

## Die schwache Wechselwirkung

### 1. Überblick

#### 1.1. Teilchen der schwachen Wechselwirkung

Die schwache Wechselwirkung koppelt an Leptonen und an Quarks. Der Tabelle 1 kann man einige Eigenschaften dieser Teilchen entnehmen. Sowohl Leptonen als auch Quarks lassen sich in drei Familien einteilen, wobei die Massen von der ersten bis zur dritten Familie jeweils aufsteigend sind. Innerhalb der einzelnen Familien unterscheiden sich die elektrischen Ladungen der Teilchen um 1. Außerdem tragen alle Teilchen den Spin  $1/2$ .

	Teilchen, Masse in MeV						Ladung
Leptonen	$\nu_e$	$< 0,000046$	$\nu_\mu$	$< 0,50$	$\nu_\tau$	$< 164$	0
	e	$0,5110034 \pm 0,0000014$	$\mu$	$105,65932 \pm 0,00029$	$\tau$	$1784,2 \pm 3,2$	- 1
Quarks	u	$4,5 \pm 1,4$	c	$1270 \pm 50$	t	$40\ 000 \pm 10\ 000$	+ 2/3
	d	$7,9 \pm 2,4$	s	$155 \pm 50$	b	$4\ 250 \pm 100$	- 1/3

Tabelle 1: Einige Eigenschaften der Leptonen und der Quarks

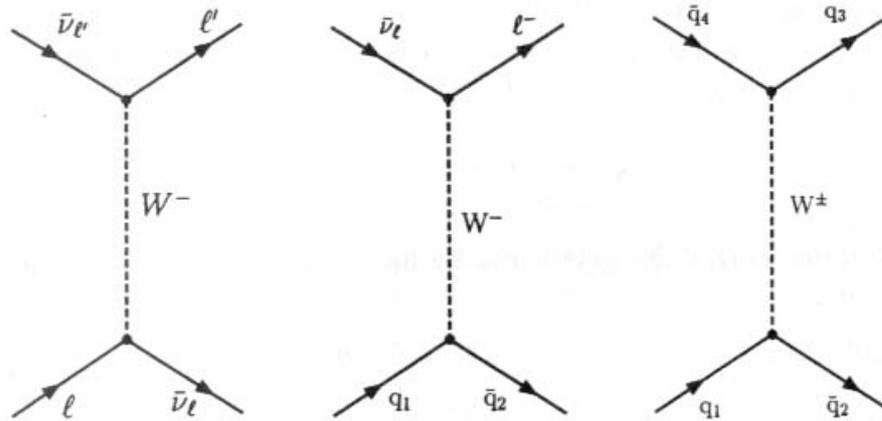
Quelle: Nachtmann, Elementarteilchen

#### 1.2 Typen der schwachen Wechselwirkung

Bei der schwachen Wechselwirkung unterscheidet man zwischen geladenen und neutralen Strömen. Heute geht man davon aus, dass bei beiden Strömen Vektorbosonen ausgetauscht werden. Die Vektorbosonen der geladenen Ströme bezeichnet man als  $W^+$  und  $W^-$ , das Vektorboson der neutralen Ströme als  $Z^0$ . Die Massen vom  $W^+$  und vom  $W^-$  betragen  $80 \frac{GeV}{c^2}$  und die Masse vom  $Z^0$   $91 \frac{GeV}{c^2}$ . Diese Werte sind für Austauscheteilchen ziemlich

hoch, wodurch man die kleine Reichweite der schwachen Wechselwirkung erklären kann.

Die geladenen Ströme unterteilt man in leptonische, semileptonische und nichtleptonische Prozesse. Bei leptonischen Prozessen koppelt das W-Boson nur an Leptonen, bei semileptonischen Prozessen sowohl an Leptonen als auch an Quarks und bei nichtleptonischen Prozessen nur an Quarks. In Abbildung 1 sind die Feynman-Graphen der drei Typen dargestellt.



a) leptonischer Prozess, b) semileptonischer Prozess, c) nichtleptonischer Prozess

Quelle: Povh/Rith/Scholz/Zetsche: „Teilchen und Kerne“  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$

### 1.3 Die Leptonzahl

Die Leptonzahl ist bei Reaktionen, die über die schwache Wechselwirkung ablaufen, eine Erhaltungsgröße. Dabei ist die Leptonzahl für jede Familie einzeln erhalten. Den Teilchen werden folgende Werte zugeordnet:

$$L_e(e^-) = +1$$

$$L_e(e^+) = -1$$

$$L_e(\nu_e) = +1$$

$$L_e(\bar{\nu}_e) = -1$$

$L_e$  bedeutet hier, dass es sich um die Leptonzahl für die erste Familie handelt. Für  $L_\mu$  und für  $L_\tau$  gelten die Werte analog.

## 2. Strom×Strom-Form

### 2.1 Fermis Ansatz

Bei den ersten Versuchen, die schwache Wechselwirkung mathematisch zu beschreiben, ging man noch nicht davon aus, dass bei den Reaktionen Vektorbosonen ausgetauscht wurden. Den ersten Ansatz machte Fermi 1933 für den  $\beta$ -Zerfall. Beim  $\beta$ -Zerfall findet folgende Reaktion statt:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

Fermi orientierte sich an der Quantenelektrodynamik. Für die Wechselwirkung eines Protons mit dem elektromagnetischen Feld fand man dort:

$$H'_{em} = e \int d^3x \bar{p}(x) \gamma^\mu p(x) A_\mu(x)$$

$A_\mu$  ist dabei das Viererpotential und  $p(x)$  der Feldoperator des Protons. Fermi hat in seiner Theorie das Viererpotential ersetzt durch einen Elektron-Neutrino-Strom:

$$A_\mu(x) \rightarrow e^-(x)\gamma^\mu\nu_e(x)$$

Damit erhält man einen Ausdruck für die Wechselwirkung im  $\beta$ -Zerfall:

$$H'_{em} = e \int d^3x \bar{p}(x)\gamma^\mu n(x) e^-(x)\gamma^\mu \nu_e(x)$$

Da man das Proton und des Neutron als zwei Isospinzustände ansehen kann, entstehen keine Probleme beim Ersetzen des Protonfeldoperators durch den Neutronfeldoperator.

Mit dieser Theorie konnten jedoch noch nicht alle  $\beta$ -Zerfälle beschrieben werden. Sie musste noch verallgemeinert werden.

## 2.2 Die Lagrangedichte des $\beta$ -Zerfalls

Die Wechselwirkung einer lokalen Vier-Fermion-Kopplung ist allgemein durch

$$H'_\beta = - \int d^3x L'(x)$$

gegeben.

$L'(x)$  ist der Wechselwirkungsterm der Lagrangedichte.

Um einen Ausdruck für die Wechselwirkung im  $\beta$ -Zerfall zu erhalten, muss man sich fragen, auf wie viele Arten man aus vier Fermion-Feldern eine Lagrangedichte bilden kann. Dabei muss nur gefordert werden, dass sich die Lagrangedichte unter Lorentztransformationen wie ein Skalar verhält. Dann können jeweils zwei Felder folgende Ströme bilden:

Skalarstrom	$\psi\psi$
Vektorstrom	$\psi\gamma^\mu\psi$
Tensorstrom	$\psi\sigma^{\mu\nu}\psi$
Axialvektorstrom	$\psi\gamma^\mu\gamma_5\psi$
Pseudoskalarstrom	$\psi\gamma_5\psi$

Zwei Ströme können nun kontrahiert werden, wodurch man eine Vier-Felder-Kopplung erhält. Damit kann eine allgemeine Lagrangedichte aufgestellt werden:

$$L' = \sum_{j=1}^5 g_j \bar{p}(x) M_j n(x) \bar{e}(x) M'_j \nu(x) + g_j \bar{p}(x) M_j n(x) \bar{e}(x) M'_j \gamma_5 \nu(x)$$

mit:  $j=1 \dots 5$ :

$$M_j \otimes M'_j = 1 \otimes 1, \gamma^\mu \otimes \gamma_\mu, \sigma^{\mu\nu} \otimes \sigma_{\mu\nu}, \gamma^\mu \gamma_5 \otimes \gamma_\mu \gamma_5, \gamma_5 \otimes \gamma_5$$

Nachdem entdeckt wurde, dass die Paritätserhaltung in der schwachen Wechselwirkung verletzt ist, kam man schnell auf die Lagrangedichte für den  $\beta$ -Zerfall:

$$L_{\beta}' = -\frac{G_{\beta}}{\sqrt{2}} \bar{p}(x) \gamma^{\lambda} \left(1 - \frac{g_A}{g_V} \gamma_5\right) n(x) \cdot \bar{e}(x) \gamma_{\lambda} (1 - \gamma_5) \nu(x)$$

Man sieht, dass das Elektron mit dem Neutrino einen V-A-Strom bildet. Im Strom des Protons mit dem Neutron gibt es auch einen Vektoranteil und einen Axialvektoranteil, jedoch sind in diesem Fall die Anteile nicht gleich groß. Es gilt:

$$\frac{g_A}{g_V} = 1,255 \pm 0,006$$

### 3. Die Verletzung der Paritätserhaltung

Die Eigenschaften des V-A-Stroms rühren von den Eigenschaften von  $\gamma_5$  her.

$$\gamma_5 = i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$$

$$\gamma_5^+ = \gamma_5$$

$$\gamma_5^2 = 1$$

Der V-A- Strom ist durch den Operator  $\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$  gegeben.

Interessant sind die Eigenschaft dieses Operators und des Operators mit einem +-Zeichen anstelle des -Zeichens:

$$\frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\gamma_5 + \gamma_5^2) = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$$

$$\frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) = \frac{1}{4}(1 - \gamma_5)^2$$

$$\frac{1}{2}(1 - \gamma_5) + \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) = 1$$

Dies sind die Eigenschaften von Projektionsoperatoren. Es stellt sich heraus, dass die oben betrachteten Operatoren auf die links- bzw. rechtshändigen Anteile von Dirac-Spinoren projizieren. Bei linkshändigen masselosen Teilchen ist der Spin entgegen des Impulses gerichtet, bei rechtshändigen masselosen Teilchen parallel zum Impuls. Diese Projektion hat Konsequenzen auf die Erhaltung der Parität:

Die Parität ist in einer Wechselwirkung erhalten, wenn der Wechselwirkungsoperator gleichermaßen an linkshändige und rechtshändige Teilchen koppelt. Durch diese Projektion ist dies nicht gegeben!

Man findet, dass es nur linkshändige Neutrinos und rechtshändige Antineutrinos in der schwachen Wechselwirkung gibt.

#### 4. Die Universalität

##### 4.1 Der Zerfall des Myons

Nicht nur der  $\beta$ -Zerfall geschieht aufgrund der schwachen Wechselwirkung. Auch viele Leptonen wie das Myon und einige Hadronen zerfallen über die schwache Wechselwirkung.

Das Myon zerfällt über folgenden Prozess:

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

Man kann die Lagrangedichte für diesen Prozess angeben:

$$L'_\mu(x) = -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_\mu(x) \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) \mu(x) \bar{e}(x) \gamma_\lambda (1 - \gamma_5) \nu_e(x)$$

Interessant ist, dass die Kopplungskonstante dieses Zerfalls ungefähr so groß ist wie die Kopplungskonstante des  $\beta$ -Zerfalls. Es gilt:

$$\frac{G_\beta}{G_\mu} \approx 0,98$$

An dieser Stelle kann man erahnen, dass eine Kopplungskonstante für die Beschreibung aller Reaktionen der schwachen Wechselwirkung ausreicht. Dies soll an den Zerfällen einiger Hadronen überprüft werden.

##### 4.2 Die Zerfälle der Hadronen

Die schwache Wechselwirkung koppelt an Leptonen und an Quarks. Man kann die Zerfälle der Hadronen auf die Wechselwirkung ihrer Bestandteile, der Quarks, zurückführen. Als Beispiel soll nochmals der Zerfall des Neutrons dienen. Der Zerfall ist in Abbildung 2 dargestellt.

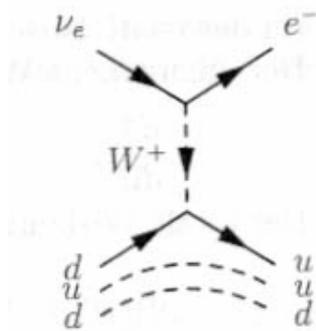


Abbildung 2: Der Zerfall des Neutrons

Quelle: Sibold, „Theorie der Elementarteilchen“

Wie man sehen kann, kann der Prozess über folgende Elementarreaktion beschrieben werden:

$$d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$$

Kreuzt man das up-Quark auf die linke Seite, erkennt man, dass auch der Zerfall des Pions durch diese Elementarreaktion beschrieben werden kann. Für diese beiden Reaktionen können wir nun eine gemeinsame Lagrangedichte angeben:

$$L'_\beta(x) = -\frac{G_\beta}{\sqrt{2}} \bar{u}(x)\gamma^\lambda(1-\gamma_5)d(x) \left[ \bar{e}(x)\gamma_\lambda(1-\gamma_5)\nu_e(x) + \bar{\mu}(x)\gamma_\lambda(1-\gamma_5)\nu_\mu(x) \right]$$

Bei einigen Zerfällen der Hadronen ändert sich die Strangeness. Die Strangeness ist bei der elektromagnetischen und bei der starken Wechselwirkung eine Erhaltungsgröße, nicht aber bei der schwachen Wechselwirkung. So zerfällt z.B. das Kaon über die schwache Wechselwirkung:

$$K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu.$$

Mit der obigen Lagrangedichte können wir Reaktionen, bei denen sich die Strangeness ändert, noch nicht beschreiben. Cabibbo hat jedoch einen Ansatz gefunden, mit dem dies möglich ist. Cabibbo hat das down-Quark ersetzt durch eine Linearkombination aus einem down-Quark und einem strange-Quark:

$$d \rightarrow d' = \cos\theta_c d + \sin\theta_c s.$$

Damit kommt man zu der Lagrangedichte:

$$L'_\beta(x) = -\frac{G_\beta}{\sqrt{2}} \bar{u}(x)\gamma^\lambda(1-\gamma_5) [\cos\theta_c d + \sin\theta_c s] \cdot \left[ \bar{e}(x)\gamma_\lambda(1-\gamma_5)\nu_e(x) + \bar{\mu}(x)\gamma_\lambda(1-\gamma_5)\nu_\mu(x) \right].$$

Die Elementarreaktion für alle Zerfälle mit Änderung der Strangeness kann man dann wie folgt schreiben:

$$s \rightarrow u + l^- + \bar{\nu}_l.$$

$l$  ist dabei ein Lepton.

In der Lagrangedichte steht die Kopplungskonstante des  $\beta$ -Zerfalls. Man kann also den Zerfall vieler Hadronen (Neutron, Pion, Hadronen mit Strangeness.....) durch eine Lagrangedichte mit ungefähr derselben Kopplungskonstanten beschreiben. Die schwache Wechselwirkung ist damit „universell“.

## 5. Die neutralen Ströme

Beispiele für neutrale Ströme sind die Streuung von Myonenneutrinos oder Myonantineutrinos an Leptonen oder an Quarks:

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$$

$$\bar{\nu}_\mu + u \rightarrow \bar{\nu}_\mu + u$$

$$\nu_\mu + u \rightarrow \nu_\mu + u$$

Man kann diese Prozesse durch einen Neutrino-Neutrino-Strom und einen Lepton- Lepton-Strom bzw. einen Quark-Quark-Strom beschreiben. Es stellt sich heraus, dass zwei Neutrinos einen V-A-Strom bilden, zwei Quarks einen Strom mit Axialvektor- und Vektoranteil unterschiedlicher Stärke. Man findet als Lagrangedichte.

$$L = \frac{G}{\sqrt{2}} \rho (\bar{q} \gamma^\lambda (g_V^q - g_A^q) \gamma_5 q) (\bar{\nu} \gamma_\lambda (1 - \gamma_5) \nu)$$

$\rho$  moduliert die relative Stärke neutraler Ströme.

## 6. Die Quantenflavordynamik

### 6.1 Motivation

Bisher haben wir die schwache Wechselwirkung als lokale Vier-Fermion-Kopplung betrachtet. Die Ergebnisse dieser Theorie decken sich gut mit den Experimenten. Jedoch gibt es theoretische Gründe, weshalb man mit dieser Theorie nicht zufrieden sein kann. Z.B. errechnet man für ein S-Matrixelement für die Streuung unpolarisierter Neutrinos und Elektronen:

$$S_{fi}^2 = 16G^2 s^2$$

Die S-Matrix, zu der ein solches von der Energie abhängiges Element gehört, kann nicht unitär sein. Ist die S-Matrix nicht unitär, ist aber die Wahrscheinlichkeitserhaltung verletzt. Die Wahrscheinlichkeitserhaltung kann dadurch gerettet werden, dass die schwache Wechselwirkung über den Austausch von Vektorbosonen beschrieben wird. Dies geschieht in der Quantenflavordynamik. Außerdem wird in dieser Theorie die elektromagnetische Wechselwirkung mit der schwachen Wechselwirkung vereinigt.

### 6.2 Die Lagrangedichte der Quantenflavordynamik

#### 6.2.1 Invarianz unter SU(2)- Transformationen

Man kann eine Lagrangedichte aufstellen, die die Kopplung der schwachen und der elektromagnetischen Wechselwirkung enthält. Die Herleitung dieser Lagrangedichte wird für das Elektron und für das Neutrino im Folgenden kurz skizziert.

Ausgegangen wird von der Lagrangedichte der freien Felder:

$$L_0(x) = (\nu_{e_L}(x), e_L(x)) (i\gamma^\lambda \partial_\lambda) \begin{pmatrix} \nu_{e_L} \\ e_L \end{pmatrix} + e_R(x) i\gamma^\lambda \partial_\lambda e_R(x)$$

Das Elektron wurde hierbei in den linkshändigen und den rechtshändigen Anteil aufgeteilt. Aus physikalischen Gründen fordert man die Invarianz unter lokalen SU(2)-Transformationen:

$$\begin{pmatrix} \nu_{e_L} \\ e_L \end{pmatrix} \rightarrow U(x) \begin{pmatrix} \nu_{e_L} \\ e_L \end{pmatrix}$$

Dabei ist U(x) aus SU(2).

$L_0$  ist unter dieser Transformation nicht invariant. Die Invarianz kann aber hergestellt werden, indem man Vektorfelder in die Lagrangedichte einbaut. Die Vektorfelder werden hier  $W_\lambda^1, W_\lambda^2$  und  $W_\lambda^3$  genannt. Die drei Vektorfelder kann man zu  $2 \times 2$ -Matrizen zusammenfassen:

$$W_\lambda = W_\lambda^\alpha(x) \frac{\tau_\alpha}{2}$$

Die Feldstärkematrix lautet:

$$W_{\lambda\rho}(x) = \partial_\lambda W_\rho(x) - \partial_\rho W_\lambda(x) + ig [W_\lambda(x), W_\rho(x)]$$

Der Kommutator fällt nicht weg, da es sich bei der SU(2) um eine nichtabelsche Gruppe handelt.

Baut man diese Matrizen in die Lagrangedichte ein, kommt man zu dieser Gleichung:

$$L(x) = -\frac{1}{2} Sp(W_{\lambda\rho}(x)W^{\lambda\rho}(x)) + (\bar{\nu}_{e_L}(x), e_L(x)) i\gamma^\lambda (\partial_\lambda + igW_\lambda) \begin{pmatrix} \nu_{e_L} \\ e_L \end{pmatrix} + e_R(x) i\gamma^\lambda \partial_\lambda e_R(x)$$

Der erste Summand dieser Dichte beschreibt die Wechselwirkung der Vektorbosonen untereinander. Der zweite Summand beschreibt die Wechselwirkung der linkshändigen Neutrinos und Elektronen.

Diese Lagrangedichte ist invariant unter der lokalen SU(2)-Transformation, wenn  $W_\lambda$  wie folgt transformiert wird:

$$W_\lambda(x) \rightarrow U(x)W_\lambda(x)U^+(x) - \frac{i}{g}U(x)\partial_\lambda U^+(x)$$

Die erhaltene Eichgruppe bezeichnet man als schwache Isospingruppe. Das linkshändige Elektron und das linkshändige Neutrino bilden zusammen ein Dublett, das rechtshändige Elektron ein Singulett.

Interessant ist zunächst die Kopplung der Elektronen und der Neutrinos untereinander. Diese Kopplung gibt der zweite Summand in obiger Lagrangedichte wieder. Mit den beiden Operatoren

$$W_\lambda^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\lambda^1 \mp W_\lambda^2)$$

lautet dieser:

$$L_{\nu e W} = -\frac{g}{2} \left\{ W_\lambda^3 (\bar{\nu}_{e_L} \gamma^\lambda \nu_{e_L} - \bar{e}_L \gamma^\lambda e_L) + \sqrt{2} W_\lambda^+ \bar{\nu}_{e_L} \gamma^\lambda e_L + \sqrt{2} W_\lambda^- \bar{e}_L \gamma^\lambda \nu_{e_L} \right\}$$

Ziel dieses Abschnittes ist es, eine Lagrangedichte herzuleiten, die die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung enthält. Im obigen Elektron-Neutrino-Kopplungsterm ist jedoch noch kein Zeichen vom Elektromagnetismus.  $W_\lambda^3$  kann nicht als Photonfeld identifiziert werden, weil dieses Feld nur an das linkshändige Neutrino und an das linkshändige Elektron koppelt, nicht aber an das rechtshändige Elektron. Da das Photonfeld aber an die elektrische Ladung koppelt, müsste es mit dem rechtshändigen Elektron wechselwirken. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, wie der Elektromagnetismus in die Lagrangedichte eingebaut werden kann.

## 6.2.2 Invarianz unter Phasentransformationen

Für den Kopplungsterm  $L_{evW}$  der Lagrangedichte fordert man die Invarianz unter zwei Phasentransformationen:

$$\begin{pmatrix} \nu_{e_L} \\ e_L \end{pmatrix} \rightarrow e^{iY_L x} \begin{pmatrix} \nu_{e_L} \\ e_L \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \nu_{e_L} \\ e_L \end{pmatrix} \rightarrow e^{iY_R x} \begin{pmatrix} \nu_{e_L} \\ e_L \end{pmatrix}$$

$\vec{Y}$  ist die schwache Hyperladung.

$L_{evW}$  ist erst nach Einführen des Vektorfeldes  $B_\lambda$  invariant. Die Feldstärkematrix ist in diesem Fall durch den Ausdruck  $B_{\lambda\rho} = \partial_\lambda B_\rho - \partial_\rho B_\lambda$  gegeben.

Mit diesen Größen erhalten wir als Lagrangedichte:

$$\begin{aligned} L' = & -\frac{g}{\sqrt{2}} \{ W_\lambda^+ \bar{\nu}_{e_L} \gamma^\lambda e_L + W_\lambda^- \bar{e}_L \gamma^\lambda \nu_{e_L} \} - \frac{1}{2} (gW_\lambda^3 + 2Y_L g' B_\lambda) \bar{\nu}_{e_L} \gamma^\lambda e_L \\ & + \frac{1}{2} (gW_\lambda^3 - 2Y_L g' B_\lambda) \bar{e}_L \gamma^\lambda e_L - Y_R g' B_\lambda \bar{e}_R \gamma^\lambda e_R \end{aligned}$$

Hier kommen zwei neutrale Vektorfelder vor:  $W_\lambda^3$  und  $B_\lambda$ . Aus diesen beiden Feldern kann man Linearkombinationen bilden, so dass man das Photonfeld und das  $Z^0$ -Feld erhält:

$$A_\lambda = \cos \theta_W W_\lambda^3 - \sin \theta_W B_\lambda$$

$$Z_\lambda = \sin \theta_W W_\lambda^3 + \cos \theta_W B_\lambda$$

mit

$$\sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

$$\cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

Mit den beiden neuen Feldern kann man die Lagrangedichte nun so schreiben:

$$L' = -e \left\{ A_\lambda J_{em}^\lambda + \frac{1}{\sqrt{2} \sin \theta_W} (W_\lambda^+ \bar{\nu}_{e_L} \gamma^\lambda e_L + W_\lambda^- \bar{e}_L \gamma^\lambda \nu_{e_L}) + \frac{1}{\sin \theta_W \cos \theta_W} Z_\lambda J_{NC}^\lambda \right\}$$

$J_{NC}^\lambda$  ist dabei der neutrale Strom:

$$J_{NC}^\lambda = \frac{1}{2} \bar{\nu}_{e_L} \gamma^\lambda \nu_{e_L} - \bar{e}_L \gamma^\lambda e_L - \sin^2 \theta_W J_{em}^\lambda$$

und  $J_{em}^\lambda$  der elektromagnetische Strom

$$J_{em}^\lambda = \bar{e}_L \gamma^\lambda e_L - \bar{e}_R \gamma^\lambda e_R$$

Nach Eichung der  $SU(2) \times U(1)$ -Gruppe erhält man eine Kopplungsstruktur, die die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung über Vektorbosonen beschreibt.