

Seminarvortrag Kern- und Teilchentheorie

Abelsche Eichtheorie und Quantenelektrodynamik

Jens Langelage

1. Eichinvarianz in der kl. Elektrodynamik:

Der Feldstärketensor

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

und der duale Feldstärketensor

$$(\tilde{F}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ -B_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ -B_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ -B_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{pmatrix}$$

geben zusammen mit der Viererstromdichte

$$(j^\mu) = (\rho, \vec{j})$$

eine kompakte Form der Maxwell-Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1.) \partial_\mu F^{\mu\nu} &= j^\nu \\ 2.) \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= 0 \end{aligned}$$

Mit einem Ansatz für $F^{\mu\nu}$ durch das Viererpotential

$$(A^\mu) = (\phi, \vec{A})$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

wird die homogene Maxwell-Gleichung automatisch erfüllt. Dieser Ansatz für den Feldstärketensor lässt aber eine Eichfreiheit bzgl. des Viererpotentials zu:

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda(x) \Rightarrow F'^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}$$

Durch die Addition eines Vierergradienten einer skalaren Funktion $\Lambda(x)$ zum Viererpotential wird also der Feldstärketensor nicht verändert.

2. Eichinvarianz in der Quantenmechanik

Quantenmechanische Observable

$$\langle O \rangle = \int \psi^*(x) O \psi(x) dx$$

sind invariant unter sogenannten globalen Phasentransformationen

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{i\theta} \psi(x) \\ \Rightarrow \langle O \rangle' &= \int e^{-i\theta} \psi^*(x) O e^{i\theta} \psi(x) dx = \int \psi^*(x) O \psi(x) dx = \langle O \rangle \end{aligned}$$

Es stellt sich die Frage ob man die Quantenmechanik auch invariant unter lokalen Phasentransformationen formulieren kann

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)} \psi(x)$$

Quantenmechanische Bewegungsgleichungen sind Differentialgleichungen. Diese sollen ebenfalls invariant sein. Man erhält als Transformation der Ableitung:

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \psi(x))' &= \partial_\mu (e^{i\alpha(x)} \psi(x)) \\ &= e^{i\alpha(x)} \left\{ \partial_\mu + i \left[\partial_\mu \alpha(x) \right] \right\} \psi(x) \end{aligned}$$

Wie man sehen kann, ist die Ableitung nicht invariant unter lokalen Phasentransformationen. Als Ausweg definiert man eine neue sogenannte kovariante Ableitung, die einen inhomogenen Term enthält:

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$$

Diese Ableitung transformiert sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned} (D_\mu \psi(x))' &= (\partial_\mu + ieA_\mu') (e^{i\alpha(x)} \psi(x)) \\ &\stackrel{!}{=} e^{i\alpha(x)} (\partial_\mu + ieA_\mu) \psi(x) \\ \Rightarrow A_\mu' &= A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \end{aligned}$$

Als wichtiges Ergebnis kann man ansehen, dass die Forderung nach lokaler Phasentransformationsinvarianz erreicht werden kann, wenn man das elektromagnetische Vektorfeld A^μ in die Theorie einbaut. Dies wird auch minimale Kopplung genannt.

3. Quantenelektrodynamik

Die Lagrangedichte des Dirac-Feldes lautet:

$$\Gamma_D = \bar{\psi} (\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi$$

Die Lagrangedichte des geladenen skalaren Feldes lautet:

$$\Gamma = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$$

Die Dirac – Gleichung und die Klein – Gordon – Gleichung folgen aus den Lagrangedichten via:

$$\delta L = \delta \int \Gamma_D d^4x = 0$$

Die Lagrangedichte des Dirac – Feldes ist invariant unter globalen Phasentransformationen. Wenn man lokale Phasentransformationsinvarianz fordern möchte, ersetzt man wieder die gewöhnlichen Ableitungen durch die kovariante Ableitung. Soll das Feld A^μ einem Teilchen (Photon) entsprechen, so muss die Lagrangedichte einen kinetischen Term für A^μ enthalten, der die Propagation freier Photonen beschreibt. Das ist per definitionem ein Term bilinear in Feldern und Ableitungen. Einziger eichinvarianter Term dieser Form ist:

$$\Gamma_{kin} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

Damit lautet also die vollständig lokal eichinvariante Lagrangedichte für das gekoppelte System Dirac-Spinor / Photon:

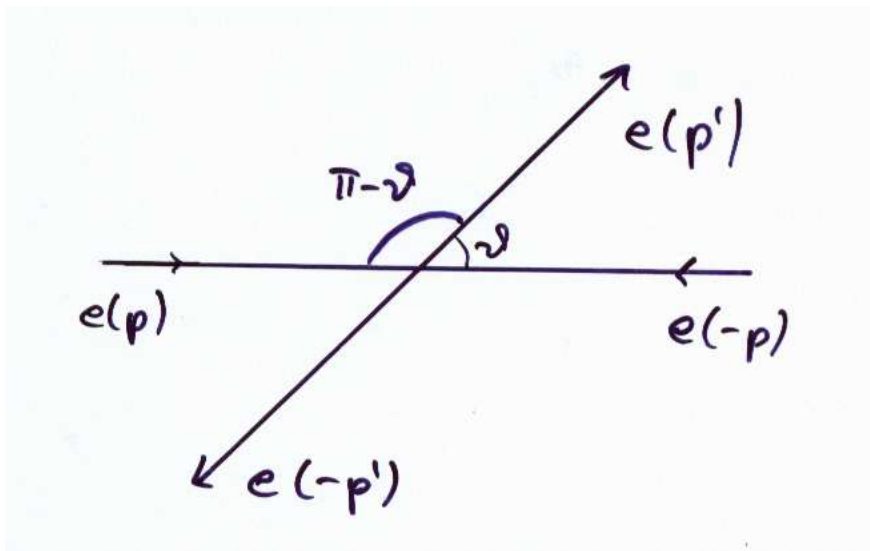
$$\Gamma_{QED} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi} (\gamma^\mu \partial_\mu - e A_\mu - m) \psi$$

Für das geladene skalare Feld führt eine analoge Überlegung auf:

$$\Gamma = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^\dagger D_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$$

4. Møller – Streuung

Unter der Møller – Streuung versteht man die Streuung zweier Elektronen aneinander. Im Schwerpunktsystem sieht diese Streuung skizziert wie folgt aus:



Klassisch könnte man versuchen dieses Problem anhand der Rutherford – Streuformel zu lösen

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\text{klassisch}} = \frac{\alpha^2 m^2}{16|p|^4} \left\{ \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{\vartheta}{2}} \right\}$$

Der cos – Term kommt daher, dass beide Teilchen Elektronen sind und im Detektor sowohl von links als auch von rechts einlaufende Elektronen detektiert werden können. Es stellt sich aber heraus, dass die Formel selbst für beliebig langsame Elektronen nicht korrekt ist.

Die korrekten quantenmechanischen Formeln für den Streuquerschnitt wurden zuerst 1932 von Møller angegeben:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{s t^2 u^2} \left\{ (s - 2m^2)^2 (t^2 + u^2) + ut(-4m^2 s + 12m^4 + ut) \right\}$$

mit den Mandelstam – Variablen s, t und u:

$$s = 4(p^2 + m^2)$$

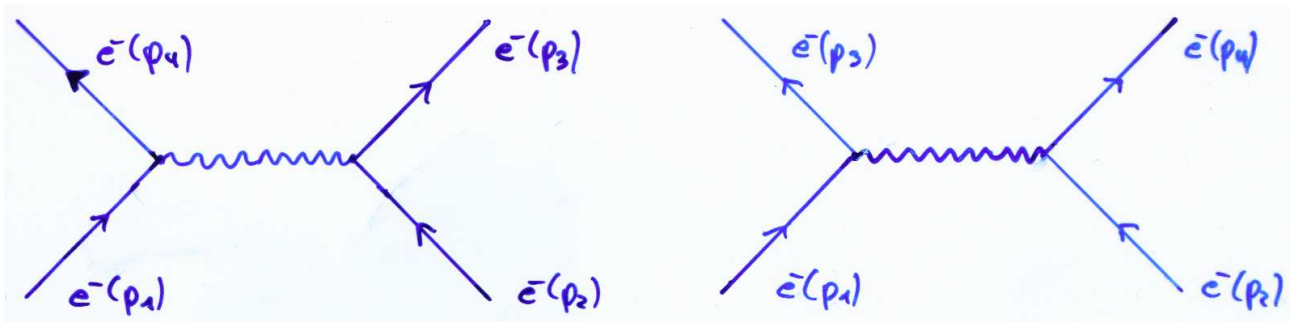
$$t = -4p^2 \left(\sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right)$$

$$u = -4p^2 \left(\cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right)$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall erhält man für den Streuquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 m^2}{16|p|^4} \left\{ \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{\vartheta}{2}} - \frac{1}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2}} \right\}$$

Es tritt also ein Interferenzterm auf. Dieser resultiert daraus, dass Elektronen quantenmechanisch ununterscheidbar sind und nicht entschieden werden kann, ob das gestreute Elektron von links oder von rechts kommt. Dies äußert sich auch in dem Umstand, dass man zwei Feynman – Diagramme auswerten muss, um den Streuquerschnitt zu erhalten:



Wertet man diese Diagramme mithilfe der Feynman – Regeln aus, so erhält man als ergebnis für die Übergangsamplitude:

$$S_{fi} = i(2\pi)^4 (p_4 + p_3 - p_2 - p_1) T_{fi}$$

mit

$$T_{fi} = \frac{1}{i} \left\{ \bar{u}(p_4)(ie\gamma^\mu)u(p_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_4 - p_1)^2} \bar{u}(p_3)(ie\gamma^\nu)u(p_2) - \bar{u}(p_3)(ie\gamma^\mu)u(p_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_3 - p_1)^2} \bar{u}(p_4)(ie\gamma^\nu)u(p_2) \right\}$$

Man erkennt jeweils zwei Terme für ein – und auslaufende Elektronen sowie die Photon-Propagatoren und die Terme für die Vertices.

Man kann nun zeigen, dass für den differentiellen Streuquerschnitt gilt:

$$d\sigma = \frac{1}{2w(s, m_e^2, m_e^2)} \frac{d^3 p_3 d^3 p_4}{(2\pi)^2 2p_3^0 2p_4^0} \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \sum'_{Spins} |T_{fi}|^2$$

wobei die Mittelung bzw. Summation über die Spinrichtungen der Elektronen im Anfangs- bzw. Endzustand bedeutet.

Wertet man die Spinsumme aus, erhält man:

$$\sum'_{Spins} |T_{fi}|^2 = \frac{64\pi^2 \alpha^2}{t^2 u^2} \{(s - 2m^2)(t^2 + u^2) + ut(-4m^2 s + 12m^4 + ut)\}$$

Setzt man dies in die Formel für den Streuquerschnitt ein und integriert über p_3 und p_4 , so erhält man schließlich das gesuchte Resultat:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{st^2 u^2} \{(s - 2m^2)^2 (t^2 + u^2) + ut(-4m^2 s + 12m^4 + ut)\}$$

