Phi(x_2)|0\rangle \\
&= \langle 0|T\Phi(x_1)\Phi(x_2)|0\rangle_c
\end{aligned}$$

erhält man die gewünschte Beziehung. In einer aufwändigeren Rechnung kann man zeigen, dass für höhere Ableitungen die analogen Gleichungen

$$(-i\hbar)^{n-1}\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)} = \langle 0|T\Phi(x_1)\cdots\Phi(x_n)|0\rangle_c$$

gelten. Also erzeugt $W[J]$ nur verbundene Feynman Diagramme.

3.3 Das klassische Feld $\Phi_c(x)$

Definition: Das klassische Feld $\Phi_c(x)$ ist der Vakuumerwartungswert des Skalarfelds $\Phi(x)$ unter Einfluss einer äußeren Quelle J.

$$\Phi_c(x) := \langle 0|\Phi(x)|0\rangle_J$$

Mit äußerer Quelle, d.h. $J \neq 0$, folgt:

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \stackrel{def.}{=} -\frac{i\hbar}{Z[J]}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \langle 0|\Phi(x)|0\rangle_J \stackrel{def.}{=} \Phi_c(x)$$

Man kann wegen der Poincaréinvarianz des Vakuumzustands allgemein zeigen, dass der Wert der 1-Punkt Funktion $\Phi_c(x)$ für $J = 0$ immer konstant ist. Wenn diese Konstante verschwindet, hat man

keine Symmetriebrüche. Um Symmetriebrüche festzustellen, sucht man daher nach nichtverschwindenden Vakuumerwartungswerten des Skalarfelds.
Um zu verstehen, warum es als klassisches Feld bezeichnet wird, betrachtet man das erzeugende Funktional $Z[J]$.
Man fordert $\delta Z[J] \stackrel{!}{=} 0$.

$$\begin{aligned}
\delta Z[J] &= \mathcal{N}\int \mathcal{D}\Phi \frac{i}{\hbar}\delta S[\Phi,J]e^{\frac{i}{\hbar}S[\Phi,J]} \\
&= \frac{i\mathcal{N}}{\hbar}\int \mathcal{D}\Phi\left(\int d^4x\delta\Phi(x)\frac{\delta S[\Phi,J]}{\delta\Phi(x)}\right)e^{\frac{i}{\hbar}S[\Phi,J]} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Damit diese Gleichung für jede beliebige Variation der Feldvariable $\delta\Phi(x)$ erfüllt ist, muss schon

$$\mathcal{N}\int \mathcal{D}\Phi\frac{\delta S[\Phi,J]}{\delta\Phi(x)}e^{\frac{i}{\hbar}S[\Phi,J]} = 0$$

gelten. Dies entspricht genau dem, was zu erwarten war, denn dies bedeutet, dass quantenmechanisch nur der Erwartungswert der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\left\langle 0|\frac{\delta S[\Phi,J]}{\delta\Phi(x)}|0\right\rangle_J = 0$$

gilt (Ehrenfest Theorem). Betrachtet man nun die spezielle Wirkung der Φ^4-Theorie, erhält man:

$$\begin{aligned}
\left\langle 0|\frac{\delta S[\Phi,J]}{\delta\Phi(x)}|0\right\rangle_J &= \mathcal{N}\int \mathcal{D}\Phi\left((\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\Phi(x) + \frac{\lambda}{3!}\Phi^3 - J(x)\right)e^{\frac{i}{\hbar}S[\Phi,J]} \\
&\stackrel{def.}{=} \mathcal{N}\int \mathcal{D}\Phi\left(F(\Phi(x)) - J(x)\right)e^{\frac{i}{\hbar}S[\Phi,J]} \\
&\stackrel{\Phi(x)\Rightarrow -i\hbar\frac{\delta}{\delta J(x)}}{=} \mathcal{N}\int \mathcal{D}\Phi\left(F(-i\hbar\frac{\delta}{\delta J(x)}) - J(x)\right)e^{\frac{i}{\hbar}S[\Phi,J]} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Man hat also

$$\begin{aligned}
\left[F(-i\hbar\frac{\delta}{\delta J(x)}) - J(x)\right]Z[J] &= 0 \\
\Leftrightarrow e^{-\frac{i}{\hbar}W[J]}\left[F(-i\hbar\frac{\delta}{\delta J(x)}) - J(x)\right]e^{\frac{i}{\hbar}W[J]} &= 0 \\
\stackrel{\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}=\Phi_c(x)}{\Leftrightarrow} F(\Phi_c(x) - i\hbar\frac{\delta}{\delta J(x)}) - J(x) &= 0
\end{aligned}$$

Wobei bei der ersten Äquivalenzumformung der linke Faktor $e^{-\frac{i}{\hbar}W[J]}$ schlicht hinzugefügt und zusätzlich die Definition $W[J] = -i\hbar\ln Z[J]$ verwendet wurde.
Diese Gleichung beschreibt die volle quantenmechanische Dynamik!
Sie ist in Übereinstimmung mit der klassischen Erwartung, da die quantenmechanische Bewegungsgleichung im semiklassischen Limes $\hbar \to 0$ in die klassische Gleichung

$$\frac{\delta S[\Phi,J]}{\delta\Phi(x)} = -\left(F(\Phi(x)) - J(x)\right) = 0$$

übergeht. Daher nennt man Φ_c das klassische Feld.

3.4 Master-Gleichung

Um die Gleichung zu erhalten, die die quantenmechanische Dynamik beschreibt, setzt man das quantenmechanische Feld $\Phi_c(x) - i\hbar\frac{\delta}{\delta J(x)}$ in die Euler-Lagrange-Gleichung

$$F(\Phi(x)) - J(x) = (\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\Phi(x) + \frac{\lambda}{3!}\Phi^3(x) - J(x) = 0$$

ein. Damit erhält man

$$F\left(\Phi_c(x) - i\hbar\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) - J(x) = 0$$

bzw.

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\left(\Phi_c(x) - i\hbar\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) + \frac{\lambda}{3!}\left(\Phi_c(x) - i\hbar\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3 - J(x) = 0$$

Wenn man dies mit Beachtung der Reihenfolge ausmultipliziert und zusätzlich berücksichtigt, dass die Ableitungen, die ganz rechts in einem Summanden stehen, auf nichts mehr wirken, erhält man

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\Phi_c(x) + \frac{\lambda}{3!}\Phi_c^3(x) - J(x) - \frac{i\hbar\lambda}{2!}\Phi_c(x)\frac{\delta\Phi_c(x)}{\delta J(x)} - \frac{\lambda\hbar^2}{3!}\frac{\delta^2\Phi_c(x)}{\delta J^2(x)} = 0$$

Mit $\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \Phi_c(x)$ folgt

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} + \frac{\lambda}{3!}\left(\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}\right)^3 - J(x) - \frac{i\hbar\lambda}{2!}\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J^2(x)}\delta J(x) - \frac{\lambda\hbar^2}{3!}\frac{\delta^3 W[J]}{\delta J^3(x)} = 0$$

Bereits hier kann man erkennen, dass die Φ^4-Theorie renormiert werden muss. Wegen der Heisenbergschen Unschärferelation bekommt man durch den Summanden $\frac{i\hbar\lambda}{2!}\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J^2(x)}\delta J(x)$, da dieser Produkte von Ableitungen am gleichen RaumZeit Punkt beinhaltet, Unendlichkeiten, die eine Renormierung notwendig machen.

3.5 Effektive Wirkung

Erinnerung:

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \Phi_c(x)$$

Dies bedeutet, dass die Variablen J und Φ_c zueinander konjugiert sind und man kann die folgende Legendretransformation von $J(x)$ nach $\Phi_c(x)$ durchführen. Dies führt zu der folgenden
Definition (effektive Wirkung $\Gamma[\Phi_c]$):

$$\Gamma[\Phi_c] = W[J] - \int d^4x J(x)\Phi_c(x)$$

Nach Definition der Legendretransformation oder wie man leicht nachrechnen kann gilt nun:

$$\frac{\delta\Gamma[\Phi_c]}{\delta\Phi_c(x)} = -J(x)$$

Dies definiert die Quelle implizit als ein Funktional des klassischen Feldes.
Wenn man sich nun am die klassische Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{\delta S[\Phi]}{\delta\Phi(x)} = -J(x)$$

erinnert, erkennt man, dass $\Gamma[\Phi_c]$ wegen dieser Symmetrie effektive Wirkung genannt wird.

3.6 Von der effektiven Wirkung zum effektiven Potential

An dieser Stelle soll an die Gestalt der klassischen Wirkung

$$S[\Phi_c] = \int d^4x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \frac{m^2}{2}\Phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\Phi^4\right)$$

erinnert werden, da man für die effektive Wirkung einen analogen Ansatz macht:

$$\Gamma[\Phi_c] = \int d^4x \left(\frac{1}{2}A(\Phi_c(x))\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - V_{eff} + \mathcal{O}(\partial_\mu^3)\right)$$

Für $J = 0$ bzw. $\Phi_c(x) = \Phi_c$ folgt

$$\Gamma[\Phi_c] = -V_{eff}\int d^4x.$$

Aus $\frac{\delta\Gamma[\Phi_c]}{\delta\Phi_c(x)} = -J(x)$ erhält man durch Einsetzen von $J = 0$ bzw. $\Phi_c(x) = \Phi_c$ sofort

$$\left.\frac{\delta\Gamma[\Phi_c]}{\delta\Phi_c(x)}\right|_{\Phi_c(x)=\Phi_c} = 0$$

bzw.

$$\left.\frac{\partial V_{eff}(\Phi_c)}{\partial\Phi_c}\right|_{\Phi_c(x)=\Phi_c} = 0$$

Ohne Herleitung soll hier noch angegeben werden, dass sich über das effektive Potential die renormierte Masse m_R und die renormierte Kopplungskonstante λ_R berechnen lassen:

$$\left.\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial\Phi_c^2}\right|_{\Phi_c(x)=\Phi_c} = m_R^2$$

$$\left.\frac{\partial^4 V_{eff}}{\partial\Phi_c^4}\right|_{\Phi_c(x)=\Phi_c} = \lambda_R$$

4 Beispiel: Berechnung des effektiven Potentials in 1. Ordnung der Schleifenentwicklung für die Φ^4-Theorie

Bei der Berechnung der Feynman Diagramme mittels der Feynman Regeln, erhält man für jeden Vertex einen Term proportional zu $\frac{1}{\hbar}$ und für jeden Propagator einen Term proportional $\hbar$. Insgesamt ergibt sich daraus, dass eine Entwicklung in Ordnung der Schleifen äquivalent zu einer Entwicklung in $\hbar$ ist. Für die Φ^4-Theorie erhält man die Master-Gleichung in linearer Ordnung von $\hbar$ zu:

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\Phi_c(x) + \frac{\lambda}{3!}\Phi_c^3(x) - \frac{i\lambda\hbar}{2!}\Phi_c(x)\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J^2(x)} + \mathcal{O}(\hbar^2) = J(x) \stackrel{def.\mathcal{LT}}{=} \frac{\delta\Gamma[\Phi_c]}{\delta\Phi_c(x)}$$

Da $\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J^2(x)}$ per Definitionen dem Propagator $-G(x-x,\Phi_c)$ entspricht, erhält man:

$$-\frac{\delta S[\Phi_c]}{\delta\Phi_c(x)} + \frac{i\lambda\hbar}{2!}\Phi_c(x)G(x-x,\Phi_c) + \mathcal{O}(\hbar^2) = \frac{\delta\Gamma[\Phi_c]}{\delta\Phi_c(x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta}{\delta\Phi_c(x)}\left(\Gamma[\Phi_c] - S[\Phi_c]\right) = -\frac{i\lambda\hbar}{2}\Phi_c(x)G(0,\Phi_c) + \mathcal{O}(\hbar^2)$$

Wenn man nun die effektive Wirkung in Potenzen von $\hbar$ entwickelt und berücksichtigt, dass sie im semiklassischen Grenzfall mit der klassischen Wirkung übereinstimmen muss, also wenn

$$\Gamma[\Phi_c] = S[\Phi_c] + \hbar S_1[\Phi_c] + \mathcal{O}(\hbar^2)$$

gilt, folgt

$$\Rightarrow \frac{\delta}{\delta\Phi_c}(\hbar S_1[\Phi_c]) = -\frac{i\lambda\hbar}{2}\Phi_c(x)G(0,\Phi_c) + \mathcal{O}(\hbar^2)$$

Damit gilt in linearer Ordnung von $\hbar$:

$$\frac{\delta S_1[\Phi_c]}{\delta\Phi_c(x)} = -\frac{i\lambda}{2}\Phi_c(x)G(0,\Phi_c)$$

Mit der Entwicklung des effektive Potential $V_{eff} = V + \hbar V_1 + \mathcal{O}(\hbar^2)$ und der Annahme der effektiven Wirkung in Analogie zur klassischen Wirkung, erhält man

$$S_1[\Phi_c] = \int d^4x(-V_1(\Phi_c(x)) + \mathcal{O}(\partial_\mu^3)).$$

Im Grenzfall $J \mapsto 0$ bzw. $\Phi_c(x) \mapsto \Phi_c$ kann man das effektive Potential aus dem Integral herausziehen und es ergibt sich unter Verwendung der soeben hergeleiteten Funktionalableitung der klassischen Wirkung folgende Relation:

$$\left.\frac{\delta S_1[\Phi_c]}{\delta\Phi_c(x)}\right|_{\Phi_c(x)=\Phi_c} = -\frac{\partial V_1(\Phi_c)}{\partial\Phi_c} = \frac{i\lambda}{2}\Phi_c G(0,\Phi_c)$$

$$\Rightarrow V_1(\Phi_c) = -\frac{i\lambda}{2}\int_0^{\Phi_c} d\Phi_c\Phi_c G(0,\Phi_c)$$

Um das Lösen der Greenfunktion für den Fall $\lambda \neq 0$ auf den Fall $\lambda = 0$ zurückzuführen, definiert man eine effektive Masse $m_{eff}^2 = m^2 + \frac{\lambda}{2}\Phi_c^2$ und verwendet die bekannte Lösung

$$G_F(x-x') = \lim_{\epsilon\mapsto 0^+}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^2}\frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}\cdot e^{-\hbar(x-x')}$$

die zu folgendem Ergebnis für den Propagator führt:

$$G(0,\Phi_c) = \lim_{\epsilon\mapsto 0^+}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^2}\frac{1}{k^2 - m_{eff}^2 + i\epsilon}$$

Einsetzen

$$V_1(\Phi_c) = \lim_{\epsilon\mapsto 0^+}\frac{i\lambda}{2}\int_0^{\Phi_c} d\Phi_c\Phi_c\int\frac{d^4k}{(2\pi)^2}\frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

und Ausführen der Integration unter der Annahme, dass $V_1(\Phi_c = 0) = 0$ gilt, ergibt

$$V_1(\Phi_c) = \frac{1}{32\pi^2}\int_0^\infty dxx(\ln(x + m_{eff}^2) - \ln(x + m^2))$$

Um Unendlichkeiten, die durch die obere Integrationsgrenze entstehen, zur Lösung des Integrals zu zumgehen, führt man eine Cut-Off-Funktion Λ^2 und eine zufällige Massenskala μ ein und erhält damit nach Lösen des Integrals

$$V_1(\Phi_c) =$$

$$\lim_{\Lambda\mapsto\infty}\left[\frac{1}{32\pi^2}\left(\frac{\lambda}{2}\Phi_c^2\Lambda^2 - \frac{\lambda}{4}\Phi_c^2(2m^2 + \frac{\lambda}{2}\Phi_c^2)\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2} - \frac{m^4}{2}(\ln\frac{m^2}{\mu} - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(m^2 + \frac{\lambda}{2}\Phi_c^2)^2(\ln\frac{m^2 + \frac{\lambda}{2}\Phi_c^2}{\mu^2} - \frac{1}{2}\right)\right]$$

Das effektive Potential hat in erster Ordnung also die Form $V_{eff}^{(1)} = V + V_1$. Da V_1 den Wert unendlich annimmt, wenn man den Grenzwert $\Lambda \mapsto \infty$ bildet, muss die Φ^4-Theorie renormiert werden.

5 Ausblick

Die zusammenhängenden Feynman-Diagramme sind häufig divergent, da über alle Energien der virtuell erzeugten Teilchen-Antiteilchen Paaren aus dem Vakuum integriert wird. Man versucht daher neue nicht messbare Variablen einzuführen, die die Unendlichkeiten absorbieren. Allerdings sind nicht alle Theorien renormierbar. Wenn eine Theorie renormierbar ist, gibt es verschiedene Möglichkeiten dies durchzuführen. Der Versuch, der in diesem Vortrag angedeutet wurde, verwendet zunächst eine Cut-Off-Funktion, um den Wert des Integrals endlich zu machen. Um dieses Ergebnis zu einem physikalisch sinnvollen zu machen, müssen nun die renormierte Masse $m_R(\Lambda)$ und die renormierte Kopplungskonstante $\lambda_R(\Lambda)$ als Funktionen der Cut-Off-Funktion berechnet werden. Hieraus erhält man sofort $m(m_R, \Lambda)$ und $\lambda(\lambda_R, \Lambda)$. Man hofft nun, dass nach Einsetzten dieser neuen Größen Λ eliminiert werden kann. Lösen der Extremalgleichung liefert nun den Wert des Grundzustands Φ_c und man erfährt ob eine Symmetrie spontan gebrochen wird. Wenn eine endliche Anzahl renormierter Größen genügt, nennt man die Theorie renormierbar. Dies ist bei der oben behandelten Φ^4-Theorie möglich. Man kommt hierüber zu einer mathematischen Beschreibung sogenannter Tachyonenfelder, die die spontane Erzeugung von Bosonen und ihrer Antiteilchen möglich machen.