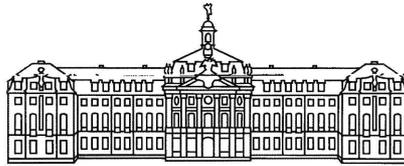


Das inflationäre Universum

Simon Papenkort

31. Januar 2007



Inhaltsverzeichnis

1	Schwächen der Standardkosmologie	3
1.1	Das Horizontproblem	3
1.2	Inhomogenität auf kurzen Skalen	5
1.3	Das Flachheitsproblem	5
1.4	Ungewollte Überbleibsel	6
2	Die Inflationstheorie	7
2.1	Vakuumenergie	7
2.2	GUT und Spontane Symmetriebrechung	7
2.3	Auswirkung der Inflation auf das Standardmodell	10
3	Skalarfelddynamik	11
3.1	slow-roll	12
3.2	Oszillation	12
3.3	Abschätzung der Inflationsdauer	13
4	Dichtefluktuationen	14
5	Spezielle Inflationsmodelle	14
5.1	Coleman-Weinberg-Potential	15
5.2	Supersymmetrie	15
5.3	Chaotische Inflation	15
5.4	Forderungen an mögliche Modelle	16
6	Literatur	17

Der Erfolg des Standard-Urknall-Modells ist vergleichbar mit dem des Standardmodells der Elementarteilchenphysik. Die Urknall-Theorie beschreibt zuverlässig und überprüfbar die Entwicklung des Universums von mindestens dem Zeitpunkt der Entstehung der leichten Elemente zur Zeit $t \simeq 10^{-2}$ bis 10^2 s bis heute. Trotz dieses Erfolges bleiben noch einige Fragen offen, welche auf eine größere übergeordnete Theorie weisen. Diese Fragen sind keine Unstimmigkeiten innerhalb des Urknall-Modells, sondern sie lassen sich vielmehr erst dank der Urknall-Theorie stellen, können aber innerhalb des Modells nicht beantwortet werden. Das kosmologische Rätsel beinhaltet einige sehr fundamentale Fakten, welche das Modell unterbringen, deren Ursprung es jedoch nicht erklären kann.

Das Modell vom inflationärem Universum, welches in seiner ersten Version 1980 von Alan H. Guth vorgeschlagen wurde und in den folgenden Jahren von verschiedenen Physikern überarbeitet wurde, ist eine Modifikation der klassischen Urknall-Theorie. Durch das Einführen einer vakuumdominierten Phase für das sehr frühe Universum ($t \simeq 10^{-34}$ s), welche in eine exponentielle Expansion des Raumes resultiert, lassen sich einige der offenen Fragen beantworten.

Im folgenden soll zunächst die Erweiterung des Standard-Urknall-Modells motiviert und anschließend die Inflationstheorie erarbeitet werden.

1 Schwächen der Standardkosmologie

1.1 Das Horizontproblem

Die Robertson-Walker-Metrik beschreibt einen homogenen und isotropen Raum, aber die Frage bleibt: Warum ist der Raum homogen und isotrop? Albert Einsteins Gleichungen lassen Inhomogenität und Anisotropie zu, die Robertson-Walker-Metrik ist ein Spezialfall der allgemeinen Lösung. Den genauesten Hinweis für die Homogenität liefert die Messung der kosmischen Hintergrundstrahlung CMBR (Cosmic Microwave Background Radiation) durch den Satelliten WMAP (2003). Die CMBR ist die beste Realisierung einer Planckschen Schwarzkörperstrahlung von $T = 2.73$ K mit Schwankungen von $\Delta T = 18 \mu\text{K}$. Wäre das Universum sehr inhomogen oder seine Expansion anisotrop, müsste die Hintergrundstrahlung (siehe Abbildung 1 [1]), die das Universum zum Zeitpunkt der Strahlungsentkopplung zeigt, eine vergleichbare Anisotropie aufweisen.

Wenn das gesamte Universum zu diesem Zeitpunkt in kausalem Zusammenhang gestanden hätte, könnte man sich vorstellen, dass durch mikrophysikalische Effekte, wie z.B. die Comptonstreuung, vorhandene Temperaturfluktuationen beseitigt worden wären. Dies ist jedoch aufgrund des Teilchenhorizontes im Rahmen der Standardtheorie keine gültige Erklärung. Der Teilchenhorizont bezeichnet die Entfernung, die ein Teilchen maximal (also mit Lichtgeschwindigkeit) zurückgelegt haben kann, und ist die Grenze für kausale Prozesse. Da sich die Entropie bei der Expansion des Universums in einem mitbewegtem Volumen nicht ändert (Adiabazität), eignet sie sich zur Parametrisierung von Volumen.

¹http://www.gsfc.nasa.gov/gsfc/spacesci/pictures/2003/0206mapresults/Full_m.jpg

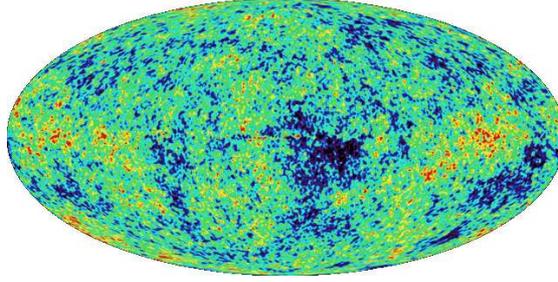


Abbildung 1: CMBR aufgenommen mit WMAP

Die Entropie des Horizontvolumens beträgt heute

$$S^{\text{Hor}}(\text{heute}) \approx 10^{88} \quad (1)$$

und ist viel größer als zu dem Zeitpunkt der Entkopplung von Strahlung und Materie

$$S^{\text{Hor}}(\text{CMBR}) \approx 10^{83} \quad (2)$$

Hieraus lässt sich abschätzen, dass das heute beobachtbare Universum aus

$$\frac{S^{\text{Hor}}(\text{heute})}{S^{\text{Hor}}(\text{CMBR})} \approx 10^5 \quad (3)$$

kausal unverbundenen Regionen entwickelt haben muss. Darüber hinaus betrug die Entropie im Horizontvolumen zur Zeit der Nukleosynthese $S^{\text{Hor}}(t_{\text{nucleo}}) \simeq 10^{63}$, also 10^{-25} des heutigen Hubble-Volumens. Trotzdem scheint die Entstehung der leichten Elemente in allen 10^{25} kausal unabhängigen Regionen annähernd gleich verlaufen zu sein. Eine Erklärung der Homogenität durch kausale Prozesse ist im Standardmodell somit nicht möglich.

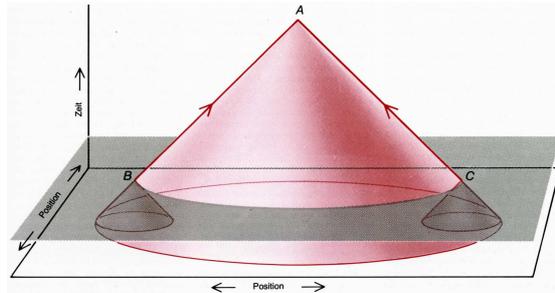


Abbildung 2: Horizontproblem

Abbildung 2 [2] verdeutlicht dies anschaulich: In dem Raum-Zeit-Diagramm wurden die Skalen nichtlinear aufgetragen, so dass Lichtsignale gegenüber der vertikalen Achse

²A. H. Guth, P. J. Steinhardt, *Das Inflationäre Universum*, in: Kosmologie und Teilchenphysik, Heidelberg: Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft (1990)

um 45° geneigt sind. Da keine Informationen mit Überlichtgeschwindigkeit übertragen werden können, lassen sich Signale nur aus dem gefärbten Bereich empfangen, dem *Rückwärtslichtkegel*. Ereignisse außerhalb des Kegels eines Punktes können keinen kausalen Einfluss auf diesen Punkt haben. Die graue horizontale Ebene zeigt den Zeitpunkt der Materie- und Strahlungsentkopplung. Die Strahlung, die uns heute aus entgegengesetzten Richtungen erreicht, wurde an zwei gegenüberliegenden Schnittpunkten B, C des Kegelerandes mit der Entkopplungsebene emittiert und bewegt sich seitdem auf uns in Punkt A zu. Da sich aber die zwei Rückwärtslichtkegel der Punkte B, C nirgendwo schneiden, waren die Punkte nie demselben Einfluss ausgesetzt.

Im Rahmen des Standardurknallmodells lässt sich die über weite Bereiche festgestellte Homogenität der Temperatur zwar in den Anfangsbedingungen des Universums postulieren, aber nicht aus dem Modell heraus erklären. Dies bezeichnet man als das Horizontproblem.

1.2 Inhomogenität auf kurzen Skalen

Trotz der Homogenität des Universums auf großen Längenskalen, existieren natürlich Unmengen von Inhomogenitäten auf kleineren: Sterne, Galaxien, Cluster und Supercluster, deren Größen von unter 1 Mpc bis zu 100 Mpc (und vielleicht größer) reichen. Die Standardkosmologie liefert einen schönen Rahmen zum Verständnis der Vielfalt dieser Strukturen. Sobald das Universum materiedominiert wird, wachsen kleine Inhomogenitäten mittels der Jeans (oder Gravitations-) Instabilität. Da die Photonen nicht an den Gravitationskollaps teilgenommen haben, der zur Strukturbildung führte, lassen sich über die CMBR noch heute die Dichtefluktuationen beobachten. Es bleibt jedoch die Frage nach dem Ursprung dieser Inhomogenitäten.

Bei einer Fourierentwicklung der Dichtehomogenitäten stellt man fest, dass die für die Entstehung von Strukturen relevanten Moden außerhalb des Horizontabstandes liegen (siehe auch Abbildung 7 ^[3]). Wenn man also davon ausgeht, dass mikrophysikalische kausale Prozesse während sehr früher Zeiten für die Entstehung von Dichteschwankungen verantwortlich sind, so verbietet in der Standardkosmologie der Teilchenhorizont Inhomogenitäten in der gewünschten Größenordnung.

1.3 Das Flachheitsproblem

Ein weiteres Problem des Standard-Urknall-Modells besteht in der Energiedichte des Universums. Nach der Allgemeinen Relativitätstheorie ist es möglich, dass der Raum des Universums gekrümmt ist, wobei die Krümmung von der Energiedichte abhängt. Überschreitet die Energiedichte einen kritischen Wert, der von der Expansionsrate abhängt, ist der Raum so gekrümmt, dass er ein endliches Volumen ohne Begrenzung bildet, vergleichbar mit der 2-dimensionalen Oberfläche einer Kugel. Man spricht in diesem Fall von einem *geschlossenen* Universum.

Ist hingegen die Energiedichte kleiner als der kritische Wert, so ist der Raum zwar gekrümmt, das eingeschlossene Volumen aber unbegrenzt. Das Universum ist *offen*.

³E.W. Kolb, M.S. Turner: *The Early Universe*, Addison Wesley, 1991

Für den Fall, dass die Energiedichte gerade den kritischen Wert annimmt, so ist das Universum *flach*, d.h. der Raum ist nicht gekrümmt und das Volumen unendlich (siehe auch Tabelle 1 [4]).

Modell des Universums	Ω	räumliche Geometrie	Volumen	zeitliche Entwicklung
geschlossen	> 1	positive Krümmung (spärisch)	endlich	dehnt sich aus und kollabiert wieder
offen	< 1	negative Krümmung (hyperbolisch)	unendlich	expandiert für immer
flach	1	keine Krümmung (euklidisch)	unendlich	expandiert für immer, aber Expansionsrate nähert sich Null

Tabelle 1: Die möglichen Geometrien des Universums

Die heutigen Beobachtungsdaten lassen vermuten, dass Ω sehr nahe bei 1 liegt. Dies ist noch nicht sonderlich bemerkenswert. Berücksichtigt man aber, dass sich Ω nach

$$\Omega(t) = \frac{1}{1-x(t)}$$

mit $x(t) = \frac{k/R^2}{8\pi G\rho/3}$ (4)

zeitlich entwickelt, bedeutet dies, dass Ω für frühere Zeiten deutlich näher an 1 gelegen haben muss. Explizit erhält man:

$$\begin{aligned} |\Omega(10^{-43}\text{s}) - 1| &\lesssim \mathcal{O}(10^{-60}) \\ |\Omega(1\text{s}) - 1| &\lesssim \mathcal{O}(10^{-16}) \end{aligned} \quad (5)$$

Natürlich spricht physikalisch nichts gegen solche Anfangsbedingungen, doch sie sind sehr speziell. Bereits für leicht andere Anfangsbedingungen wäre das Universum in wenigen Planckzeiten ($t_{\text{pl}} \approx 5,4 \cdot 10^{-44}\text{s}$) rekollabiert (*Big Crunch*), oder hätte bereits nach $t \approx 10^{-11}\text{s}$ eine Temperatur von 3K erreicht (*Wärmethode*).

1.4 Ungewollte Überbleibsel

Im Rahmen der vereinheitlichten Eichtheorien treten eine Vielzahl von stabilen und superschweren Teilchenarten auf, welche im frühen Universum entstanden sein und aufgrund ihres geringen Annihilationsquerschnitts einen zu großen Anteil zur heutigen Energiedichte liefern müssten. Das bedeutenste Beispiel sind die magnetischen Monopole. Die Standard-Kosmologie liefert keine Erklärung zum Verschwinden dieser Teilchen.

⁴A. H. Guth, P. J. Steinhardt, *Das Inflationäre Universum*, in: Kosmologie und Teilchenphysik, Heidelberg: Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft (1990)

All diese Punkte stehen natürlich nicht im Widerspruch zum Standard-Urknall-Modell, doch gibt die Notwendigkeit der sehr speziellen Wahl der Anfangsbedingungen Grund zu der Annahme, dass eine Theorie außerhalb dieses Modell existieren sollte. Die Inflationstheorie ist ein solcher Ansatz.

2 Die Inflationstheorie

Wir wollen nun zeigen, dass durch das Einführen einer vakuumdominierten Epoche in der Frühphase des Universums im Sinne des inflationären Modells sich eben diese Probleme erklären lassen. Das Volumen des beobachtbaren Universums findet in diesem Modell ohne weiteres in einem einzelnen Horizontvolumen Platz, und ermöglicht somit eine kausale Erklärung der beschriebenen Phänomene, ohne dass die Theorie sensibel auf Änderungen der Anfangsbedingungen zu reagiert.

2.1 Vakuumenergie

Die allgemeinste Form der kovarianten Einstein'schen Gleichungen beinhaltet die berühmte Kosmologische Konstante Λ :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (6)$$

Der kosmologische Term lässt sich als Beitrag eines Spannungsenergie-Tensors, der durch eine konstante Energiedichte und einem isotropen Druck charakterisiert ist, zu dem Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ auffassen, und lässt sich mit der Vakuumenergie identifizieren. Wir erhalten:

$$T_{\text{Vak}}^{\mu\nu} = \frac{\Lambda}{8\pi G}g^{\mu\nu} \Rightarrow \begin{aligned} \rho_{\text{Vak}} &= \frac{\Lambda}{8\pi G} \\ p_{\text{Vak}} &= -\frac{\Lambda}{8\pi G} \end{aligned} \quad (7)$$

Die vakuumenergiedominierte Lösung der Friedmanngleichungen (*de Sitter Lösung*) liefert folgendes interessantes Ergebnis:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{Vak}} &= \text{konstant} \\ H &= (8\pi G\rho_{\text{Vak}}/3)^{\frac{1}{2}} = \text{konstant} \\ R(t) &\propto \exp(Ht). \end{aligned} \quad (8)$$

Die Expansion verlangsamt sich also nicht, sondern beschleunigt mit der Zeit.

2.2 GUT und Spontane Symmetriebrechung

Die Inflationstheorie wird zwar mittlerweile als eigenständiges Konzept verstanden, aber es spricht viel dafür, sie in Verbindung mit der Spontanen Symmetriebrechung (Spontaneous Symmetry Breaking: SSB) und einer Grand Unification Theory (GUT) zu diskutieren. Deshalb zunächst eine sehr kurze und eher anschaulich gemeinte Einführung:

Die Grundidee einer GUT ist, die elektroschwache Wechselwirkung mit der starken Wechselwirkung zu verbinden. Hierzu wird eine Symmetrie angenommen, die die Teilkräfte miteinander verbindet. Da die Kräfte aber mit stark unterschiedlicher Stärke und Eigenschaften auftreten, ist die Theorie so aufgebaut, dass die Symmetrie spontan gebrochen wurde. Dies lässt sich anschaulich mit einer rotationssymmetrischen Flüssigkeit vergleichen, deren Atome sich beim Ausfrieren parallel zu den kristallographischen Achsen orientieren und somit die Symmetrie brechen. Diese SSB sagen die GUT bei einer Temperatur von etwa $T_{\text{krit}} \approx 10^{27}\text{K} \approx 10^{14}\text{GeV}$ voraus. Bemerkenswerterweise ist die Baryonenzahlerhaltung innerhalb einer GUT keine strenge Erhaltungsgröße, sondern nur als gute Näherung für tiefe Temperaturen erfüllt, und die Asymmetrie zwischen Materie und Antimaterie lässt sich durch Wechselwirkungen zwischen Elementarteilchen unmittelbar unterhalb der kritischen Temperatur des Phasenübergangs erklären.

Innerhalb einer GUT wird die spontane Symmetriebrechung durch das Einführen von einem Satz von Skalarfeldern (Higgsfeldern) realisiert. Die Symmetrie ist nur solange erhalten, wie alle Felder den Wert Null haben und wird spontan gebrochen, wenn das zugehörige Feld ϕ einen Wert ungleich Null annimmt. Bei Temperaturen oberhalb der kritischen Temperatur wird der Gleichgewichtswert des Feldes auf Null heruntergedrückt und die Symmetrie wiederhergestellt. Dieser Phasenübergang von der $SU(5)$ symmetrischen zur $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ symmetriegebrochenen Phase kann für ein Coleman-Weinberg-Modell (strahlungsinduzierte SSB) verstanden werden, indem man die Form des effektiven Potentials als eine Funktion des Skalarfeldes für verschiedene Temperaturen untersucht:

Bei Temperaturen oberhalb der kritischen Temperatur befindet sich die symmetrische Phase ($\phi = 0$) im globalen stabilen Minimum des effektiven Potentials. Für $T = T_{\text{krit}}$ haben die symmetrische und symmetriegebrochene Phase gleiche Energiedichten, die beiden Minima sind entartet. Fällt die Temperatur weiter, wird die symmetrische Phase *metastabil*. Sie hat eine höhere Energiedichte als die stabile symmetriegebrochene Phase, aber ein Potentialwall hindert sie daran instabil zu werden (siehe Abbildung 3 [5]). Es ist hierbei nicht wichtig, ob tatsächlich ein Potentialwall existiert und der Übergang durch Quantentunneln verbunden mit der Entstehung von Blasen mit gebrochener Symmetrie ermöglicht wird, oder der Potentialwall bei einer bestimmten Temperatur verschwindet.

Wie jedes kosmologische Modell macht die Inflation Annahmen über die Anfangsbedingungen des Universums. Diese sind, wie wir noch sehen werden, relativ frei wählbar, es ist jedoch nötig zu fordern, dass es im frühen Universum mindestens eine gasgefüllte Region gab, die heißer als die kritische Temperatur des Phasenübergangs war, sich mit der Zeit ausdehnte und dadurch abkühlte. Das Skalarfeld ϕ befindet sich also jenseits eines möglichen Potentialwalls aber immernoch weit vom Minimum entfernt (siehe Abbildung 4 [6]).

Der Übergang von $\phi = 0$ nach $\phi = \sigma$ findet jedoch nicht instantan statt. Das Feld bewegt sich langsam vom sogenannten falschen Vakuum zum wahren Vakuum hin. Bei diesem Übergang erhält das Universum eine enorme Vakuumenergie, $\rho_{\text{vak}} \simeq V(\phi = 0) \equiv$

⁵A. Albrecht, P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.*, **48**, 17 (1982)

⁶E.W. Kolb, M.S. Turner: *The Early Universe*, Addison Wesley, 1991

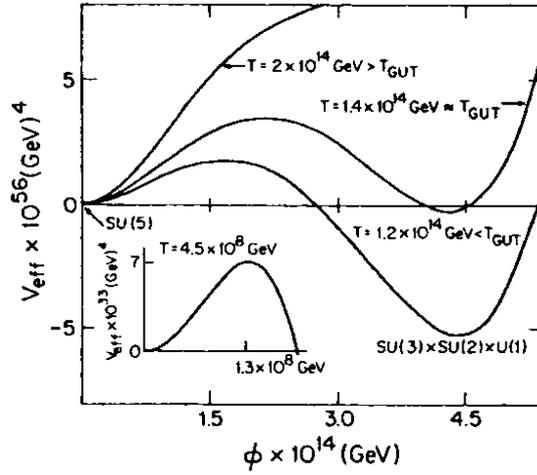


Abbildung 3: Effektives Potential eines CW-Modells als Funktion von ϕ für verschiedene Temperaturen. T_{GUT} ist gleichbedeutend mit T_{krit}

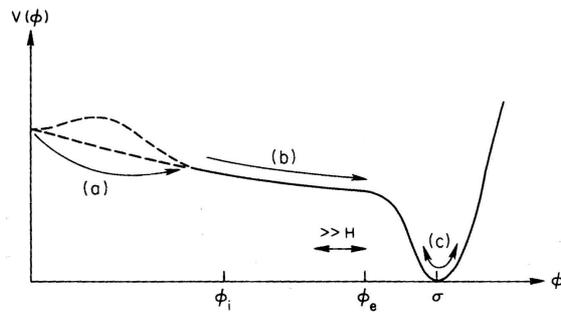


Abbildung 4: Schematische Darstellung eines Inflationspotentials. (a) Quantentunneln, wenn nötig, (b) slow roll, (c) Oszillation um das Minimum

M^4 , und sobald die Temperatur des Universums unter eine Temperatur $T \sim T_{\text{krit}} \simeq M$ gefallen ist, dominiert die Vakuumenergie die Energiedichte des Universum (slow-roll, de Sitter Phase). Im zweiten Teil wird das Potential steiler und die Entwicklung des Feldes beschleunigt sich. ϕ schießt über das Potentialminimum hinaus und fängt an, schnell um den Wert des wahren Vakuums gedämpft zu oszillieren, was nach der QFT einem Zustand hoher Higgs-Teilchendichte entspricht. Diese zerfallen in leichtere Teilchen, die ihrerseits wieder wechselwirken und weiter zerfallen (*reheating*), so dass sich das Universum schnell in ein heißes System von Elementarteilchen im thermodynamischen Gleichgewicht entwickelt - genau der Zustand, der im Standardmodell als Anfangsbedingung gefordert wird. Die im Zuge des Wiederaufheizens erreichte Temperatur unterscheidet sich kaum von der kritischen Temperatur, womit sich die Baryogenese erklären lässt.

2.3 Auswirkung der Inflation auf das Standardmodell

Wir wollen nun das Inflationsmodell durch konkrete Rechnung verdeutlichen. Der oben eingeführte Parameter M zur Berechnung der Vakuumenergie sei $M = 10^{14}\text{GeV}$, was sich durch die vereinheitlichten Theorien motivieren lässt. Wir nehmen an, dass der Phasenübergang $\Delta t = 100H^{-1}$ (Hubblezeiten) benötige und erhalten für den Skalenfaktor durch Ausnutzen der Gleichungen (8):

$$\frac{R(t_i + \Delta t)}{R(t_i)} = e^{H \Delta t} = e^{100} \simeq 3 \cdot 10^{43} \quad (9)$$

Betrachtet man nun ein Horizontvolumen der Größe $R = H^{-1} = 10^{-23}\text{cm}$. Die Entropie in diesem Bereich beträgt $S_i \simeq T_{\text{krit}}^3 (H^{-1})^3 \simeq 10^{14}$, also viel weniger als unser heutiges Hubblevolumen. Während der exponentiellen Expansion unterkühlt das Volumen, $T \propto e^{-Ht}$, und die Entropie bleibt konstant. Der entscheidende Schritt geschieht beim Wiederaufheizen auf die Temperatur $T_{\text{RH}} = T_{\text{krit}}$: Die Entropie steigt auf den Wert $S_f \simeq e^{3H\Delta t} T_{\text{RH}}^3 (H^{-1})^3 \simeq 10^{144}$. Der höchst unadiabatische Wiederaufheizungsprozess erhöht die Entropie des inflationären Bereiches um das 10^{130} -fache und löst damit gleich drei der vier angesprochenen kosmologischen Probleme:

- Das heute beobachtbare Universum war zu dem Zeitpunkt als das Universum eine Temperatur von 10^{14}GeV hatte, eine Größe von nur 30cm und findet 10^{56} -mal Platz in dem oben betrachteten Horizontvolumen. Die Quellen der CMBR waren also vor der Inflation eng benachbart und hatten genug Zeit um dieselbe Temperatur zu erreichen.
- Während der Inflation blieb die Energiedichte des Universums konstant, während der Krümmungsradius exponentiell anwuchs. Das heißt die Abweichung x von 1 aus Gleichung (4), $x(t) = (k/R^2)/(8\pi G\rho/3)$, wird durch die Inflation um den Faktor $\exp(200)$ reduziert. Der Radius des heutigen Universums ist also viel größer als der Hubble-Radius, und Ω_0 liegt exponentiell nahe an 1 (siehe Abbildung 5 [7]).

⁷A. H. Guth, P. J. Steinhardt, *Das Inflationäre Universum*, in: Kosmologie und Teilchenphysik, Heidelberg: Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft (1990)

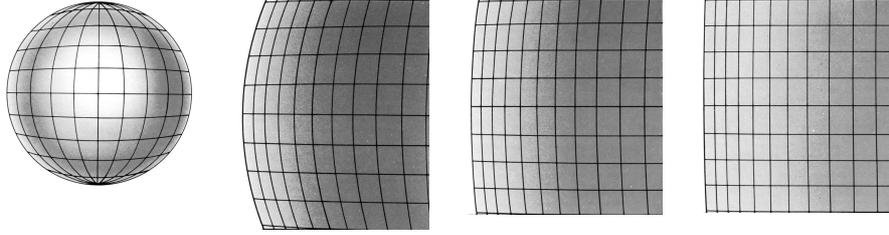


Abbildung 5: In jedem Koordinatensystem wird die Kugel um den Faktor 3 aufgebläht und gleichzeitig die Gitterlinienanzahl erhöht

- Drittens löst die Entropieerhöhung auch das Problem der ungewollten Überbleibsel, deren Dichte genauso exponentiell gedämpft werden, so dass ihre Häufigkeit nicht mehr im Widerspruch zur beobachteten stehen. Natürlich verschwinden auch alle anderen Teilchen. Das bedeutet die Teilchenproduktion und Baryogenese müssen postinflationäre Prozesse sein.

Bisher konnten wir noch nicht die Inhomogenität des Universums auf kleinen Längenskalen im Inflationsmodell unterbringen. Wir werden jedoch noch später zeigen, dass sie sich aus Quantenfluktuationen des Skalarfeldes ϕ folgern lassen. Ein Problem bleibt aber auch weiterhin ungelöst: Die kosmologische Konstante.

3 Skalarfelddynamik

Wie wir gesehen haben, ist die Inflation Konsequenz der dynamischen Entwicklung eines schwach gekoppelten Skalarfeldes, das zu einem Zeitpunkt vom Potentialminimum ausgelenkt war. Aus diesem Grund werden wir uns jetzt zum besseren Verständnis diese Skalarfelddynamik genauer anschauen.

Wir betrachten ein schwach gekoppeltes homogenes Skalarfeld, für das ein Potential $V(\phi)$ mit einem Minimum bei $\sigma \neq 0$ existiert, vor dem Hintergrund der Robertson-Walker-Raumzeit. Das Potential soll ferner einen flachen Bereich haben, um die Möglichkeit für die slow-roll Phase bieten zu können, und der Anfangswert des Feldes ϕ_i sei ungleich σ (vgl. Abbildung 4). Wir vernachlässigen zunächst die Quantenfluktuationen und führen sie später als kleine Korrekturen ein. Die Lagrange-Dichte ist dann gegeben als:

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi / 2 - V(\phi) = \dot{\phi}^2 / 2 - V(\phi) \quad (10)$$

Aus dieser lässt sich dann die Energiedichte und Druck berechnen:

$$\begin{aligned} \rho_\phi &= \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \left[+ \frac{(\nabla\phi)^2}{2R^2} \right] \\ p_\phi &= \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \left[- \frac{(\nabla\phi)^2}{6R^2} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

Da räumliche Ableitungen aufgrund der geforderten Homogenität wegfallen, lässt sich hieraus folgende Bewegungsgleichung herleiten:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \Gamma_\phi\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (12)$$

Der Term $3H\dot{\phi}$ resultiert aus der Expansion des Universums und beschreibt die Rotverschiebung des Feldimpulses $\dot{\phi}$. Wie bereits zuvor erwähnt, entspricht die Oszillation des Feldes um das Minimum einem Kondensat von impulslosen ϕ -Teilchen mit der Masse $m_\phi = V''(\sigma)$. Diese zerfallen in leichtere Teilchen, mit denen sie koppeln, und führen zum Wiederaufheizen des Universums. Γ_ϕ ist nichts anderes als die Zerfallsbreite. Diese Bewegungsgleichung entspricht genau der eines Balles, der reibungsbehaftet in ein Tal rollt.

3.1 slow-roll

Für die reibungsdominierte slow-roll Phase ist $\ddot{\phi}$ vernachlässigbar und der für die Entstehung von Teilchen verantwortliche Term $\Gamma_\phi\dot{\phi}$ ist noch nicht aktiv. Die Bewegungsgleichung reduziert sich zu:

$$3H\dot{\phi} = -V'(\phi) \quad (13)$$

Dies bedeutet im Bild des Balles, dass die Beschleunigung durch den Abfall des Potentials und die Reibung durch die Expansion sich ausgleichen. Die Vernachlässigung von $\ddot{\phi}$ erfordert folgende Konsistenzbedingungen:

$$\begin{aligned} |V''(\phi)| &\ll 9H^2 \simeq 24\pi V(\phi)/m_{\text{Pl}}^2 \\ |V'(\phi)m_{\text{Pl}}/V(\phi)| &\ll (48\pi)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (14)$$

Die erste Gleichung entspricht der Forderung $(\ddot{\phi}) \ll 1$, die zweite garantiert die Vernachlässigbarkeit der kinetischen Energie gegenüber dem Potential.

Mit Gleichung (13), (14), und $dt = d\phi/\dot{\phi}$ lässt sich nun die Anzahl der e -Faltungen im Skalenfaktor berechnen, während ϕ von ϕ_1 nach ϕ_2 rollt:

$$\ln(R_2/R_1) \equiv N(\phi_1 \rightarrow \phi_2) \equiv \int_{t_1}^{t_2} H dt = -\frac{8\pi}{m_{\text{Pl}}^2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{V(\phi)}{V'(\phi)} d\phi \quad (15)$$

3.2 Oszillation

Sobald ϕ das Minimum erreicht hat, beginnt es um dieses mit der Frequenz $\omega^2 = V''(\sigma)$ zu oszillieren. Wir müssen deshalb die vollständige Bewegungsgleichung (12) berücksichtigen, und schreiben sie unter Verwendung von Gleichung (11) um, indem wir sie mit $\dot{\phi}$ multiplizieren:

$$\dot{\rho}_\phi + 3H\dot{\phi}^2 + \Gamma_\phi\dot{\phi}^2 = 0 \quad (16)$$

Da ϕ sehr schnell um σ schwingt, oszilliert $\dot{\phi}^2$ sinusartig und kann durch seinen Mittelwert über eine Schwingungsperiode ersetzt werden:

$$\langle \dot{\phi}^2 \rangle_{\text{cycle}} = \rho_\phi \quad (17)$$

Wir erhalten folgende Gleichung für die Entwicklung von ρ :

$$\dot{\rho}_\phi + (3H + \Gamma_\phi) \rho_\phi = 0 \quad (18)$$

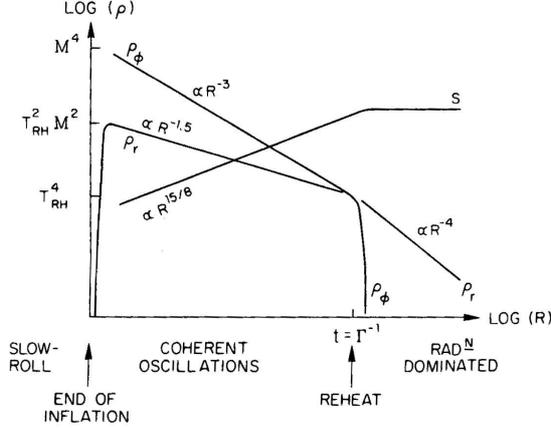


Abbildung 6: Entwicklung von ρ_ϕ , ρ_r und der Entropie während der Wiederaufheizphase und nach der exponentiellen Expansion

Dies entspricht einer Zerfallsgleichung von massiven Teilchen. Abbildung 6 [8] zeigt die Lösung dieser Gleichung. Wichtig ist, dass das Universum wieder in eine strahlungsdominierte Phase übergeht, in der die Entropie des mitbewegten Volumens konstant bleibt. Bei genauer Rechnung stellt man außerdem interessanterweise fest, dass die Wiederaufheiztemperatur T_{RH} nicht von der Anfangsvakuumenergie abhängt, sondern durch die Zerfallsbreite Γ_ϕ bestimmt wird. Üblicherweise ist $T_{RH} < M$, da während der Oszillationsphase viel der ursprünglichen Vakuumenergie (mit dem Faktor M^4/T_{RH}^4) rotverschoben wird. Ist jedoch die Zerfallsbreite sehr groß, d.h. die ϕ -Teilchen zerfallen in weniger als eine Hubblezeit und es gibt keine ϕ -dominante Epoche, wird die Vakuumenergie annähernd vollständig umgesetzt: $T_{RH} \sim M$.

3.3 Abschätzung der Inflationsdauer

Aus dem Horizontproblem lässt sich eine untere Grenze für die Inflationsdauer abschätzen. Wir betrachten wieder ein Anfangsvolumen, das durch den Hubble radius gegeben ist, und wissen, dass sich die Entropie sich während der Inflations- und der Wiederaufheizungsphase auf etwa 10^{88} vergrößern muss.

$$S_f \simeq e^{3N(\phi_i - \phi_f)} \frac{m_{Pl}^3}{M^2 T_{RH}}$$

$$N(\phi_i - \phi_f) \gtrsim N_{\min} = 53 + \frac{2}{3} \ln \left(\frac{M}{10^{14} \text{GeV}} \right) + \frac{1}{3} \ln \left(\frac{T_{RH}}{10^{10} \text{GeV}} \right) \quad (19)$$

⁸E.W. Kolb, M.S. Turner: *The Early Universe*, Addison Wesley, 1991

Die Parameter M und T_{RH} sind modellabhängig. Variiert man aber diese aber zwischen 1GeV und 10^{19}GeV , ändert sich N_{\min} nur zwischen 24 und 68.

4 Dichtefluktuationen

Um auch die Dichteinhomogenitäten mit der Inflationstheorie erklären zu können, können wir ϕ nicht länger als klassisches und homogenes Skalarfeld betrachten, sondern müssen Quantenfluktuationen als Korrekturterm mit einbeziehen. Wie bereits erwähnt, werden Dichtefluktuationen mittels einer Fourierentwicklung beschrieben. Die Entwicklung dieser Moden wird in Abbildung 7 [9] gezeigt.

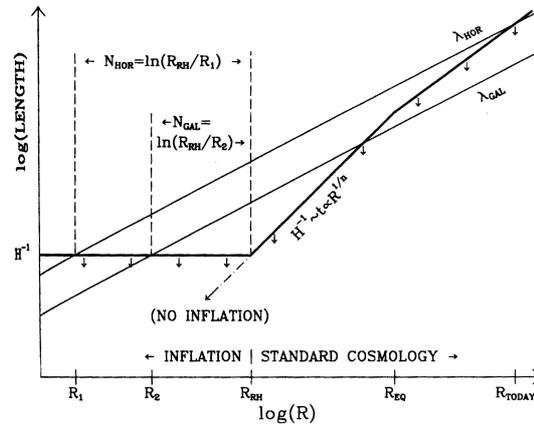


Abbildung 7: Entwicklung der Dichtefluktuationen und des Hubblehorizontes

Die dick gezeichnete Linie mit den Pfeilen beschreibt den Verlauf des Horizontabstandes. Unterhalb der Linie können kausale Prozesse stattfinden. Die Quantenfluktuationen können im inflationären Modell innerhalb des des Horizontvolumens entstehen, verlassen jedoch dann dieses. Bei diesem als „good bye“ bezeichnetem Prozess frieren die Moden aus und entwickeln sich rein kinematisch. Nach der Inflation treten sie jedoch wieder in das Horizontvolumen als Dichteschwankungen ein („hello again“). Im klassischen Urknallmodell ist dies nicht möglich, da jede Mode nur einmal den Horizontabstand schneidet.

5 Spezielle Inflationsmodelle

Bisher haben wir die Inflation allgemein betrachtet. Hierzu hatten wir einen guten Grund, denn es existiert kein Standardmodell der Inflation, tatsächlich gibt es noch nicht einmal ein völlig zufriedenstellendes Modell. Aber es existieren verschiedene einfache Modelle, die dazu dienen können die Inflation zu diskutieren, genauso wie das $SU(5)$ als einfaches Beispiel dient, wenn vereinigte Eichtheorien besprochen werden.

⁹E.W. Kolb, M.S. Turner: *The Early Universe*, Addison Wesley, 1991

5.1 Coleman-Weinberg-Potential

Das erste Modell für die Inflationstheorie basierte auf eine $SU(5)$ GUT, deren Symmetrie spontan in $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ durch ein 24-dimensionales Higgsfeld gebrochen wird. Das Potential hat eine Coleman-Weinberg Form:

$$V(\phi) = B \frac{\sigma^4}{2} + B\phi^4 \left[\ln \frac{\phi^2}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right] \quad (20)$$

Der Parameter $B = \frac{25}{16} \alpha_{\text{GUT}}^2 \simeq 10^{-3}$ ist durch die Kopplungsstärke $\alpha \simeq \frac{1}{45}$ gegeben. Das CW-Potential ermöglicht eine lange slow-roll Phase und kann die oben angesprochenen Probleme lösen. Es zeigt sich jedoch bei der Ergänzung der Quantenfluktuationen, dass diese sich nicht als kleine Korrekturterme einbinden lassen, sondern von derselben Größenordnung sind wie ϕ selbst und somit ein Abschließen der Inflation verhindern.

Um das Potential dahingehend anzupassen, müsste der Parameter B auf 10^{-15} reduziert werden. Damit würde aber auch die Kopplungsstärke α so stark verkleinert, dass sich nicht mehr mit den GUT vereinbaren lässt.

5.2 Supersymmetrie

Auch in supersymmetrischen Theorien lässt sich die Inflation einbinden. Auf eine genaue Diskussion dieser Theorien wird an dieser Stelle verzichtet, es sei jedoch erwähnt, dass auch hier Probleme auftreten. Während der Wiederaufheizphase entstehen Gravitinos, die supersymmetrischen Partner der Gravitonen. Bei genauer Betrachtung haben diese Gravitinos Einfluss auf die Elementhäufigkeiten im Universum. Da diese aber bereits mit dem Standardurknallmodell vorhergesagten Werte sehr genau übereinstimmen, sollten sie nicht von der Inflation geändert werden.

5.3 Chaotische Inflation

Als letztes Beispiel sei die Chaotische Inflation genannt. Diese Modell nach Linde führt ein Skalarfeld ohne Bezug auf eine vereinheitlichte Theorie, sondern nur zum Zwecke der Inflation, ein und sein Potential ist dadurch erfreulich einfach:

$$V(\phi) = \lambda\phi^4 \quad (21)$$

Damit das Potential genügend flach ist, muss $\lambda \simeq 10^{-15}$ sein. Das Potentialminimum ist bei $\phi = 0$, somit hat das Potential nichts mit der spontanen Symmetriebrechung gemeinsam. Die Anfangsverteilung des Feldes ϕ_i muss somit von Null verschieden sein, und soll zufällige Werte für unterschiedliche Raumbereiche des Universums haben (chaotisch). Für eine ausreichende Inflationsdauer muss $\phi_i \gtrsim 4,4m_{\text{Pl}}$ sein.

Wir wollen nun die Größe L einer Region mit konstantem ϕ_i abschätzen, die nötig ist um die Homogenität des Universums erklären zu können. Wir erinnern uns, dass eine Voraussetzung für das Stattfinden von Inflation die Vernachlässigung der räumlichen

Ableitung ist:

$$\begin{aligned}
 (\nabla\phi)^2 &\sim \left(\frac{\phi_i}{L}\right)^2 \ll \lambda\phi_i^4 \\
 &\Rightarrow L \gg 2\frac{\phi_i}{m_{\text{Pl}}}H^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Das heißt, ϕ muss in einem Bereich größer als das Horizontvolumen homogen sein. Dies ist weder sehr chaotisch, noch löst es das Horizontproblem.

5.4 Forderungen an mögliche Modelle

Dank unserer gemachten Erfahrungen mit den verschiedenen Modellen, lassen sich jetzt einige Forderungen an erfolgsversprechende Kandidaten aufstellen:

- Das Skalarfeld muss in einem groß genugem Gebiet homogen sein. $(\nabla\phi)^2 = \mathcal{O}\left[\left(\frac{\phi_i}{L}\right)^2\right] \ll V(\phi_i)$
- Das zugehörige Potential muss einen ausreichend flachen Bereich aufweisen um die slow-roll Phase zu ermöglichen. Desweiteren muss dieser Bereich lang genug sein, um Quantenfluktuationen als kleine Korrekturen einbauen und die Probleme der Homogenität und Inhomogenität lösen zu können.
- Die durch die Inflation produzierten Dichtestörungen dürfen auf großen Längenskalen nicht größer als etwa 10^{-4} sein, um zu vermeiden, dass in der CMBR große Schwankungen entstehen. Gleichzeitig dürfen sie aber auch nicht kleiner 10^{-5} sein, um für die Strukturbildung verantwortlich sein zu können.
- Die Wiederaufheiztemperatur muss hoch genug sein, dass das Universum anschließend strahlungsdominiert ist und ein Anschluss an die Standardurknalltheorie möglich ist. Für die Erklärung der Baryonenasymmetrie ist eine Temperatur nahe der kritischen Temperatur der GUT erforderlich.
- Während der Wiederaufheizphase dürfen keine neue unerwünschten Teilchen entstehen, wie wir es am Beispiel der Gravitinos beobachtet haben.
- Das Inflationsfeld sollte sich vernünftig in ein Teilchenphysikmodell einbinden lassen.

6 Literatur

1. E.W. Kolb, M.S. Turner: *The Early Universe*, Addison Wesley, 1991
2. Ta-Pei Cheng: *Relativity, Gravitation and Cosmology, A Basic Instruction*, Oxford University Press, 2005
3. A. H. Guth, P. J. Steinhardt, *Das Inflationäre Universum*, in: Kosmologie und Teilchenphysik, Heidelberg: Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft (1990)
4. A. Albrecht, P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.*, **48**, 17 (1982)
5. A. Albrecht, P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.*, **48**, 20 (1982)