Symmetrien

1 Einführung

Symmetrien sind Transformationen eines physikalischen Zustandsraumes, die die „Physik“ nicht ändern. Solche Symmetrien sind sehr nützliche Hilfsmittel wenn es darum geht Aussagen über physikalische Systeme zu treffen. Hier stelle ich einige bekannte klassische Symmetrien zusammen und zeige dann, wie dieses Konzept zu Aussagen im quantenmechanischen Mesonenmodell führt.

2 Klassische Symmetrien

Die Transformationen einen Zustandsraumes bilden eine Gruppe (s. Anhang). Dies stellt sicher dass jede Transformation auch wieder rückgängig gemacht werden kann und dass die Möglichkeit besteht den Zustandsraum (durch die Identität) nicht zu transformieren. Je nach Mächtigkeit dieser Gruppe unterscheidet man zwischen diskreten und kontinuierlichen Transformationen. Bei diskreten Transformationen gibt es nur endlich viele Elemente in der Gruppe, bei kontinuierlichen sind es unendlich viele.

2.1 Diskrete Transformationen

- P $x \to -x$ Raumspiegelung
- T $t \to -t$ Zeitumkehr
- C $q \to -q$ Ladungsumkehr

Die Tranformationen oben sind diskrete Transformationen, da sie jeweils selbstinvers sind, also sie zusammen mit der Identität bereits eine Gruppe bilden.
In der Quantenmechanik ist uns die Raumspiegelung im Paritätsoperator schon begegnet. Bei einem Hamiltonoperator mit einem symmetrischen Potential ist die Raumspiegelung eine Symmetrie, was dort dazu führte dass die Eigenzustände des Hamiltonoperators grade oder ungrade Wellenfunktionen hatten.

In der Quantenfeldtheorie lässt sich unter recht allgemeinen Vorraussetzungen zeigen, dass die Kombination CPT in vielen Fällen eine Symmetrie darstellt (CPT-Theorem).

2.2 Kontinuierliche Transformationen

Kontinuierliche Symmetrien sind besonders interessant, da sie immer mit Erhaltungsgrößen des Systems verbunden sind über das Theorem von Noether:
Ist $L(q, \dot{q}, t)$ die Lagrange-Funktion eines physikalischen Systems und lässt eine zusammenhängende Gruppe kontinuierlicher Transformationen die Lagrange-Wirkung

$$S = \int_t 1^{t2} L(q, \dot{q}, t)dt$$

invariant, so existiert eine zeitliche Erhältungsgröße Q des Systems.
Bekannte kontinuierliche Transformationen und die ihnen zugehörigen Erhaltungsgrößen sind zum Beispiel:

•	Ortsverschiebung	$x \to x + a$	erhalten: Impuls
•	Zeitverschiebung	$t \to t + \tau$	erhalten: Energie
•	Drehung D um eine Achse	$x \to Dx$	erhalten: Drehimpuls

3 Die SU(3)-flavor Symmetrie

In diesem Abschnitt werde ich die SU(3)-flavor Symmetrie benutzen, um die leichteren Mesonen nach ihren Massen zu klassifizieren.

3.1 Quarkmodell

Wir treffen bezüglich unseres Modell mehrere Annahmen:

- Mesonen und Baryonen setzen sich aus den Quarks u, d und s zusammen wobei wir uns Mesonen als Bindungszustände eines Quarks und einen Antiquarks, Baryonen als Bindungszustand dreier Quarks vorstellen.
  - Mesonen $\sim q\overline{q}$
  - Baryonen $\sim qqq$
- Die Kräfte zwischen den Quarks sind flavor-unabhängig.
- Die Massen der drei Quarks sind identisch.

Unter diesen Vorraussetzungen ist das System invariant gegenüber „Drehungen“ der Quarks ineinander. Zum Beispiel ließen sich die Zustände $u\overline{d}$ und $u\overline{s}$ oder uuu und ddd nicht unterscheiden.
Das führt dazu, dass diese Vertauschungen mit dem Hamilton-Operator des Systems kommutieren.

3.2 Die $SU(3)$

Wir müssen nun analog zu den Überlegungen in Sektion 1 eine Gruppe finden, die die oben angedeuteten Vertauschungen der Quarks beschreibt. Wenn wir den Zustandsraum dafür 3-dimensional mit Basisvektoren u, d und s darstellen sind unsere Transformationen grade Drehungen der Zustände. Drehungen werden aber mathematisch durch eine Gruppe von Matrizen mit speziellen Eigenschaften beschrieben, und zwar die $SU(3)$, die Gruppe der unitären 3×3 Matrizen über $\mathbb{C}$ mit Determinante 1:

- $SU(3) \subset M_{3\times3}(\mathbb{C})$
- $U \in SU(3) \ \Rightarrow U^\dagger U = E$
- $U \in SU(3) \ \Rightarrow \det U = 1$

Dabei bezeichne E die Einheitsmatrix.
Eine im folgenden nützliche Beschreibung der $SU(3)$ geht über eine andere Menge von Matrizen, die $su(3)$. Und zwar existiert für jede Matrix U in der $SU(3)$ eine Matrix u in der $su(3)$ mit

$$U = \exp\{i\alpha u\},$$

wobei hier wie üblich die auf Matrizen angewandte Exponentialfunktion über ihre Potenzreihe definiert ist.
An Hand dieser Formel kann man sich überlegen, welche Eigenschaften die Matrizen der $su(3)$ haben müssen, und man sieht leicht, dass:

- $su(3) \subset M_{3\times3}(\mathbb{C})$
- $u \in su(3) \ \Rightarrow u^\dagger = u$
- $u \in su(3) \ \Rightarrow Tr u = 0$

Die $su(3)$ ist eine 8-dimensionale Algebra; erzeugende Matrizen sind zum Beispiel die Gell-Mann-Matrizen λ_j.

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Mit diesen Definitionen lässt sich dann jede Matrix U aus der $SU(3)$ schreiben als

$$U = \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{8} \alpha_j \frac{\lambda_j}{2} \right\};$$

die Gell-Mann-Matrizen heissen „erzeugende Operatoren“ der $SU(3)$.

3.3 Darstellungen

Wir haben jetzt also eine mathematische Beschreibung unserer Flavor-Invarianz gefunden. Leider hat diese noch das Problem, dass sich die Dreh-Matrizen, die wir zur Beschreibung herangezogen haben, sich nur auf einen 3-dimensionalen Zustandsraum anwenden lassen; wir müssen also einen Weg finden, die gefundene Struktur auf andere Onjekte zu übertragen. Das Hilfsmittel der Wahl sind hier Darstellungen.
Wenn wir also einen n-dimensionalen komplexen Zustandsraum V gegeben habe, dann ist eine Darstellung D der $SU(3)$ ein Gruppenhomomorphismus

$$SU(3) \xrightarrow{D} M_{n\times n}(\mathbb{C}),$$

für den gilt $(D(U))^\dagger D(U) = E$. Dabei transfomieren die Elemente der $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ unseren Zustandsraum V; wir interpretieren also jedes Element der $SU(3)$ als eine Transformation, so dass die Eigenschaft der $SU(3)$, Drehungen zu beschreiben gewahrt bleibt.

Ähnlich zu den erzeugenden Operatoren der $SU(3)$ definiert man auch erzeugende Operatoren F_j einer Darstellung D über die Gleichung

$$D(\exp\left\{ i\alpha \frac{\lambda_j}{2} \right\} = \exp\{i\alpha F_j\}$$

Einige Beispiele:

Zustandsraum	Darstellung	Name	F_j
	$D(U) = 1$	1-Darstellung	
$\mathbb{C}$	$D(U) = U$	3-Darstellung	$\frac{\lambda_j}{2}$
$\mathbb{C}$	$D(U) = U^*$	3^*-Darstellung	$-\frac{\lambda_j^*}{2}$
spurlose 3×3 Matrizen über $\mathbb{C}$	$D(U) : C \to UCU^\dagger$	8-Darstellung	

Wir wollen nachher aus diesen Darstellungen Schlüsse über die Massenverteilung der Mesonen gewinnen; dafür beenötigen wir noch den Bergiff der Irreduzibilität einer Darstellung.

Gegeben sei ein Zustandsraum V und eine Darstellung D. D heisst nun „reduzibel“, wenn es einen echten Unterraum W von V gibt, so dass $D(W) \subset W$ ist. Eine Darstellung heisst natürlich „irreduzibel“, wenn sie nicht reduzibel ist. Eine irreduzible Darstellung der $SU(3)$ auf einem n-dimensionalen Zustandsraum führt dann, da ja der Hamiltonoperator des Systems Flavor-invariant sein soll, zu einer n-fache Massenentartung.

4 Massenentartung als Folge der $SU(3)$-Flavor-Symmetrie

4.1 Ein-Quark-Zustände

Betrachten wir zunächst nur den 3-dimensionalen Zustandsraum, der von

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Ein-Quark-Zustände aufgespannt wird und lassen darauf die 3-Darstellung der $SU(3)$ wirken.
Nach Vorraussetzung ist das System $SU(3)$-Flavor-Invariant, also

$$\begin{aligned} & [D(U); H] = 0 \\ \Rightarrow\ & [F_j; H] = 0 \\ \Rightarrow\ & \text{den } F_j \text{ entsprechen Quantenzahlen.} \end{aligned}$$

Schaut man sich nun die erzeugenden Operatoren der 3-Darstellung an, also die Gell-Mann-Matrizen, so erkennt man, dass ein Teil dieser Quantenzahlen schon bekannt ist, denn es ist

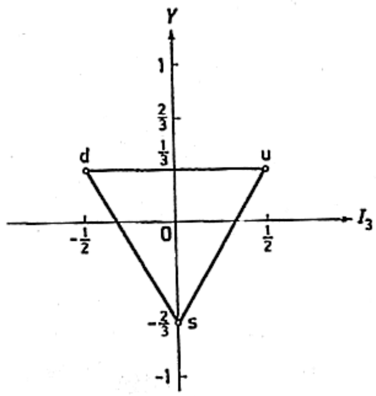
$$F_1 = I_1, F_2 = I_2, F_3 = I_3 \text{ und } \frac{2}{\sqrt{3}} F_8 = Y$$

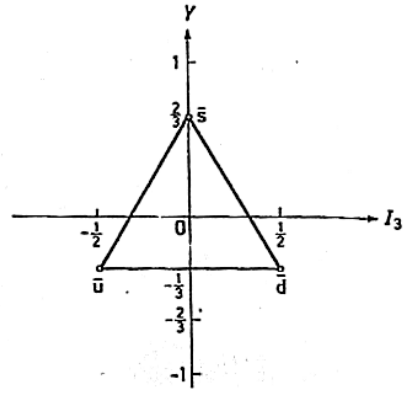
wenn die I_j den Komponenten des Isospins und Y der Hyperladung entsprechen.
So ist zum Beispiel

$$\begin{aligned} F_3 u &= \frac{\lambda_3}{2} u \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} u \end{aligned}$$

wie erwünscht.

Analoges gilt für den aus den Antiquarks aufgespannten Zustandsraum $< \overline{u}, \overline{d}, \overline{s} >$ wenn man die 3^*-Darstellung verwendet.





4.2 Mesonen

Mesonen sind Bindungszustände aus einem Quark und einem Antiquark. Der Zustandsraum V ist hier also $< u, d, s > \otimes < \overline{u}, \overline{d}, \overline{s} >$ und wir aufgespannt von den Zuständen $q_i \otimes \overline{q_j}$ mit $q_i, q_j \in \{u, d, s\}$. Hier ist mir in meinem Vortrag ein grober Schnitzer unterlaufen; dieses Object entspricht tatsächlich dem Tensorprodukt der beiden im vorherigen Abschnitt eingeführten Räumen, nicht, wie behauptet, dem kartesischen Produkt, dass nur die Dimension 6 hätte.
Wir können die $M_{3\times3}(\mathbb{C})$ als Zustandsraum wählen; das $\otimes$ entsprich dann dem diadischen Produkt der Vektoren, zum Beispiel

$$u \otimes \overline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die 3- und die 3^* Darstellung induzieren nun eine Darstellung auf V über

$$D(U)(q_i \otimes \overline{q_j}) = Uq_i \otimes U^* \overline{q_j}.$$

Diese Darstellung nennen wir $3 \otimes 3^*$-Darstellung; sie bechreibt die $SU(3)$-Flavor-Transformationen der Mesonen. Um Schlüsse bezüglicher der Struktur der Mesonen zu bekommen müssen wir diese Darstellung nun auf Irreduzible Komponenten untersuchen.
Zunächst stellen wir fest, dass die $3 \otimes 3^*$-Darstellung selbst nicht irreduzibel ist, denn für

$$\vec{1} = u \otimes \overline{u} + d \otimes \overline{d} + s \otimes \overline{s}$$

lässt sich wenn man die oben angedeutete Matrixdarstellung benutzt leicht nachrechen, dass

$$D(U)(\vec{1}) = \vec{1} \ \ \forall\, U \in SU(3)$$

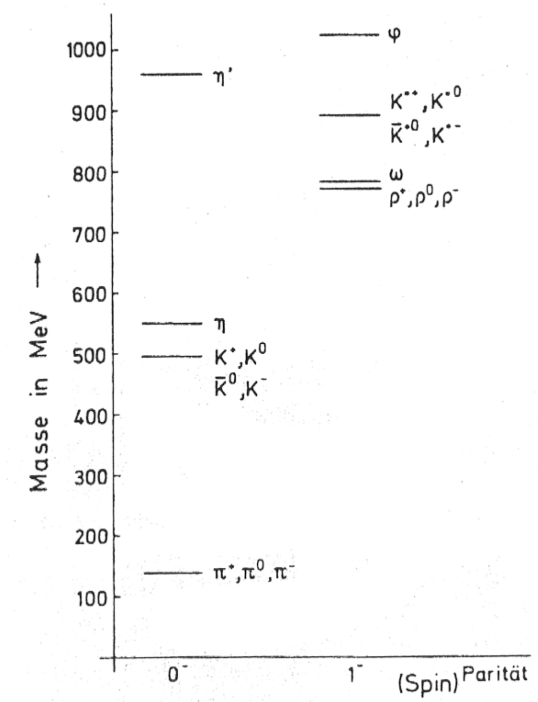
gilt.
Wenn wir nun in V den zu $< \vec{1} >$ orthogonalen Teilraum bestimmen, so findet

sich

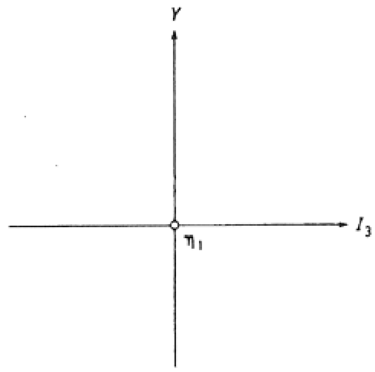
$$
\begin{aligned}
<\vec{1}, C> &= 0 \\
\Rightarrow TrC &= 0
\end{aligned}
$$

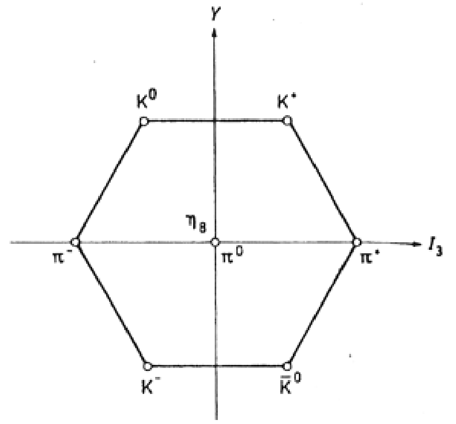
und $D(U)C = UCU^\dagger$. D wirkt hier also wie die irreduzible 8-Darstellung.

Daraus lässt sich also folgern, dass alle Mesonen in Falvor-Singuletts und Flavor-Oktetts auftauchen. Dies lässt sich an den Massen der leichtesten Mesonen auch gut erkennen, wenn auch keine echt Massenentartung auftritt. Das liegt daran, dass die Masse des s-Quarks sich entgegen unseren Annahmen deutlich von den Massen der anderen Quarks unterscheidet.



Die Quantenzahlen Isospin und Hyperladung verhalten sich additiv bei Mehr-Quark-Zuständen. So ergeben sich dann folgende Quantenzahlen für die leichtesten Mesonen:





So lässt sich nun der Quarkgehalt der Mesonen aus diesen Werten bestimmen.

$$\begin{aligned}
\pi^+ &\sim u\bar{d} \\
\pi^0 &\sim \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \\
\pi^- &\sim d\bar{u} \\[1em]
K^+ &\sim u\bar{s} \\
K^0 &\sim d\bar{s} \\[1em]
\bar{K}^0 &\sim s\bar{d} \\
K^- &\sim s\bar{u} \\[1em]
\eta_8 &\sim \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \\
\eta_1 &\sim \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}).
\end{aligned}$$

5 Anhang

Hier stelle ich kurz die Definitionen der im Vortrag benutzten mathematischen Objekte zusammen.

5.1 Gruppen

Eine **Gruppe** G ist eine Menge mit einer Verknüpfung

$$\cdot : G \times G \to G,$$

so dass folgende Axiome erfüllt sind:

- Die Gruppe enthält ein neutrales Element e bezüglich dieser Verknüpfung.

$$e \cdot x = x \cdot e = x \quad \forall x \in G$$

- Zu jedem Element exisiert ein Inverses.

$$\forall x \in G \; \exists x^{-1} \in G \; : x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$$

- Die Verknüpfung ist assoziativ.

Eine lineare Abbildung f zwischen zwei Gruppen, also $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ nennt man „Gruppenhomomorphismus“.

5.2 Algebren

Die Algebren, die hier verwendet werden, lassen sich alle beschreiben als ein Vektorraum V über einem Körper K (in diesem Vortrag ist $K = \mathbb{C}$, auf dem eine zusätzliche interne Multiplikation

$$[\cdot;\cdot] : V \times V \to V$$

definiert ist, so dass die Distributivgesetze gelten.

6 Weiterführende Literatur

Physikalische Literatur möchte ich hier nicht angeben, aber für kurze Erläuterungen zu diesem und anderen Themen empfehle ich www.wikipedia.org.